ЛГУ • ЛЕНИНГРАДСКИЙ • 1934 • ГОРНЫЙ ИНСТИТУТ •

15 О реципрочныхъ кривыхъ и поверхностяхъ.

Е. С. Федорова.

(Доложено 10-го сентября 1907 г.).

Подъ этимъ общимъ названіемъ мы подразумѣваемъ всѣ тѣ кривыя и поверхности, которыя представлены въ геометріи гармоническихъ отрѣзковъ.

Дѣйствительно въ этой геометріи всякой средней точкѣ отрѣзка однозначно соотвѣтствуютъ обѣ концевыя точки этого отрѣзка; слѣдовательно, какая бы кривая ни была представлена въ этой геометріи, какъ совокупность концевыхъ точекъ отрѣзковъ, всегда ея точки группируются въ пары, гармоническія относительно основного ортогональнаго шара O, причемъ концевыя точки находятся на радіусѣ этого шара.

Отсюда заключаемъ, что пересѣченіе какихъ бы то ни было кривыхъ и поверхностей этой геометріи лучами изъ центра шара O можетъ быть только четное и не меньше двухъ.

Изъ этого слѣдуетъ, что изъ алгебраическихъ кривыхъ здѣсь могутъ быть лишь кривыя не ниже второго порядка. И дѣйствительно, въ статьѣ, излагающей основанія этой геометріи [1]), доказывается, что простѣйшая кривая, представляющая линейную приму (прямую) представлена кругомъ, а уже циклъ то есть совокупность, опредѣляемая тремя элементами, есть кривая четвертаго порядка.

Мы называемъ относящіяся сюда кривыя и поверхности реципрочными, потому что онѣ получаются изъ разныхъ другихъ кривыхъ (но не всякихъ) реципрочнымъ преобразованіемъ.

Дѣйствительно, принявъ одну изъ точекъ шара O, все равно какую, за центръ реципрочнаго преобразованія точекъ (обратными радіусами), получимъ изъ шара O плоскость p, каковъ бы ни былъ радіусъ шара R преобразованія, а изъ реципрочной поверхности другую, точки которой также слагаются въ пары, и притомъ именно въ пары, симметричныя относительно плоскости p; такимъ образомъ реципрочно-преобразованная реципрочная поверхность есть поверхность, симметричная относительно нѣкоторой плоскости.

Отсюда обратно, реципрочныя поверхности есть поверхности, реципрочно преобразованныя изъ поверхностей, обладающихъ плоскостями симметріи.

Для такой поверхности имѣется шаръ, а именно шаръ, преобразованный изъ плоскости p, по отношенію къ которому точки поверхности сочетаются въ гармонически-сопряженныя пары, причемъ другою, постоянною гармоническою парою будутъ концы діаметра шара O на соотвѣтственномъ лучѣ

Но на поверхности, обладающія плоскостями симметріи, можно смотрѣть нетолько какъ на таковыя, изъ коихъ выводятся реципрочныя поверхности. Ихъ самихъ можно считать реципрочными уже потому, что на плоскость симметріи можно смотрѣть какъ на шаръ безконечно-большого радіуса, относительно котораго симметричныя точки будуть гармонически-сопряженными.

Если поверхность, обладающая плоскостью симметріи, есть непрерывная замкнутая, то она должна пересѣкать эту плоскость и притомъ пересѣкать прямоугольно во всѣхъ точкахъ пересѣченія.

Въ самомъ дѣлѣ, если бы она не пересѣкала плоскости симметріи, то построивъ симметричныя точки, мы получили бы другую непрерывную замкнутую поверхность, и только совокупность этихъ двухъ была бы симметрична относительно плоскости.

Если на поверхности возьмемъ точку a_1, безконечно-близкую къ точкѣ пересѣченія a съ плоскостью симметріи, то получимъ и другую точку a_1' той же поверхности, симметричную точкѣ a_1. Хорда a_1a_1

[1]) Ср. стр. 149 сл.

есть хорда, перпендикулярная къ плоскости симметріи, а въ предѣлѣ сближенія становится перпендикулярною касательною къ кривой поверхности въ точкѣ a пересѣченія.

Если преобразуемая поверхность пересѣкаетъ плоскость симметріи прямоугольно, то по свойствамъ реципрочнаго преобразованія, реципрочная поверхность пересѣкаетъ прямоугольно шаръ O, преобразованный изъ плоскости симметріи p.

Если же преобразуемая поверхность состоитъ изъ нѣсколькихъ полостей, то тѣ изъ нихъ, которыя не пересѣкаютъ плоскость p, но имѣютъ точки, *касательныя плоскости въ которыхъ перпендикулярны* къ плоскости p, необходимо имѣются симметричныя точки, въ коихъ касаются тѣ же перпендикулярныя плоскости. Если одна полость поверхности представляется непрерывною и замкнутою, то такова же и симметричная ей полость, и тогда необходимо имѣется полный цилиндръ касательныхъ плоскостей, перпендикулярныхъ къ плоскости p.

Отсюда слѣдуетъ, что если въ реципрочной поверхности имѣется полость непрерывная и замкнутая, то таковыхъ, разъ она не пересѣкаетъ реципрочнаго шара, необходимо имѣется двѣ, одна внѣ, а другая внутри шара; и если имѣется шаръ, проходящій чрезъ центръ шара преобразованія и прямоугольно пересѣкающій шаръ реципрочный, касательный къ одной полости кривой, то онъ необходимо касателенъ и къ другой, реципрочной полости той же кривой поверхности. Другими словами, въ составъ реципрочной кривой поверхности входятъ двѣ замкнутыя полости, которыя сами реципрочны другъ относительно друга, какъ таковыми же можно считать двѣ замкнутыя симметричныя полости преобразуемой поверхности.

Въ каждой точкѣ преобразуемой поверхности мы можемъ провести касательную плоскость и нормаль, и если примемъ точку пересѣченія нормали съ плоскостью симметріи за центръ шара, проходящаго чрезъ взятую точку касанія, то этотъ шаръ будетъ прямоугольно пересѣкать плоскость симметріи и касаться къ поверхности во взятой ея точкѣ и въ точкѣ, ей симметричной.

Отсюда слѣдуетъ, что если въ реципрочной поверхности въ произвольной ея точкѣ, мы проведемъ касающійся шаръ, прямоугольно пересѣкающій реципрочный шаръ O, онъ же необходимо будетъ касаться къ той же поверхности и въ другой точкѣ, реципрочной съ первой точкой касанія.

Если возьмемъ произвольный шаръ, касающійся преобразуемой поверхности въ точкѣ a, то имѣется и симметричный шаръ, касающійся той же поверхности въ симметричной точкѣ a'; оба же симметричные шара огибаются совокупностью (сферою) векторіальныхъ шаровъ, имѣющихъ центры въ плоскости симметріи, то есть прямоугольно пересѣкающихъ эту плоскость, а также совокупностью (сферою же) векторіальныхъ шаровъ, касающихся къ одному шару извнѣ, а къ другому извнутри и пересѣкающихъ плоскость симметріи подъ постояннымъ угломъ [1]). Въ составъ первой совокупности входятъ и плоскости, огибающія касательный къ шарамъ цилиндръ; въ составъ второй входятъ и плоскости, огибающія конусъ, центръ коего находится въ плоскости симметріи и есть центръ *обратнаго равенства пары шаровъ*.

Отсюда слѣдуетъ, что въ реципрочной поверхности всякому касательному въ произвольной ея точкѣ a шару соотвѣтствуетъ другой касательный шаръ (реципрочный съ первымъ) въ реципрочной точкѣ a' той же поверхности; оба шара огибаются двумя сферами шаровъ, изъ коихъ шары одной прямоугольно пересѣкаютъ реципрочный шаръ O, а шары другой пересѣкаютъ его поверхность подъ постояннымъ угломъ. Въ составъ какъ той, такъ и другой сферы входятъ и шары, проходящіе чрезъ центръ реципрочнаго шара; ясно, что эти особые шары первой совокупности есть не что иное какъ центральныя плоскости, огибающія конусъ, описанный около обоихъ реципрочныхъ шаровъ.

Шаровъ, касательныхъ къ поверхности въ данной точкѣ, мы можемъ взять линейную приму, радикальная плоскость которой есть плоскость, касательная къ поверхности въ той же точкѣ. Въ составѣ этихъ шаровъ будетъ находиться и шаръ, проходящій чрезъ ту произвольную точку, которая принята за центръ реципрочнаго преобразованія.

Также и къ реципрочной поверхности въ ея гомологичныхъ двухъ точкахъ, въ каждой отдѣльности, можемъ провести приму касательныхъ шаровъ, и шары каждой изъ этихъ примъ гомологичны какъ другъ другу по парно, такъ и шарамъ, касательнымъ къ преобразуемой поверхности въ ея двухъ симметричныхъ точкахъ. Но радикальныя плоскости этихъ примъ уже не будутъ гомологичны: радикальнымъ плоскостямъ (то есть касательнымъ) въ преобразуемой поверхности будутъ гомологичны касательные шары реципрочной поверхности, проходящіе чрезъ центръ шара преобразованія, и обратно, радикальнымъ, (то есть касательнымъ) плоскостямъ къ реципрочной поверхности гомологичны шары, касательные къ преобразуемой поверхности, проходящіе чрезъ центръ шара R.

[1]) Какъ сфера, принадлежащая линейной терціи второго разряда ср. стр. 106.

Преобразуемая поверхность можетъ обладать и не одною, а нѣсколькими плоскостями симметріи. Каждой изъ этихъ плоскостей гомологиченъ реципрочный шаръ, проходящій чрезъ центръ шара преобразованія. Въ особомъ частномъ случаѣ шара имѣется линейная секунда плоскостей симметріи, проходящихъ чрезъ центръ шара. Шаръ преобразуется въ шаръ же, а потому изъ терціи шаровъ, проходящихъ чрезъ центръ шара R, имѣется секунда шаровъ, прямоугольно пересѣкающихъ преобразованный шаръ совершенно произвольнаго положенія въ пространствѣ. Шары этой секунды пересѣкаются въ одной точкѣ внутри этого шара, и эта точка есть точка, гомологичная центру преобразуемаго шара. Ясно, что полученная линейная секунда реципрочныхъ шаровъ, имѣетъ своею осью прямую, проходящую чрезъ двѣ постоянныя точки, а именно: центръ шара преобразованія и найденную точку внутри преобразованнаго шара.

Вообще, сколько плоскостей симметріи имѣется въ преобразуемой поверхности, столько въ реципрочной поверхности имѣется реципрочныхъ шаровъ то есть шаровъ, которые мы можемъ принять за ортогональные для этой поверхности.

Напр. въ поверхности реципрочной изъ эллипсоида или изъ двуполаго гиперболоида имѣется три реципрочные шара, а въ поверхности, преобразованной изъ параболоида, имѣется всего два реципрочные шара; въ обоихъ случаяхъ эти шары прямоугольно пересѣкаютъ другъ друга, такъ какъ взаимно перпендикулярны плоскости симметріи.

Тамъ, гдѣ имѣется центръ симметріи, опредѣляемый пересѣченіемъ не меньше чѣмъ трехъ плоскостей симметріи, въ реципрочной поверхности имѣется особая точка, преобразованная изъ этого центра. Напр. въ поверхности реципрочной изъ эллипсоида такая точка есть точка пересѣченія трехъ реципрочныхъ шаровъ.

Какому бы реципрочному преобразованію мы ни подвергли реципрочную поверхность, ея коренныя свойства, обусловленныя упомянутыми позиціонными построеніями, сохраняются, почему совокупность такихъ поверхностей естественно объединить въ одну группу, связанную однимъ названіемъ. Въ частности, число реципрочныхъ ея шаровъ и ихъ взаимное положеніе остается постояннымъ. Напр. въ поверхностяхъ, реципрочныхъ изъ эллипсоида всегда имѣется три прямоугольно пересѣкающіе другъ друга реципрочные шара.

Но при реципрочномъ преобразованіи шары и круги преобразуются въ шары же и круги: а потому, если въ поверхности имѣются круговыя сѣченія, то таковыя имѣются и въ преобразованныхъ реципрочныхъ поверхностяхъ.

Сюда относятся, между прочимъ, всѣ кривыя поверхности втораго порядка. Въ этомъ отношеніи ихъ можно раздѣлить на двѣ группы.

Къ одной группѣ относятся поверхности съ двумя примами круговыхъ сѣченій въ параллельнымъ плоскостяхъ. Къ этой группѣ относятся эллипсоидъ, двуполый гиперболоидъ и параболоидъ то есть поверхности, коллинеарныя съ шаромъ.

Къ другой группѣ относятся поверхности линейчатыя, въ частности конусы, въ которыхъ, кромѣ такихъ сѣченій имѣются еще по примѣ прямыхъ линій, какъ круговъ безконечно-большого діаметра.

Соотвѣтственно этому, въ реципрочныхъ поверхностяхъ второго порядка (какъ мы ихъ условно можемъ назвать) также можемъ различать двѣ группы; въ одной изъ нихъ имѣется только пара примъ круговыхъ сѣченій, опредѣляемая тѣмъ, что всѣ они принадлежатъ двумъ линейнымъ примамъ шаровъ проходящихъ чрезъ центръ шара преобразованія, то, есть въ нихъ реципрочная поверхность пересѣкается съ этими примами шаровъ; въ другой, кромѣ такихъ примъ имѣется еще одна прима круговыхъ сѣченій, проходящихъ чрезъ центръ шара преобразованія. Для реципрочныхъ конусовъ всѣ эти круги пересѣкаются еще въ одной точкѣ, гомологичной центру конуса и образуютъ циклъ круговъ (циклиду).

Какъ въ кривыхъ поверхностяхъ второго порядка въ частныхъ случаяхъ круговыя сѣченія сливаются въ одну приму, такъ и въ соотвѣтственныхъ реципрочныхъ поверхностяхъ. Отсюда видимъ, что если въ послѣднихъ имѣется лишь одна прима круговыхъ сѣченій, то это означаетъ, что онѣ преобразованы изъ поверхностей вращенія второго порядка.

Понятно, что это имѣетъ мѣсто нетолько по отношенію къ поверхностямъ второго порядка, но и по отношенію ко всѣмъ вообще поверхностямъ вращенія, то есть реципрочныя поверхности изъ поверхностей вращенія пересѣкаются одною примою круговыхъ сѣченій; но въ послѣднихъ имѣется уже безконечное-множество реципрочныхъ шаровъ, соотвѣтственно безконечному множеству плоскостей симметріи поверхностей вращенія. Всѣ эти реципрочные шары составляютъ одну линейную приму шаровъ, пересѣкающихся въ одномъ кругѣ, проходящемъ чрезъ центръ шара преобразованія. Всѣ эти шары необходимо пересѣкаютъ круги примы прямоугольно.

Выведемъ уравненія реципрочныхъ кривыхъ,

представляющихъ кривыя второго порядка въ геометріи гармоническихъ отрѣзковъ то есть ихъ квадратичныя примы.

Съ этою цѣлью можно, написавъ общее уравненіе второго порядка, произвести преобразованіе обратными радіусами выражаемыхъ имъ точекъ и принять послѣднія за среднія точки отрѣзковъ.

Итакъ нужно найти выраженія для x_1 и y_1 въ уравненіи

$$Ax_1^2+Bx_1y_1+Cy_1^2+Dx_1+Ey_1+F=0. \quad 1)$$

Означимъ *координаты преобразованныхъ точекъ* чрезъ x и y, а координаты концовъ отрѣзковъ, для которыхъ эти точки есть среднія, чрезъ X и Y.

Ясно, что $y:x=y_1:x_1$ и $(x^2+y^2)\,(x_1^2+y_1^2)=R^4$

Отсюда $x_1=\frac{R^2x}{x^2+y^2}$ и $y_1=\frac{R^2y}{x^2+y^2}$ а)

Преобразуя новыя координаты въ полярныя, найдемъ $x=v\cos\alpha$; $y=v\sin\alpha$; $x^2+y^2=v^2$, гдѣ v координата средней точки. Но раньше [1]) было выведено, что $v=\frac{R^2+W^2}{2W}$, гдѣ W полярныя координаты концовъ отрѣзка.

Имѣя еще $X=W\cos\alpha$; $Y=W\sin\alpha$; $X^2+Y^2=W^2$, легко найдемъ окончательно

$$x_1=\frac{2R^2X}{R^2+X^2+Y^2} \text{ и } y_1=\frac{2R^2Y}{R^2+X^2+Y^2} \quad 2)$$

Если вмѣсто кривой 1) возьмемъ прямую $x_1=d$, то, подставляя значеніе изъ 2), получимъ

$$d\,(R^2+X^2+Y^2)=2R^2X,$$

что и выражаетъ уравненіе круга, прямоугольно пересѣкающаго шаръ O.

Въ общемъ случаѣ изъ 1) получаемъ

$$AX^2.4R^4+BXY.4R^4+CY^2.4R^4+DX.2R^2(R^2+X^2+Y^2)+EY.2R^2\,(R^2+X^2+Y^2)+F(R^2+X^2+Y^2)^2=0. \quad 3)$$

Располагая по убывающимъ степеняхъ X, получимъ

$$X^4F+X^3.2DR^2+X^2\,2\,(FY^2+ER^2Y+FR^2+2AR^4)+X.2R^2(DY^2+2BR^2Y+DR^2)+FY^4+2ER^2Y^3+2R^2\,(2CR^2+F)\,Y^2+2ER^4Y+FR^4=0. \quad 3')$$

Какъ видимъ, эти реципрочныя кривыя второго порядка для геометріи точекъ представляютъ кривыя четвертаго порядка.

Взявъ въ этомъ уравненіи $Y=0$, мы получимъ уравненіе четвертой степени относительно X, рѣшеніе котораго даетъ вообще четыре точки пересѣченія кривой съ осью абсциссъ. Если раздѣлимъ уравненіе на F, чтобы членъ высшей степени имѣлъ коефиціентомъ 1-цу, найдемъ для послѣдняго члена, выражающаго произведеніе корней, величину R^4, какъ иначе быть не можетъ для реципрочной кривой.

Такъ какъ координаты взяты въ общемъ видѣ, такъ что абсцисса не имѣетъ спеціальнаго положенія по отношенію къ кривой, то упомянутыя свойства общи всѣмъ прямымъ, проходящимъ чрезъ центръ O.

[1]) См. форм. 1) стр. 154.

Эта кривая пересѣкается въ четырехъ точкахъ (въ общемъ случаѣ) нетолько этими радіусами, но также и кругомъ радіуса R.

Для точекъ такого круга имѣемъ $X^2+Y^2=R^2$, а потому въ уравненіи 3) множитель $(R^2+X^2+Y^2)$ приметъ величину $2R^2$. Сдѣлавъ остальныя подстановки, чтобы выразить Y въ X, получимъ окончательно кривую четвертаго же порядка

$$[X^2(A-C)+DX+F]^2=(R^2-X^2)\,(B^2X^2+2BEX+E^2).$$

Мы видѣли выше, что каждую поверхность и каждую кривую, симметричную относительно нѣкоторой плоскости, можно преобразовать въ реципрочную, взявъ совершенно произвольный шаръ преобразованія.

Чтобы привести какой-нибудь простѣйшій примѣръ, преобразуемъ эллипсъ, симметричный относительно нѣкоторой ординаты $y=d$. Въ простѣйшемъ видѣ его уравненіе будетъ $\left(\frac{x_1-d}{a^2}\right)^2+\frac{y_1^2}{b^2}=1$ или $b^2x_1^2+a^2y_1^2-2db^2x_1+b^2\,(d^2-a^2)=0$

Для преобразованія по шару O служатъ равенства а). Произведя вытекающія изъ нихъ замѣщенія, получимъ

$$b^2R^4x^2+a^2R^4y^2-2db^2R^2x\,(x^2+y^2)+b^2\,(d^2-a^2)\,(x^2+y^2)^2=0. \quad 4)$$

Располагая по убывающимъ степенямъ x, получимъ

$$b^2(d^2-a^2)\,x^4-2db^2R^2x^3+b^2[(d^2-a^2)y^2+R^4]x^2-2db^2R^2y^2x+b^2(d^2-a^2)y^4+a^2R^4y^2=0 \quad 4')$$

Но въ частномъ случаѣ, когда $a=b$ то есть когда эллипсъ становится кругомъ, уравненіе 4) сокращается на множитель $a^2\,(x^2+y^2)$ и тоже становится уравненіемъ круга

$$R^4-2dR^2x+(d^2-a^2)\,(x^2+y^2)=0 \text{ или}$$

$$(x^2+y^2)\,\frac{d^2-a^2}{R^2}-2dx+R^2=0 \quad 5)$$

Изъ всего изложеннаго видно, что какъ кривая 4), такъ и кругъ 5) реципрочны относительно шара, имѣющаго центръ на оси абсциссъ въ точкѣ $x=\frac{R^2}{2d}$ и радіусъ той же величины.

Вообще всякая кривая $F(x_1, y_1)=0$, симметричная относительно прямой p преобразуется въ кривую $F\left(\frac{R^2x}{R^2+x^2+y^2}, \frac{R^2y}{R^2+x^2+y^2}\right)=0$, реципрочную по отношенію къ кругу, преобразованному изъ прямой p