24. Новое доказательство основной теоремы Алгебры.

И. П. Долбни.

(Доложено 12 мая 1908 г.).

§ 1. Пусть точка x представляетъ компл. перемѣнное

$$x = \rho\ (\mathrm{Cos}\ \omega + i\,\mathrm{Sin}\ \omega).$$

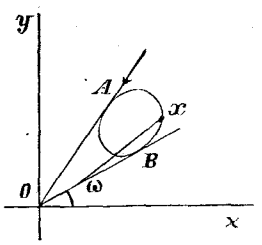
Будемъ измѣнять x по сомкнутой кривой въ положительномъ направленіи. Аргументъ ω возрастаетъ отъ точки x до точки A, въ которой модуль AO есть касательная къ кривой. Аргументъ убываетъ отъ точки A до точки B, гдѣ радіусъ векторъ OB касателенъ къ кривой. Послѣ этого аргументъ возрастаетъ и въ точкѣ x пріобрѣтаетъ первоначальную величину. Если теперь измѣнять x по кривой, внутри которой начало координатъ, то аргументъ ω возрастаетъ непрерывно, и, по совершеніи полнаго оборота по кривой, аргументъ ω пріобрѣтаетъ *приращеніе* 2π.

Отсюда слѣдуетъ, что аргументъ x^m на чертежѣ 1 пріобрѣтетъ послѣ полнаго оборота первоначальную величину $m\omega$, а на черт. 2 пріобрѣтетъ приращеніе

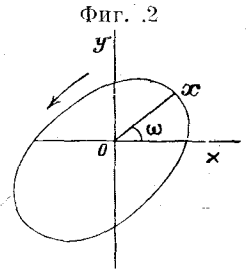
$$2m\pi.$$

И это справедливо для всякаго соизмѣримаго m.

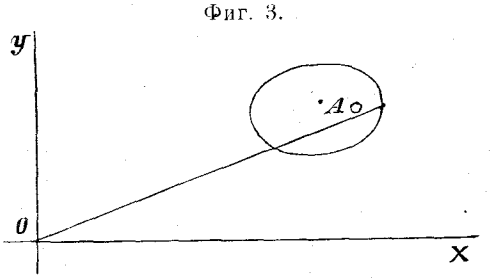
Фиг. 1.



Фиг. 2



Фиг. 3.



§ 2. Имѣемъ цѣлую функцію

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_m x^m.$$

Имѣемъ

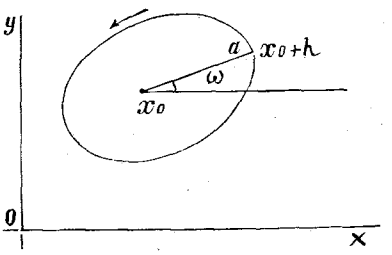
$$f(o) = a_0.$$

Комплексное перемѣнное x измѣняется по кривой черт. 2, оставаясь безконечно малымъ (близкимъ къ нулю по модулю). Пусть точка A_0 (чер. 3) изображаетъ количество a_0. Для значеній x, близкихъ къ нулю, модуль

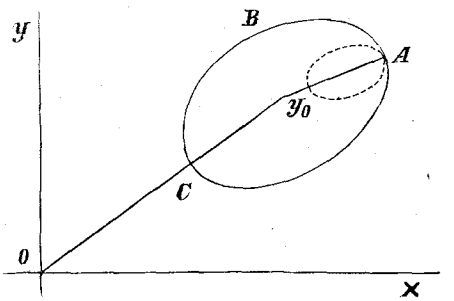
$$|f(x)|$$

близокъ къ $|a_0|$; а потому, при измѣненіи x по кривой (черт. 2), $f(x)$ измѣняется по кривой, окружающей точку A_0, такъ что модуль $f(x)$ близокъ къ модулю a_0. Отсюда слѣдуетъ, что аргументъ функціи $f(x)$ не получитъ никакого приращенія, не смотря на то, что аргументъ x увеличится на 2π.

Фиг. 4.



Фиг. 5.



§ 3. Положимъ, что комплексное перемѣнное получаетъ значеніе x_0 (черт. 4). Пусть этому зна-

ченію соотвѣтствуетъ значеніе функціи $F(x_0)$, представляемое точкой y_0 (черт. 5). Дадимъ x_0 безконечно малое приращеніе h; значенію x_0+h соотвѣтствуетъ точка a. Безконечно малое h представляется модулемъ x_0a и аргументомъ ω. Если точку a будемъ перемѣщать по кривой (чер. 4) въ положительномъ направленіи, то, послѣ обхода периметра этой кривой, аргументъ компл. перем. h пріобрѣтетъ приращеніе 2π. По теоремѣ Тейлора имѣемъ

$$F(x_0+h)-F(x_0)=hF'(x_0)+\frac{h^2}{1\,.\,2}F''(x_0)+\ldots.+$$
$$+\frac{h^m}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,m}F^{(m)}(x_0)$$

Можетъ случиться, что

$$F'(x_0)=F''(x_0)=\ldots.F^{(i-1)}(x_0)=O;$$

тогда

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\frac{h^i}{1\,.\,2\,\ldots\,i}F^{(i)}_{(x_0)}+\ldots\ldots+$$
$$+\frac{h^m}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,m}F^{(m)}_{(x_0)},$$

или

$$F(x_0+h)-F(x_0)=h^i\{A_0+A_1h+A_2h^2+\ldots..$$

Когда точка a (черт. 4) совершитъ полный обходъ по кривой, окружающей точку x_0, аргументъ h получитъ приращеніе $2\pi i$; аргументъ же полинома

$$A_0+A_1h+A_2h^2\ldots\ldots$$

не получитъ приращенія, ибо $|h|$ близокъ къ нулю.

Поэтому аргументъ приращенія

$$F(x_0+h)-F(x_0)$$

получитъ приращеніе

$$2\pi i.$$

А это возможно лишь въ томъ случаѣ, когда точка A опишетъ кривую $ABCA$ (черт. 5), а не кривую, отмѣченную пунктиромъ. Значеніе h въ точкѣ C изображается модулемъ Cy_0; значеніе это назовемъ чрезъ h_1. Точка C выразитъ значеніе

$$F(x_0+h_1),$$

а точка y_0—значеніе

$$F(x_0).$$

Имѣемъ

$$|F(x_0+h_1)|<|F(x_0)|.$$

Отсюда видно, что, если

$$F(x_0)=O,$$

можно всегда найти такое значеніе перемѣннаго x_0+h_1, для котораго

$$|F(x_0+h_1)|<|F(x_0)|.$$

Значитъ, измѣняя перемѣнное x можно уменьшать модуль полинома $F(x)$ до тѣхъ поръ, пока этотъ модуль не обратится въ нуль. Положимъ, что мы нашли наконецъ

$$F(X)=O,$$

тогда и

$$F(X)=O,$$

тогда

$$x=X$$

называется корнемъ полинома $F(x)$. Имѣемъ теорему:

Всякій полиномъ $F(x)$ имѣетъ корень.