Записки Ленинградского Горного института, т. X, вып. 1. 1935
Annales de l'Institut des Mines à Leningrade, vol. X, livr 1. 1935

О теореме Weierstrass'a-Routh'a

Проф. К. В. Меликов

Ueber das Theorem von Weierstrass und Routh

Prof. K. V. Melikov

Как известно, [1] Лагранж в своей «Аналитической механике» при изложении теории малых колебаний системы точек допустил неправильное утверждение, что при кратности корней характеристического уравнения в решении всегда появляются члены, содержащие целые степени времени t вне знаков синуса и косинуса. Ошибочность этого утверждения была указана в 1858 г. Вейерштрассом, [2] рассматривавшим, однако, только частный случай системы уравнений, содержащих члены с производными второго порядка и члены линейные относительно искомых функций. Рауз в своем трактате об устойчивости движения [3] рассмотрел общий случай уравнений, содержащих также члены с первыми производными.

Настоящая заметка посвящена этому же вопросу. Не содержа существенно новых результатов, она имеет целью дать исчерпывающее исследование условий, при которых в решении системы линейных однородных уравнений 2-го порядка самого общего вида отсутствуют так называемые вековые члены. В основе лежит метод Коши интегрирования линейных уравнений, т. е. тот самый метод, который применил Вейерштрасс при изучении упомянутого выше частного случая. Преимущество этого способа — в его естественности: мы ищем выражения коэфициентов в общем интеграле системы и, приравнивая их нулю, получаем искомые условия.

Одно обстоятельство дает основание думать, что возвращение к доказательству теоремы Вейерштрасса-Рауза может представлять известный интерес. В вышедшей недавно в русском переводе книге Вебстера и Сеге «Диференциальные уравнения в частных производных математической физики» на стр. 117, 118 рассматривается система линейных уравнений с постоянными коэфициентами того самого вида, который рассматривал Вейерштрасс, и в выноске говорится: [4] «Случай, когда корни равны между собой, подлежит особому исследованию. Постоянные A_r в этом случае должны быть заменены в уравнениях (58) полиномами, зависящими от t. См. Weierstrass, Math. Werke, т. I, стр. 233».

---

[1] См. А. Н. Крылов, О некоторых диференциальных уравнениях математической физики и т. д. Изд. 2, Л. 1932, гл. I, § 11, стр. 42.

[2] Weierstrass, Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem, nebst Anwendung desselben auf die Theorie der kleinen Schwingungen. Monatsber. d. K. Ak. d. Wiss., 1858; Werke, Bd. I. 233—246.

[3] Routh, A treatise on the stability of a given state of motion. London, 1877, p. 8. См. также Thomson and Tait, Natural Philosophy, P. I, p. 376.

[4] В подлиннике изд. 1927 г. этой выноски нет.

Таким образом спустя 75 лет после появления в свет работы Вейерштрасса в книге, предназначенной быть учебным руководством, повторяется ошибка Лагранжа, но при этом она как бы приписывается Вейерштрассу.

Теорема Рауза гласит:

«В том случае, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни, признаком того, что в выражения x, y, ... и т. д. не войдут члены, содержащие t множителем, является следующее: если корень двукратный, все миноры 1-го порядка должны обращаться в нуль, если корень трехкратный, то в нуль должны обращаться миноры как первого, так и второго порядка и т. д. В этих случаях кратные корни вводят только соответствующую неопределенность в коэфициенты.

Пусть дана система n линейных диференциальных уравнений 2-го порядка

$$\begin{aligned}
&a_{11}\ddot{x}_1 + a_{12}\ddot{x}_2 + \ldots + a_{1n}\ddot{x}_n + b_{11}\dot{x}_1 + b_{12}\dot{x}_2 + \ldots + b_{1n}\dot{x}_n + \\
&\qquad + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = 0, \\
&a_{21}\ddot{x}_1 + a_{22}\ddot{x}_2 + \ldots + a_{2n}\ddot{x}_n + b_{21}\dot{x}_1 + b_{22}\dot{x}_2 + \ldots + b_{2n}\dot{x}_n + \\
&\qquad + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = 0, \\
&\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{n1}\ddot{x}_1 + a_{n2}\ddot{x}_2 + \ldots + a_{nn}\ddot{x}_n + b_{n1}\dot{x}_1 + b_{n2}\dot{x}_2 + \ldots + b_{nn}\dot{x}_n + \\
&\qquad + c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots + c_{nn}x_n = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

которую мы для краткости будем писать под видом:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}\ddot{x}_j + b_{ij}\dot{x}_j + c_{ij}x_j) = 0 \tag{1$_1$}$$

$$(i = 1, 2, \ldots n).$$

Введем обозначение

$$a_{ij}\lambda^2 + b_{ij}\lambda + c_{ij} = (ij),$$

тогда характеристическое уравнение системы будет:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (11), & (12), & \ldots & (1n) \\ (21), & (22), & \ldots & (2n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (n1), & (n2), & \ldots & (nn) \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

$\Delta(\lambda)$ — целая функция относительно λ степени $2n$.

Обозначим через $[ij]$ минор первого порядка, получающийся от вычеркивания i-ой строки и j-ого столбца; это целая функция степени $2n-2$. Аналогичное обозначение введем для миноров 2-го порядка, именно $[ij, kl]$ будет обозначать минор, получающийся при вычеркивании i-ой и k-ой строки и j-ого и l-ого столбца.

Из теории определителей мы имеем n^2 соотношений:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} (ij)\,[ij],$$

$$0 = \sum_{j=1}^{n} (ij)\,[1j] = \sum_{j=1}^{n} (ij)\,[2j] = \ldots = \sum_{j=1}^{n} (ij)\,[i-1\,j] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (ij)\,[i+1\,j] = \ldots = \sum_{j=1}^{n} (ij)\,[nj] \tag{3}$$

$$(i = 1, 2, \ldots n).$$

Корни уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ назовем через $a, b, \ldots k, \ldots m$, а их кратности соответственно через $\alpha, \beta, \ldots \varkappa, \ldots \mu$, так что $\alpha + \beta + \ldots + \mu = 2n$.

Взяв $2n$ произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots C_n; C'_1, C'_2 \ldots C'_n$ и рассматривая λ как комплексную переменную, мы можем представить общий интеграл системы (1) под видом

$$x_j = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\sum_{l=1}^{n} \{(C_l\lambda + C'_l)[lj]\}}{\Delta(\lambda)} e^{\lambda t} d\lambda \quad (j = 1, 2, \ldots n), \tag{4_1}$$

где интегрирование производится по замкнутому контуру, заключающему внутри себя все корни функции $\Delta(\lambda)$. В этом убеждаемся непосредственной подстановкой. Действительно, диференцирование дает:

$$\dot{x}_j = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \lambda \frac{\sum_{l=1}^{n} \{(C_l\lambda + C'_l)[lj]\}}{\Delta(\lambda)} e^{\lambda t} d\lambda, \tag{4_2}$$

$$\ddot{x}_j = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \lambda^2 \frac{\sum_{l=1}^{n} \{(C_l\lambda + C'_l)[lj]\}}{\Delta(\lambda)} e^{\lambda t} d\lambda. \tag{4_3}$$

Подставляем в i-ое уравнение. Для этого умножаем (4_1), (4_2) и (4_3) соответственно на c_{ij}, b_{ij}, a_{ij} и суммируем по j:

$$\Delta_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\sum_{l=1}^{n} \{(C_l\lambda + C'_l) \sum_{j=1}^{n} (ij)[lj]\}}{\Delta(\lambda)} e^{\lambda t} d\lambda.$$

В силу (3) все суммы $\sum_{j=1}^{n} (ij)[bj]$ кроме одной, соответствующей $l = i$, обращаются в нуль и потому

$$\Delta_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int (C_i\lambda + C'_i) e^{\lambda t} d\lambda,$$

но подинтегральная функция целая на всей плоскости и следовательно $\Delta_i = 0$, т. е. выражения (4_1) удовлетворяют предложенной системе, а так как они содержат $2n$ произвольных постоянных, то они представляют общий интеграл. [1]

Теперь вычисление x-ов свелось к вычислению интегралов от функций комплексного переменного, т. е. к вычислению полного вычета подинтегральной функции. По обозначению Cauchy напишем

$$x_j = E \frac{\sum_{l=1}^{n} \{(C_l\lambda + C'_l)[lj]\}}{\Delta(\lambda)} e^{\lambda t}.$$

---

[1] Можно заметить, что если бы в уравнениях (1) отсутствовали члены, содержащие $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots \dot{x}_n$, и эти уравнения были решены относительно величин $\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ldots \ddot{x}_n$, то постоянные, аналогичные постоянным C_i и C'_i, были бы соответственно равны значениям x_i и $\dot{x}_i$ при $t = 0$. В рассматриваемом общем случае это не будет так, но $C_1, C_2, \ldots C_n$ будут линейными функциями начальных значений x_i, а $C'_1, C'_2, \ldots C'_n$ — линейными функциями начальных значений $\dot{x}_i$, коэфициенты которых будут линейно же зависеть от постоянных $C_1, C_2, \ldots C_n$.

Убедиться в этом можно непосредственным вычислением интегралов в (4_1) и (4_2), положив в них $t = 0$. Числители подинтегральных функций будут соответственно степеней $2n-1$ и $2n$ относительно λ, поэтому в выражение $x_i(0)$ войдут только коэфициенты при λ^{2n-1} в числителе, а в выражение для $\dot{x}_i(0)$ — коэфициенты при λ^{2n} и λ^{2n-1} в числителе. Первые два из этих коэфициентов представляют линейные функции постоянных $C_1, C_2, \ldots C_n$, а последний — линейную функцию всех $2n$ постоянных $C_1, C_2, \ldots C_n; C'_1, C'_2, \ldots C'_n$, откуда и можно вывести указанное свойство постоянных C_i и C'_i.

Будем искать вычет, соответствующий корню k, т. е.

$$E_k \frac{\sum_{l=1}^{n} \{(C_l\lambda + C_l')[lj]\}}{\Delta(\lambda)} e^{\lambda t}.$$

Обозначая для краткости письма сумму, стоящую в числителе, через $f_j(\lambda)$, мы получим в области корня k разложение

$$\frac{f_j(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{K_\varkappa^j}{(\lambda-k)^\varkappa} + \frac{K_{\varkappa-1}^j}{(\lambda-k)^{\varkappa-1}} + \ldots + \frac{K_1^j}{\lambda-k} + E_{jk}, \tag{5}$$

где E_{jk} — функция целая относительно $\lambda - k$. Верхние значки у букв K символизируют что мы имеем разложение, относящееся к переменной x_j, а нижние соответствуют степени знаменателя. Замечая далее, что

$$e^{\lambda t} = e^{kt} e^{(\lambda-k)t} = e^{kt}\left[1 + (\lambda-k)\,t + \frac{(\lambda-k)^2}{2!}\,t + \ldots\right],$$

мы получим:

$$\frac{f_j(\lambda)}{\Delta(\lambda)} e^{\lambda t} = e^{kt}\left[\frac{K_\varkappa^j}{(\lambda-k)^\varkappa} + \frac{K_{\varkappa-1}^j}{(\lambda-k)^{\varkappa-1}} + \ldots + \frac{K_1^j}{\lambda-k} + E_{jk}'\right].$$

Следовательно

$$E_k \frac{f_j(\lambda)}{\Delta(\lambda)} e^{\lambda t} =$$

$$= e^{kt} K_1^j = e^{kt}\left[K_1^j + K_2^j t + \frac{1}{2!} K_3^j t^2 + \ldots + \frac{1}{(\varkappa-1)!} K_\varkappa^j t^{\varkappa-1}\right]$$

и общий интеграл может быть представлен под видом

$$x_j = \sum e^{kt}\left[K_1^j + K_2^j t + \frac{1}{2!} K_3^j t^2 + \ldots + \frac{1}{(\varkappa-1)!} K_\varkappa^j t^{\varkappa-1}\right], \tag{6}$$

$$(j = 1, 2, \ldots n)$$

где сумма распространяется на все корни a, b, $\ldots$ k, $\ldots$ m характеристического уравнения, соответственно чему коэфициенты K заменяются коэфициентами A, B, $\ldots$ M.

Так как теорема Рауза дает условия, когда в части интеграла (6), соответствующей корню k, отсутствуют члены, содержащие множителем t, то нам надо приравнять коэфициенты K_2^j, K_3^j, $\ldots$ $K_\varkappa^j$, $(j = 1, 2, \ldots n)$ нулю.

Возвращаясь к (4_1) и (5), мы напишем

$$\frac{f_j(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{\sum_{l=1}^{n} \{(C_l\lambda + C_l')[lj]\}}{\Delta(\lambda)} = \frac{K_\varkappa^j}{(\lambda-k)^\varkappa} + \frac{K_{\varkappa-1}^j}{(\lambda-k)^{\varkappa-1}} + \ldots + \frac{K_1^j}{\lambda-k} + E_{jk},$$

и для вычисления коэфициентов K воспользуемся известными формулами [1]

$$\frac{K_\varkappa^j \Delta^{(\varkappa)}(k)}{\varkappa!} = f_j(k),$$

$$\frac{K_{\varkappa-1}^j \Delta^{(\varkappa)}(k)}{\varkappa!} + \frac{K_\varkappa^j \Delta^{(\varkappa+1)}(k)}{(\varkappa+1)!} = f_j'(k),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{K_1^j \Delta^{(\varkappa)}(k)}{\varkappa!} + \frac{K_2^j \Delta^{(\varkappa+1)}(k)}{(\varkappa+1)!} + \ldots + \frac{K_\varkappa^j \Delta^{(2\varkappa-1)}(k)}{(2\varkappa-1)!} = \frac{f_j^{(\varkappa-1)}(k)}{(\varkappa-1)!}.$$

Решать однако эти уравнения относительно K нет надобности. Замечая, что низшая

[1] Знаками $'$, $''$, $\ldots$ $^{(\varkappa)}$ обозначены производные по λ в отличие от производных по t, которые обозначены точками.

производная Δ, входящая в эти уравнения, порядка $\varkappa$, т. е. уже не обращается в нуль при $\lambda = k$, мы заключаем, что, положив в них $K_2 = K_3 = \ldots = K_\varkappa = 0$, мы получим условия не только необходимые, но и достаточные. Условия эти, числом $n(\varkappa - 1)$, будут

$$f_j(k) = 0, \quad f_j'(k) = 0, \ldots f_j^{(\varkappa-2)}(k) = 0 \tag{7}$$

$$(j = 1, 2, \ldots n).$$

В силу произвольности C и C', первое из этих условий дает

$$[1j]_k = [2j]_k = \ldots = [nj]_k = 0 \tag{8_1}$$

$$(i = 1, 2, \ldots n),$$

т. е. все миноры первого порядка при $\lambda = k$ (на что указывает подстрочный значок) должны обращаться в нуль.

Второе из условий (7) совместно с (8_1) дает

$$[1j]_k' = [2j]_k' = \ldots = [nj]_k' = 0, \tag{8_2}$$

$$(j = 1, 2, \ldots n)$$

и т. д. Наконец последнее совместно с (8_1), (8_2), ... ($8_{\varkappa-2}$) дает

$$[1j]_k^{(\varkappa-2)} = [2j]_k^{(\varkappa-2)} = \ldots = [nj]_k^{(\varkappa-2)} = 0, \tag{$8_{\varkappa-1}$}$$

$$(j = 1, 2, \ldots n).$$

Остается показать тождественность этих условий с условиями Рауза. Для этого воспользуемся известной из теории определителей формулой:

$$\Delta[pq, rs] = [pq][rs] - [ps][rq]. \tag{9}$$

По нашему предположению Δ содержит множителя $(\lambda - k)^\varkappa$, в силу же условий (8) каждый минор первого порядка содержит множителя $(\lambda - k)^{\varkappa-1}$. Следовательно, правая часть (9) делится на $(\lambda - k)^{2\varkappa-2}$; отсюда следует, что минор $[pq, rs]$ делится на $(\lambda - k)^{\varkappa-2}$; так как это справедливо для любых значений p, q, r, s, то для всех миноров 2-го порядка k является корнем кратности $\varkappa - 2$. Разбиваем теперь все миноры 2-го порядка на n^2 групп, соответствующих n^2 минорам первого порядка; тогда, применяя для каждой из них формулу (9), подставляя только вместо Δ минор 1-го порядка, вместо миноров 1-го порядка — миноры 2-го порядка, мы совершенно так же убедимся, что k должно быть корнем кратности $\varkappa - 3$ для миноров 3-го порядка и т. д. Последние миноры, которые еще должны обращаться в нуль при $\lambda = k$, будут миноры порядка $\varkappa - 1$. Таким образом первая часть теоремы доказана.

Особый интерес представляет тот случай, когда в уравнениях системы (1) все коэфициенты b_{ij} равны нулю, а коэфициенты a_{ij} и c_{ij} подчинены условиям

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad c_{ij} = c_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \ldots n), \tag{10_1}$$

и притом квадратичная форма

$$\Phi = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \tag{10_2}$$

есть форма определенная.

Эти предположения соответствуют случаю малых колебаний при существовании лягранжевой функции

$$L = T + U.$$

В этом случае, как показал Вейерштрасс, члены с множителем t не войдут в выражение общего интеграла независимо ни от каких добавочных условий. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что в рассматриваемом случае все условия Рауза удовлетворяются сами собой, а для этого служит теорема, на которую опирается и Вейерштрасс, гласящая, что при условиях (10) всякий корень кратности $\varkappa$ уравнения $\Delta(\lambda) = 0$

является корнем кратности $\varkappa - 1$ всех миноров 1-го порядка [11], [12], ... [nn]. Действительно, в силу этой теоремы имеют место все равенства (8), а следовательно и равенства (7), и потому члены с t отсутствуют.

Последние слова теоремы Рауза имеют целью показать, что уничтожение членов, содержащих множителем t, не изменит числа произвольных постоянных. Приведенное выше доказательство всецело основано на предположении, что $2n$ величин произвольны. Все коэфициенты A, B, ... K, ... M в общем интеграле, соответствующие корням a, b, ... k, ... m характеристического уравнения, являются функциями этих $2n$ произвольных величин C_i, C_i'; следовательно, $2n$ из них могут считаться произвольными, остальные выразятся через них. Посмотрим, может ли общее число коэфициентов стать меньше $2n$. Если характеристическое уравнение имеет хотя 2 различных корня, то ясно, что в общий интеграл войдет не менее $2n$ коэфициентов. Следовательно надо исследовать, что будет, если все корни характеристического уравнения будут равны между собой. Но в этом случае (как во всех случаях, когда кратность корня больше n) в общий интеграл должны войти члены, содержащие t, [1] потому что обращение в нуль даже всех миноров, до порядка $n - 1$, влечет за собой исчезновение только членов, содержащих t, t^2, ... t^{n-1}. Итак и в этом случае число произвольных постоянных будет не менее $2n$.

Так как в случае, рассмотренном Вейерштрассом, кратность корня характеристического уравнения не может быть больше n, то члены с t никогда не войдут в общий интеграл.

Zusammenfassung

In seiner Abhandlung vom Jahre 1858 hat Weierstrass gezeigt, dass die Behauptung von Lagrange über die Notwendigkeit des Auftretens säkularer Glieder in der Lösung der Gleichungen der kleinen Schwingungen, in dem Fall, wenn die Determinantengleichung vielfache Wurzeln besitzt, irrig sei. Er hat aber nur einen Sonderfall der Differentialgleichungen untersucht.

Routh, dagegen, hat den allgemeinen Fall untersucht und die notwendigen und hinreichenden Bedingungen angegeben, bei denen säkulare Glieder nicht auftreten.

Der vorliegende Aufsatz ist derselben Frage gewidmet; er soll mit Hilfe der Cauchy'schen Methode der Integration linearer Differentialgleichungen über die genannten Bedingungen erschöpfenden Aufschluss geben.

---

[1] Обстоятельство это отмечено Раузом, loc. cit., p. 8.