

14. Объ одномъ преобразованіи элиптическихъ интеграловъ.

И. П. Долбни.

(Доложено 10 сентября 1907 г.).

§ 1. Разсмотримъ элиптическій интегралъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4}} = u.$$

Положимъ

$$\sqrt{x^4 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4} = -x^2 - \alpha + \lambda z \qquad (1).$$

При

$$x = \infty$$

имѣемъ

$$\sqrt{1 + \frac{6a_2}{x^2} + \frac{4a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4}} + 1 + \frac{\alpha}{x^2} = \frac{\lambda z}{x^2},$$

$$\lim \frac{\lambda z}{x^2} = 2.$$

Полагая

$$\lim \frac{z}{x^2} = 1,$$

имѣемъ

$$\lambda = 2.$$

Такъ какъ преобладающій членъ въ разложеніи $x = \infty$ по степенямъ u есть u^{-1}, то преобладающій членъ въ разложеніи $z = \infty$ по степенямъ u долженъ быть u^{-2}. Отсюда слѣдуетъ, что если преобразованіе (1) возможно, при условіи, что z есть монодромная функція u, то мы должны имѣть

$$\int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4}} = \int_{\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}} \qquad (2),$$

$$z = \rho\ (u,\ g_2,\ g_3).$$

Положимъ

$$x^4 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Полагая, что при

$$x = x_1$$

будетъ

$$z = z_1 = \rho\ (w),$$

изъ уравненія (1) имѣемъ

$$(x - x_1)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} + \ldots = -x_1^2 - \alpha + 2\rho(w) + 2\ (u - w)\ \rho'(w) + \ldots\ldots$$

Отсюда видно, что

$$2\rho(w) = x_1^2 + \alpha \qquad (3)$$

Кромѣ того изъ уравненія

$$\int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}} = u$$

слѣдуетъ, что въ смежности съ $x - x_1 = 0$ имѣетъ мѣсто разложеніе $(x - x_1)$ по степенямъ u съ преобладающимъ членомъ

$$\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}\right]^2 (u - w)^2;$$

поэтому

$$\frac{2\rho'(w)}{\sqrt{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)};$$

слѣдовательно

$$4\rho'(w) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) = 1$$
$$4x^3{}_1 + 12a_2x_1 + 4a_3,$$

или

$$4\rho^3(w) - g_2\rho(w) - g_3 = (x_1^3 + 3a_2x_1 + a_3)^2,$$

или

$$x_1^6 + (12a_2 - 3\alpha)x_1^4 - 4a_3x_1^3 + (18a_2^2 - 3\alpha^2 - g_2)x_1^2 + 12a_2a_3x_1 + 2a_3^2 - \alpha^3 - g_2\alpha - 2g_3 = 0.$$

Такъ какъ это равенство справедливо для

$$x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,$$

то, раздѣляя лѣвую часть на

$$x_1^4 + 6a_2x_1^2 + 4a_3x_1 + a_4$$

и приравнявъ нулю коеффиціенты остатка отъ этого дѣленія, найдемъ

$$\alpha = a_2,$$
$$g_2 = 3a_2^2 + a_4,$$
$$g_3 = a_2a_4 - a_2^3 - a_3^2.$$

§ 2. Разсмотримъ теперь тѣ значенія аргумента u, для которыхъ

$$\rho'(u) = 0,$$

т. е.

$$\rho(u) = e_1,\ \rho(u) = e_2,\ \rho(u) = e_3$$
$$u = \omega,\ u = \omega',\ u = \omega + \omega'.$$

Разлагая обѣ части уравненія

$$\sqrt{x^4+6a_2x^2+4a_3x+a_4}+x^2=2\rho(u)-a_2$$

въ ряды въ смежности съ

$$u=\omega,$$

гдѣ ω одно изъ трехъ значеній

$$\omega,\ \omega',\ \omega+\omega',$$

получимъ

$$\sqrt{f(\xi)}+\xi^2+\left[\frac{2(\xi^3+3a_2\xi+a_3)}{\sqrt{f(\xi)}}+2\xi\right](x-\xi)+\ldots$$
$$=2e-a_2+\tfrac{1}{2}(u-\omega)^2\rho''(\omega)+\ldots\ldots$$

Такъ какъ

$$f(\xi)=\xi^4+6a_2\xi^2+4a_3\xi+a_4,$$

то мы должны имѣть

$$\xi^3+3a_2\xi+a_3=-\xi\sqrt{f(\xi)}, \tag{5}$$
$$\sqrt{f(\xi)}=-\xi^2+2e-a_2,$$

т. е.
$$a_3+2(a_2+e)\xi=0.$$

Перемножая уравненія

$$a_3+2(a_2+e_1)\xi=0,$$
$$a_3+2(a_2+e_2)\xi=0,$$
$$a_3+2(a_2+e_3)\xi=0,$$

получимъ

$$(8a_2^3-2a_2g_2+2g_3)\xi^3+(12a_2^2-g_2)a_3\xi^2+6a_2a_3^2\xi+a_3^3=0 \tag{6}$$

Уравненіе (5) даетъ

$$a_3^2+6a_2a_3\xi+(9a_2^2-a_4)\xi^2-2a_3\xi^3=0.$$

Уравненія (6) и (7) должны быть тождественны поэтому

$$g_2=3a_2^2+a_4,$$
$$g_3=-a_3^2-a_2^3+a_2a_4.$$

Получили тѣ же, что и выше, результаты.

§ 3. Изъ уравненія (3) имѣемъ

$$2\Sigma\rho(w)=4a_2+\Sigma x_1^2=-8a_2,$$
$$\Sigma\rho(w)=-4a_2,$$
$$\Sigma\rho^2(w)=-13a_2^2-a_4,$$
$$\Sigma\rho^3(w)=6a_3^2-31a_2^3+3a_2a_4,$$
$$\Sigma\rho^4(w)=-24a_2a_3^2+78a_2^4-\tfrac{15}{2}a_2^2a_4+\tfrac{1}{2}a_4^2.$$

Отсюда видно, что $\rho(w)$ опредѣляется уравненіемъ 4-й степени

$$\rho^4(w)+4a_2\rho^3(w)+\tfrac{1}{2}g_2\rho^2(w)+(2g_3-a_2g_2)\rho(w)+$$
$$+(\tfrac{1}{16}g_2^2-a_2g_3)=0.$$

Откуда

$$-a_2=\frac{\rho^4(w)+\frac{1}{2}g_2\rho^2(w)+2g_3\rho(w)+\frac{1}{16}g_2^2}{4\rho^3(w)-g_2\rho(w)-g_3}.$$

Отсюда видно, что

$$-a_2=\rho(2w),$$
$$\rho'^2(2w)=a_3^2$$