Записки Ленинградского горного института, т. X, вып. 1. 1935
Annales de l'Institut des Mines à Leningrade, vol. X, livr 1935

Расчет характеристик при дроблении на шаровых мельницах

Доц. А. И. Загустин

Le calcul des charactéristiques du broyage dans un broyeur à boulets

Doz. A. J. Zagoustine

Закон Риттингера

Обычно законом Риттингера называют следующее положение: «Энергия, затраченная на дробление, прямо пропорциональна увеличению поверхности».

Если обозначим: затраченную работу через U, поверхность материала до дробления через S_0 и после дробления через S, то можем записать это в виде соотношения:

$$U = b(S - S_0).$$

Постоянную b, характеризующую дробильный материал, иногда называют коэфициентом поверхностного натяжения.

Для вычисления поверхности материала необходимо знать форму зерен. Можно упростить эти вычисления, если допустить, что зерна геометрически подобны. Это допущение подтверждается опытом, когда мы имеем дело с большим числом зерен.

При наличии подобия вес зерна p будет пропорционален кубу размера r, а поверхность S будет пропорциональна квадрату размера.

Под размером (крупностью, диаметром) мы будем понимать расстояние между двумя характерными точками зерна. Выбор этих точек произволен, однако, выбрав их на одном зерне и следовательно определив его размер, мы определим размер и всех остальных зерен, так как, благодаря подобию формы, выбором двух точек на одном зерне определяются соответствующие точки на других зернах. Например, если зерна имеют форму куба, можно принять за размер длину ребра. Тогда

$$p = \gamma r^3, \quad S = 6r^2,$$

где γ — удельный вес материала.

С таким же правом можно принять за размер куба длину диагонали грани. Тогда

$$p = \frac{\gamma}{2\sqrt{2}} r^3, \quad S = 3r^2.$$

В случае зерен неправильной формы можно положить

$$p = \alpha \cdot \gamma \cdot r^3, \quad S = \beta \cdot r^2,$$

где α и β придется определять экспериментальным путем.

Тогда количество зерен будет равно

$$N = \frac{P}{\gamma} \cdot \frac{1}{ar^3},$$

где P — вес материала и N — число зерен.

Поверхность этих зерен S будет

$$S = \frac{P}{\gamma} \cdot \frac{\beta}{a} \cdot \frac{1}{r}.$$

Обозначив $\frac{\beta}{a} = \mu$ (μ — зависит от формы зерен), получим для поверхности

$$S = \frac{P}{\gamma} \cdot \frac{\mu}{r}.$$

Если мы имеем смесь зерен разных размеров, то для вычисления поверхности необходимо знать характеристику.

Мы в дальнейшем будем пользоваться кумулятивной характеристикой в двух видах: на плюс и на минус.

Характеристикой, построенной на минус, будем называть функцию размера r (или кривую, дающую графическое изображение этой функции), дающую для каждого значения r содержание (по весу) зерен меньших r. Условимся обозначать ее

$$K(r).$$

Характеристикой, построенной на плюс, будем соответственно называть содержание зерен большего размера, чем r. Условимся обозначать ее

$$L(r).$$

Характеристики будем относить к единице веса.

Размер самого крупного зерна будем обозначать через R.

Очевидно:

$$K(r) + L(r) = 1,$$
$$K(0) = 0, \quad K(R) = 1,$$
$$L(0) = 1, \quad L(R) = 0.$$

Зная характеристику и значение μ для данного материала, не трудно вычислить поверхность. Выделим из смеси все зерна, размер которых лежит в пределах

$$r, \quad r + \Delta r,$$

где Δr — малая величина, например соответствующая разнице отверстий двух последовательных сит.

Если вес материала P, то вес этого класса

$$P \cdot \{K(r + \Delta r) - K(r)\},$$
$$P \cdot \{L(r) - L(r + \Delta r)\}$$

или приближенно

$$P \frac{dK}{dr} \Delta r,$$

$$-P \frac{dL}{dr} \Delta r.$$

Поверхность выделенного класса, по вышеизложенному, будет

$$\frac{P}{\gamma} \mu \frac{dK}{dr} \frac{\Delta r}{r},$$

$$-\frac{P}{\gamma} \mu \frac{dL}{dr} \frac{\Delta r}{r}.$$

Поверхность всей смеси равна сумме поверхностей отдельных классов, или приближенно ее можно записать в виде интеграла

$$S = \frac{P}{\gamma}\,\mu \cdot \int_0^R \frac{dK}{dr}\,\frac{dr}{r} = \frac{P}{\gamma}\,\mu \int_R^0 \frac{dL}{dr}\,\frac{dr}{r}.$$

Для закона Риттингера мы имели соотношение

$$U = b(S - S_0).$$

Рассматривая работу в единицу времени (мощность) и обозначая ее через W, получим

$$W = b\,\frac{dS}{dt}.$$

Измерения мощности, потребляемой на дробление мельницей (с вычетом мощности холостого хода), дают величину чрезвычайно мало меняющуюся.

Мы в дальнейшем будем считать, что мощность, потребная на дробление (она не совпадает с мощностью, потребляемой мельницей), постоянна, т. е.

$$\frac{dS}{dt} = \text{const},$$

и этим видоизменением закона Риттингера для мельниц будем пользоваться в дальнейшем.

Статическая характеристика

Общий недостаток существующих теорий дробления (Риттингера, Кика) заключается в том, что они не учитывают характера разрушения материала, т. е. не изучают свойств мелочи, которая получается из зерна, когда оно рассыпается при ударе.

Между тем без знания характера разрушения одиночного зерна нельзя ничего сказать об изменении характеристики материала, т. е. о самом существенном эффекте дробления.

Опыт показывает, что в результате удара из одного зерна получается смесь более мелких зерен самых разнообразных размеров.

Поэтому приходится ставить вопрос о характеристике этой смеси.

Эту характеристику мы будем называть статической характеристикой данного материала, отмечая этим, что она характеризует свойства данного материала в отношении разрушения под влиянием одного удара.

Силу удара мы будем считать минимальной, достаточной для разрушения. Тогда результат более сильных ударов мы можем рассматривать как сложное явление, состоящее в последовательном применении элементарных ударов, сначала к исходному зерну, а затем к его обломкам.

Для экспериментального определения статической характеристики можно предложить два метода.

Первый годен для сравнительно крупных кусков минерала. Он заключается в том, что зерно размером в несколько миллиметров разбивается ударом копра с наименьшей возможной высоты.

Второй заключается в дроблении определенного класса зерен в течение малого промежутка времени и отсеве исходного материала.

На основании обработки большого числа опытов можно считать, что, с достаточной для практики точностью, статическая характеристика на минус выражается функцией

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k+1},$$

где r — размер исходного зерна,
ϱ — размер одного из зерен после удара и
k — постоянная, характеризующая данный материал.

Рассмотрим, как связана величина k с увеличением поверхности в результате удара. Поверхность S_0 исходных зерен размера r равна

$$S_0 = \frac{P}{\gamma} \frac{\mu}{r}.$$

Поверхность смеси с характеристикой на минус

$$K(\varrho) = \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k+1}$$

равна

$$S = \frac{P}{\gamma} \mu \int_0^r \frac{dK}{d\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{P}{\gamma} \frac{\mu}{r} \frac{k+1}{k}.$$

Отсюда

$$\frac{S}{S_0} = \frac{k+1}{k}.$$

Из выражения для $\frac{S}{S_0}$ следует, что всегда

$$k > 0.$$

Однако для некоторых минералов, например кварца, k настолько мало отличается от нуля, что мы будем в дальнейшем, при грубом расчете, в качестве первого приближения полагать, что $k = 0$.

Постоянная Риттингера

Помимо изложенного выше, для расчета необходимо знать, как дробятся отдельные классы с течением времени.

В результате изучения ряда опытов дробления на шаровых мельницах при различных условиях и с различным материалом было сделано следующее допущение, достаточно оправдавшее себя на практике: количество дробящегося в единицу времени материала какого-либо класса прямо пропорционально содержанию неиздробленного материала этого же класса в мельнице.

Высказанное положение можно записать, обозначив вес класса через q, в виде

$$\frac{dq}{dt} = -f(r) \cdot q,$$

где коэфициент при q, обозначенный $f(r)$, не зависит от t.

Изучение зависимости $f(r)$ от r показывает, что ее можно считать линейной, т. е. положить

$$f(r) = ar,$$

где a — постоянная, которую мы будем называть постоянной Риттингера, так как она связана с величиной поверхностного натяжения материала.

В самом деле, количество класса размером от r до $r + \Delta r$ равно в данный момент времени

$$P \frac{\partial K}{\partial r} \Delta r.$$

Количество получающейся в единицу времени мелочи от дробления этого класса по вышесказанному

$$P \cdot f(r) \frac{\partial K}{\partial r} \Delta r.$$

Поверхность этой мелочи (подсчитывается по статической характеристике)

$$\frac{P}{\gamma} \mu a \frac{k+1}{k} f(r) \frac{\partial K}{\partial r} \frac{\Delta r}{r}.$$

Поверхность, получающаяся в единицу времени от дробления всех классов,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{P}{\gamma}\,\mu\,\frac{k+1}{k}\int_0^R \frac{\partial K}{\partial r}\,\frac{f(r)}{r}\,dr.$$

При $f(r) = ar$ получаем

$$\frac{dS}{dt} = \frac{P}{\gamma}\mu a\,\frac{k+1}{k}\int_0^R \frac{\partial K}{\partial r}\,dr.$$

Но

$$\int_0^R \frac{\partial K}{\partial r}\,dr = K(R) - K(0) = 1.$$

Следовательно

$$\frac{dS}{dt} = \frac{P}{\gamma}\,\mu a\,\frac{k+1}{k} = \text{const},$$

согласно закону Риттингера в данной выше формулировке для мельниц.

Уравнение дробления

Приведенных выше данных достаточно для вычисления уравнения характеристики материала в зависимости от времени.

Рассмотрим характеристику материала в момент времени t

$$L(r, t).$$

Разделим материал на два класса: мельче некоторого, произвольно выбранного размера r, и крупнее r.

Если вес всего материала P, то увеличение количества мелочи в единицу времени выразится как

$$-P\,\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Знак минус — потому, что при увеличении мелочи характеристика на плюс убывает.

Подсчитаем это увеличение веса мелочи согласно принятым выше рабочим гипотезам. Возьмем класс крупнее r (естественно, что увеличение мелочи может происходить лишь за счет дробления зерен крупнее r), лежащий в пределах от ϱ до $\varrho + \Delta\varrho$.

Вес этого класса

$$-P\,\frac{\partial L}{\partial \varrho}\,\Delta\varrho.$$

Количество материала этого класса, дробящееся в единицу времени, равно

$$-Pa\varrho\,\frac{\partial L}{\partial \varrho}\,\Delta\varrho.$$

Этот продукт дробления имеет характеристику на минус вида

$$\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{k+1}.$$

Следовательно вес зерен размером меньше r, получающихся в единицу времени от дробления класса от ϱ до $\varrho + \Delta\varrho$, равен

$$-Pa\varrho\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{k+1}\frac{\partial L}{\partial \varrho}\,\Delta\varrho.$$

Общий прирост мелочи получим, просуммировав результаты дробления всех классов, размером крупнее r. Получим

$$-Par^{k+1}\int_r^R \frac{\partial L}{\partial \varrho}\,\frac{d\varrho}{\varrho^k}.$$

Сравнивая два выражения для прироста мелочи (отнесенного к единице времени), получаем после сокращения на $-P$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = ar^{k+1} \int_r^R \frac{\partial L}{\partial \varrho} \frac{d\varrho}{\varrho^k}.$$

Это — основное уравнение, служащее для вычисления характеристики в зависимости от времени дробления.

При $t = 0$ функция $L(r, t)$ должна обращаться в характеристику исходного материала $L_0(r)$.

Следовательно для L должны быть выполнены:
начальное условие: $L(r, 0) = L_0(r)$,
граничные условия: $L(0, t) = 1$; $L(R, t) = 0$.

Случай k = 0

Для некоторых материалов коэфициент k, характеризующий рассыпаемость материала при разрушении, весьма мал. Поэтому представляет интерес решение уравнения характеристик для случая, когда $k = 0$.

Положив в основном уравнении

$$\frac{\partial L}{\partial t} = ar^{k+1} \int_r^R \frac{\partial L}{\partial \varrho} \frac{d\varrho}{\varrho^k}$$

вместо k значение 0, получим

$$\frac{\partial L}{\partial t} = ar \int_r^R \frac{\partial L}{\partial \varrho} d\varrho.$$

Но

$$\int_r^R \frac{\partial L}{\partial \varrho} d\varrho = L(R, t) - L(r, t) = -L(r, t)$$

и уравнение принимает вид

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -arL.$$

Отсюда

$$L(r, t) = C(r) \cdot e^{-art}.$$

Определяя произвольную функцию интегрирования из начального условия, получим

$$C(r) = L_0(r),$$

и окончательно решение получает вид

$$L(r, t) = L_0(r) \cdot e^{-art}.$$

Типичный материал, к которому можно применять полученное выражение без опасения большой ошибки, — кварц.

Общее решение

Разделив обе части уравнения характеристик на r^{k+1} и продиференцировав по r, получим после упрощений:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial r \partial t} + ar \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{k+1}{r} \frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

т. е. диференциальное уравнение в частных производных второго порядка гиперболического типа. Введем новую функцию $M(r, t)$ равенством

$$L(r, t) = e^{-art} M(r, t).$$

Легко видеть, что $M(r, t)$ удовлетворяет тем же начальным и граничным условиям, что и $L(r, t)$:

$$M(r, 0) = L_0(r),$$
$$M(0, t) = 1, \quad M(R, t) = 0.$$

Для новой функции получим уравнение

$$\frac{\partial^2 M}{\partial r \partial t} - \left(at + \frac{k+1}{r}\right)\frac{\partial M}{\partial t} + akM = 0.$$

Присоединенное уравнение [1] имеет вид

$$\frac{\partial^2 N}{\partial \varrho \partial \tau} + \left(a\tau + \frac{k+1}{\varrho}\right)\frac{\partial N}{\partial \tau} + a(k+1)N = 0.$$

Надо найти решение присоединенного уравнения, содержащее две произвольных постоянных r, t и удовлетворяющее условиям:

$$\varrho = r, \quad N(r, \tau) = 1,$$
$$\tau = t, \quad N(\varrho, t) = \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{k+1} e^{-at(\varrho - r)}.$$

Положив, что решение присоединенного уравнения имеет вид

$$N(\varrho, \tau) = \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{k+1} e^{-a\tau(\varrho - r)} U(\varrho, \tau; r, t),$$

получим для функции $U(\varrho, \tau; r, t)$ уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varrho \partial \tau} - a(\varrho - r)\frac{\partial U}{\partial \varrho} + akU = 0.$$

Введя переменную z равенством

$$z = a(\varrho - r)(\tau - t),$$

приведем уравнение для U к виду

$$z\frac{d^2 U}{dz^2} + (1 - z)\frac{dU}{dz} + kU = 0.$$

Отыскивая решение этого уравнения в виде ряда, расположенного по степеням z, получим

$$U = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{(n!)^2} z^n,$$

т. е. ряд, который при k, равном целому числу, приводится к полиному степени k.

При

$$\varrho = r$$

и при

$$\tau = t$$

функция U обращается в 1, и следовательно N удовлетворяет поставленным выше условиям на характеристиках диференциального уравнения.

Окончательно решение присоединенного уравнения получает вид

$$N(\varrho, r; \tau, t) = \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{k+1} \cdot e^{-a\tau(\varrho - r)} \cdot U\left(a(\varrho - r)(\tau - t)\right).$$

За кривую, на которой заданы условия Коши, возьмем прямую $\tau = 0$ и прямую $\varrho = R$.

Для данного уравнения конормаль совпадает с кривой.

---

[1] Решение по методу Римана.

Решение уравнения для $M(r,\ t)$ будет

$$M(r,\ t) = L_0(r) + \int_r^R L_0(\varrho)\left(\frac{dN}{d\varrho} + \frac{k+1}{\varrho}\ N\right)_{\tau=0} d\varrho.$$

Но

$$\left(\frac{dN}{d\varrho} + \frac{k+1}{\varrho} N\right)_{\tau=0} = -at\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{k+1}\left(\frac{dU}{dz}\right)_{z=-at(\varrho-r)}.$$

Обозначив

$$-\left(\frac{dU}{dz}\right)_{z=-at(\varrho-r)} = Z(x),$$

где

$$x = at(\varrho - r),$$

получим

$$\left(\frac{dN}{d\varrho} + \frac{k+1}{\varrho}\ N\right)_{\tau=0} = +at\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{k+1} Z(x),$$

и решение для $M(r,\ t)$, удовлетворяющее начальному и одному из граничных условий, именно

$$M(r,\ 0) = L_0(r), \quad M(R,\ t) = 0,$$

будет следующее:

$$M(r,\ t) = L_0(r) + atr^{k+1}\int_r^R \frac{L_0(\varrho)}{\varrho^{k+1}}\ Z d\varrho,$$

и следовательно выражение для характеристики материала после дробления в течение времени t будет

$$L(r,\ t) = e^{-art}\left\{L_0(r) + atr^{k+1}\int_r^R \frac{L_0(\varrho)}{\varrho^{k+1}}\ Z\,d\varrho\right\}.$$

Функция Z

Из равенства

$$Z(x) = -\left(\frac{dU}{dz}\right)_{z=-at(\varrho-r)},$$

где

$$x = at(\varrho - r),$$

и выражения для $U(z)$

$$U(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{(n!)^2}\ z^n$$

получаем

$$Z(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!\,(n-1)!}\ x^{n-1}.$$

Приписывая Z индекс, равный параметру k

$$Z_k(x),$$

получим

$$Z_0(x) = 0,$$
$$Z_1(x) = 1.$$

Из выражения для Z_k получаем

$$Z_{k+1}(x) = x^k\left\{\frac{1}{\Pi(k)} + (k+1)\int_x^{\infty} Z_k(x)\ \frac{dx}{x^{k+1}}\right\},$$

т. е. достаточно знать вид функции $Z_k(x)$ лишь для значений k в интервале 0, 1, чтобы вычислить ее для любого значения k.

Случай крупного исходного материала

Если исходный материал имеет небольшую поверхность (т. е. состоит из зерен большого размера), которой можно пренебречь по сравнению с поверхностью после дробления, то можно положить

$$L_0(r) = 1, \quad R = \infty.$$

В этом случае решение значительно упрощается, и его можно получить элементарным путем непосредственно из диференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 L}{\partial r \partial t} + ar\,\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{k+1}{r}\,\frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Введя переменную

$$z = art,$$

получим обыкновенное диференциальное уравнение

$$z\,\frac{d^2 L}{dz^2} + (z - k)\,\frac{dL}{dz} = 0$$

и его решение

$$L(r,\ t) = \frac{1}{\Pi(k)} \int_{art}^{\infty} z^k e^{-z}\,dz,$$

где

$$\Pi(k) = \int_0^{\infty} z^k e^{-z}\,dz.$$

При k, равном целому числу, получаем

$$L(r,\ t) = e^{-art}\left\{1 + art + \frac{(art)^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{(art)^k}{k!}\right\}.$$

При k, не равном целому числу, получаем бесконечный ряд. Можно дать его в виде

$$L(r,\ t) = 1 - \frac{(art)^{k+1}}{\Pi(k)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(art)^n}{n!\,(n + k + 1)},$$

откуда видно, что при малых art (например при малом r) характеристика имеет вид

$$1 - \frac{(art)^{k+1}}{\Pi(k+1)},$$

а характернстика, построенная на минус

$$\frac{(art)^{k+1}}{\Pi(k+1)},$$

т. е. с точностью до множителя, совпадает со статической.

Это позволяет по кругизне характеристики на минус, построенной в логарифмическом масштабе, определить k, а по коэфициенту

$$\frac{(at)^{k+1}}{\Pi(k+1)}$$

определить a. Обе постоянные конечно определяются по той части характеристики, которая лежит в области самых мелких зерен (малое r) при не очень большом времени дробления (небольшое t).

Между значениями характеристики для разных величин k имеем соотношение

$$L_{k+1}(r,\ t) = L_k(r,\ t) + \frac{(art)^{k+1} e^{-art}}{\Pi(k)},$$

откуда следует, что достаточно иметь таблицу или график лишь для k в интервале от 0 до 1.

Для $k = 0$ имеем

$$L(r, t) = e^{-art},$$

для $k = \frac{1}{2}$

$$L(r, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{art}}^{\infty} e^{-z^2} dz + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{art} \cdot e^{-art},$$

для $k = 1$

$$L(r, t) = e^{-art}(1 + art).$$

Промежуточные значения приходится вычислять с помощью рядов.

Résumé

Étude en question: le broyage fin dans des broyeurs à boulets.

On adopte deux constantes, l'une desquelles se rapporte à la structure de la matière et charactérise sa désagrégation sous choc, l'autre — la vitesse du concassage dans les conditions données.

On déduit une équation différentielle pour la charactéristique de la matière, dont la solution est donnée.

On procède ensuite à l'examen des cas particuliers, et on finit par donner une méthode de définition des constantes d'après la charactéristique de la matière.