Записки Ленинградского Горного института, т. X, вып. 1 1935
Annales de l'Institut des Mines à Leningrade, vol. X, livr. 1 1935

К теории шаровой мельницы [1]

Доц. *Н. П. Неронов*

Sur la théorie du broyeur à boulets

Doz. *N. P. Neronoff*

§ 1

Движение шаров в шаровой мельнице было предметом исследования White (1905) и Davis [2] (1920), рассматривавших траектории внешнего ряда шаров после их отделения от стенки барабана как параболические. Однако некоторые экспериментаторы, в частности Gow, Campbell и Coghill, [3] в своей коллективной работе указывают, что шары при своем свободном движении отбрасываются дальше, чем это предполагается упомянутой выше теорией. Объяснение этого факта видят в том, что в начале своего относительного движения шары не движутся независимо, а продолжают быть в контакте, производя давление друг на друга. Только после прекращения контакта траектория шаров может считаться параболической. Это обстоятельство не было учтено теориями White и Davis. Необходимо однако отметить, что попытка (см. указанную выше коллективную работу) исправить старую теорию и учесть влияние на траекторию шаров их взаимного давления носит искусственный характер и не представляется хорошо обоснованной. Поэтому кажется целесообразным пересмотреть заново старую теорию шаровой мельницы с целью ее уточнения и учета взаимного давления шаров в период их относительного движения по отношению к барабану. Предметом нашего ближайшего исследования явится траектория внешнего ряда шаров. [4]

Заметим прежде всего, что обычно момент отделения шара от стенки барабана отождествляется с моментом отделения от нижележащего шара. Между тем в действительности эти моменты не совпадают. За протекающее между ними время нижний шар продолжает производить давление на верхний и тем самым оказывает влияние на характер траектории последнего.

Рассматриваемое движение шаров происходит в вертикальной плоскости, перпендикулярной к оси вращения барабана. Введем следующие обозначения:

R — радиус барабана,

---

[1] В лабораторных опытах шаровая мельница иногда загружается одними шарами. Этот случай главным образом и имеется в виду в настоящей статье. Кроме того, мы ограничиваемся в ней рассмотрением лишь начального периода неустановившегося движения шаров. Случай установившегося движения, существенно важный для практики, изучается нами в специальной работе.

[2] Теория и практика дробления и тонкого измельчения, Ленинград, 1932, стр. 194.

[3] Ibidem, стр. 106.

[4] Ради упрощения вычислений, связанных с практическим приложением уточненной теории шаровой мельницы, часть результатов настоящего параграфа представлена в ином виде сравнительно с § 1 статьи «О некоторых задачах динамики, связанных с горнообогатительным делом» («Записки Ленингр. горн. ин-та», 1934, т. VIII), посвященным тому же вопросу.

r — радиус шара,
ω — постоянная угловая скорость вращения барабана,
g — ускорение свободного падения,
φ_0 — угол, характеризующий положение шара в момент его отделения от стенки барабана, и
α — угол, определяемый равенством (рис. 1)

$$\sin\alpha = \frac{r}{R-r}. \tag{1}$$

В начальный момент относительного движения шара реакция в точке его касания со стенкой барабана обращается в ноль. Это условие позволяет вычислить угол φ_0, который находится из уравнения

$$\cos(\alpha+\varphi_0) = \frac{\omega^2}{g}(R-r)\cos\alpha. \tag{2}$$

Рассмотрим, пренебрегая сопротивлениями, движение шара, отделившегося от стенки барабана, по нижележащему. Будем определять положение первого шара углом ψ поворота плоскости C_1C_2 вокруг оси C_1 и углом θ поворота шара относительно этой плоскости вокруг оси C_2 (рис. 2). Оси C_1 и C_2 проходят через центры упомянутых выше шаров, которые предполагаются однородными.

Применяя уравнение Лагранжа к параметру θ и принимая во внимание начальные условия, без труда находим

$$\theta' = -\psi'. \tag{3}$$

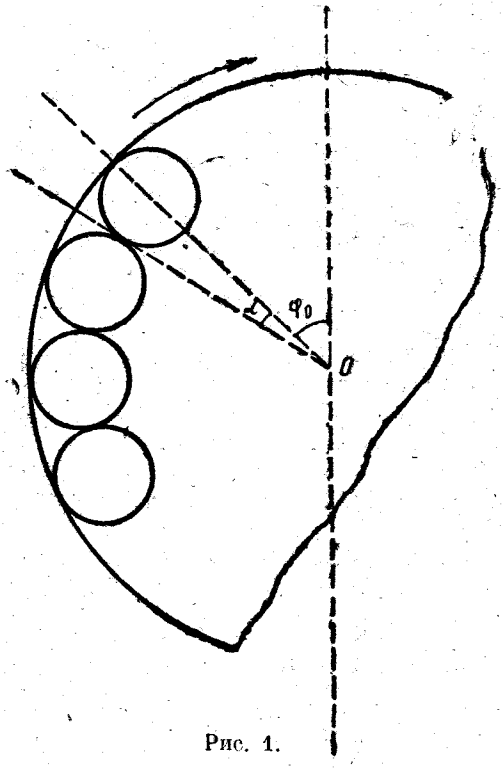


Рис. 1.

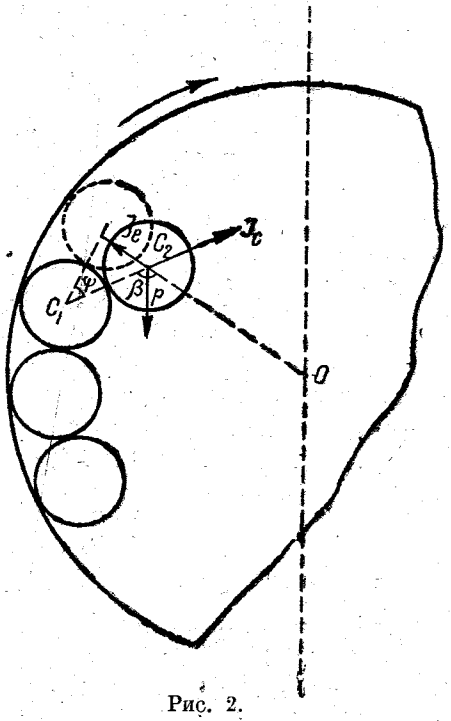


Рис. 2.

Полученное равенство показывает, что относительное движение шара по отношению к барабану есть поступательное со скоростью, перпендикулярной к плоскости C_1C_2 и численно равной

$$v = 2r\psi'. \tag{4}$$

Будем рассматривать относительное движение шара по отношению к барабану. Обозначим через m массу шара. На него действуют (рис. 2):

переменного направления сила тяжести, линия действия которой вращается вокруг оси C_2 в направлении, противоположном вращению барабана, и с той же угловой скоростью ω,

$$p = mg, \tag{5}$$

переносная (центробежная) сила инерции

$$J_e = m\varrho\omega^2, \tag{6}$$

кориолисова сила инерции

$$J_c = 4mr\omega\psi' \tag{7}$$

и опорная реакция N. Выше через ϱ обозначено расстояние OC_2 между центром C_2 движущегося шара и осью O вращения барабана, находимое из уравнения

$$\varrho^2 = (R-r)^2 + 4r^2 - 4r(R-r)\sin(\alpha+\psi). \tag{8}$$

Расстояние ϱ связано с углом β (рис. 2) соотношениями

$$\frac{R-r}{\sin\beta} = \frac{\varrho}{\cos(\alpha+\psi)} = \frac{2r}{\cos(\alpha+\psi-\beta)}. \tag{9}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \varrho\sin\beta &= (R-r)\cos(\alpha+\psi), \\ \varrho\cos\beta &= 2r-(R-r)\sin(\alpha+\psi). \end{aligned} \tag{10}$$

Применяем диференциальное уравнение движения центра тяжести шара в проекции на касательную к его траектории

$$2r\psi'' = g\cos(\alpha+\varphi_0-\psi-\omega t) - \varrho\omega^2\sin\beta. \tag{11}$$

Подставляем значение $\varrho\sin\beta$

$$2r\psi'' = g\cos(\alpha+\varphi_0-\psi-\omega t) - \omega^2(R-r)\cos(\alpha+\psi). \tag{12}$$

Интеграл этого уравнения может быть представлен степенным рядом по отношению к времени t

$$\psi = \psi_0 + \psi_0' t + \frac{\psi_0''}{1\cdot 2}t^2 + \frac{\psi_0'''}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \ldots, \tag{13}$$

где в силу начальных условий

$$\psi_0 = 0, \quad \psi_0' = 0. \tag{14}$$

Кроме того, в силу уравнений (2) и (12), $\psi_0'' = 0$.

Составляем теперь диференциальное уравнение движения центра тяжести шара в проекции на нормаль к его траектории

$$2r\psi'^2 = g\sin(\alpha+\varphi_0-\psi-\omega t) - 4r\omega\psi' - \varrho\omega^2\cos\beta - \frac{N}{m}. \tag{15}$$

Вносим найденное ранее значение $\varrho\cos\beta$

$$\begin{aligned} 2r\psi'^2 = g\sin(\alpha+\varphi_0-\psi-\omega t) - 4r\omega\psi' - \omega^2[2r - \\ -(R-r)\sin(\alpha+\psi)] - \frac{N}{m}. \end{aligned} \tag{16}$$

Полагая в уравнении (16) $N = 0$, находим значение времени t_1, соответствующее моменту отделения верхнего шара от нижнего.

За время t_1 барабан повернется на угол, равный ωt_1. Если

$$\omega t_1 < 2\alpha, \tag{17}$$

нижний шар наверное не начнет своего движения по отношению к барабану ранее момента времени t_1. Если же последнее неравенство не выполняется, является необходимость в дополнительном исследовании, чтобы выяснить характер совместного движения

обоих, находящихся в контакте, шаров по отношению к барабану. Количественная оценка предлагаемого уточнения теории шаровой мельницы может быть произведена на основании численных расчетов в каждом отдельном случае. Подобного рода расчет был произведен Л. В. Арнольдом, взявшим числовые данные из цитированной выше коллективной статьи. Оказалось, что там неравенство (17) не выполняется, и дальнейшее исследование будет иметь целью решить более сложную задачу, именно рассмотреть движение нескольких, находящихся в контакте шаров. Прежде всего нужно рассмотреть движение системы, состоящей из двух шаров, что составляет предмет следующего параграфа.

§ 2

Найдем момент времени t', соответствующий началу относительного движения нижнего шара. Этот момент характеризуется обращением в ноль реакции в точке соприкосновения шара со стенкой барабана. На рассматриваемый шар действуют: вес его p, центробежная сила инерции

$$J_e = m(R - r)\omega^2, \tag{18}$$

давление N со стороны верхнего шара и наконец опорная реакция в точке A касания с нижележащим шаром (рис. 3).

Составляем уравнение проекций на направление OA

$$(R - r)\omega^2 \cos\alpha + \frac{N}{m}\sin(2\alpha + \psi) - g\cos(\varphi_0 + 3\alpha - \omega t) = 0. \tag{19}$$

На основании результатов предыдущего параграфа ψ и $\frac{N}{m}$ могут считаться известными функциями времени. Именно значение ψ определяется рядом (13), а значение реакции N находится из уравнения (16)

$$\frac{N}{m} = g\sin(\alpha + \varphi_0 - \psi - \omega t) - \\ - 4r\omega\psi' - \omega^2[2r - (R - r)\sin(\alpha + \psi)] - 2r\psi'^2. \tag{20}$$

Корень уравнения (19) дает искомый момент времени t'.

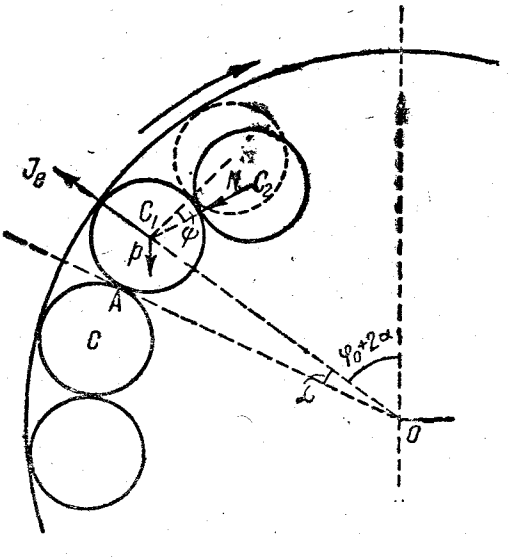


Рис. 3.

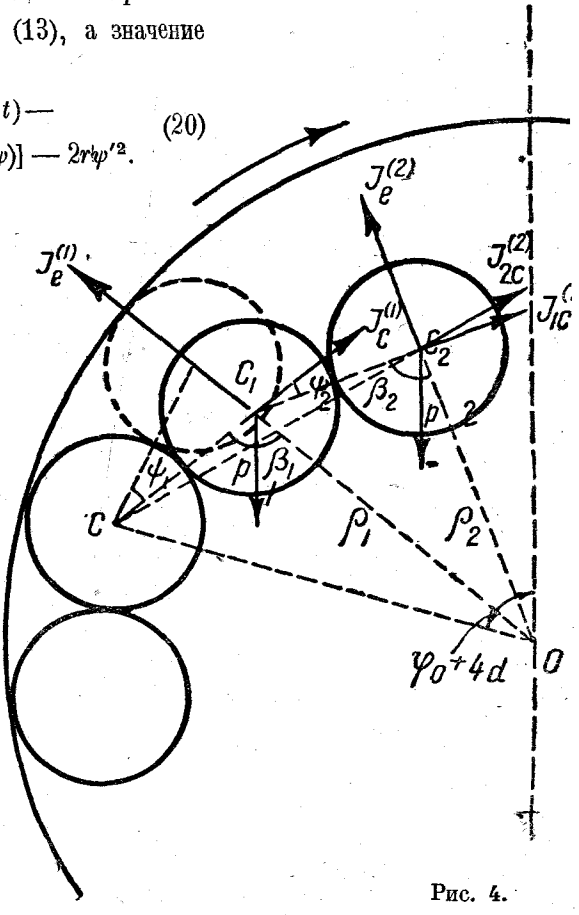


Рис. 4.

Будем характеризовать положение системы поступательно движущихся по отношению к барабану шаров *1* и *2* (рис. 4) двумя параметрами: углом ψ_1 отклонения прямой CC_1 и углом ψ_2 между прямыми CC_1 и C_1C_2. Живая сила T системы в ее относительном движении слагается из живых сил отдельных шаров. Живая сила шара *1*

$$T_1 = 2mr^2\psi_1'^2. \tag{21}$$

Для вычисления живой силы шара *2* заметим, что скорость его центра C_2 равна геометрической сумме двух вращательных скоростей вокруг осей C и C_1. Численное значение первой скорости $4r\psi_1'\cos\frac{\psi_2}{2}$ и второй $2r\psi_2'$. Угол между ними равен $\frac{\psi_2}{2}$. Поэтому живая сила шара *2* имеет вид

$$T_2 = 2mr^2\left[\psi_2'^2 + 4(\psi_1'^2 + \psi_1'\psi_2')\cos^2\frac{\psi_2}{2}\right]. \tag{22}$$

Следовательно

$$T = T_1 + T_2 = 2mr^2\left[\psi_1'^2 + \psi_2'^2 + 4(\psi_1'^2 + \psi_1'\psi_2')\cos^2\frac{\psi_2}{2}\right]. \tag{23}$$

Силами, непосредственно приложенными к шару *1*, являются (рис. 4): вес его p, центробежная сила инерции

$$J_e^{(1)} = m\varrho_1\omega^2 \tag{24}$$

и кориолисова сила инерции (рис. 4)

$$J_c^{(1)} = 4mr\omega\psi_1'. \tag{25}$$

Аналогично на шар *2* действуют вес p, центробежная сила инерции

$$J_e^{(2)} = m\varrho_2\omega^2 \tag{26}$$

и кориолисова сила инерции $J_c^{(2)}$, которую мы разложим на две составляющие $J_{1c}^{(2)}$ и $J_{2c}^{(2)}$, направленные по продолжению прямых C_1C_2 и CC_2:

$$\left.\begin{aligned} J_{1c}^{(2)} &= 4mr\omega\psi_2', \\ J_{2c}^{(2)} &= 8mr\omega\psi_1'\cos\frac{\psi_2}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Выше через ϱ_1 и ϱ_2 обозначены расстояния OC_1 и OC_2, связанные с углами ψ_1, ψ_2, β_1 (рис. 4) соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1^2 &= (R-r)^2 + 4r^2 - 4r(R-r)\sin(\alpha+\psi_1), \\ \varrho_2^2 &= \varrho_1^2 + 4r^2 + 4r\varrho_1\cos(\psi_2+\beta_1). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

В свою очередь угол β_1 является функцией углов ψ_1, ψ_2 и может быть исключен при помощи равенств (34).

Дифференциальные уравнения движения системы шаров напишем в формуле Лагранжа

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\psi_1'} - \frac{\partial T}{\partial\psi_1} &= Q_1, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\psi_2'} - \frac{\partial T}{\partial\psi_2} &= Q_2. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Как известно, их правые части Q_1 и Q_2 представляют множители при $\delta\psi_1$ и $\delta\psi_2$ в выражении суммы работ непосредственно приложенных сил на возможном перемещении системы. Имеем

$$\left.\begin{aligned} Q_1\delta\psi_1 + Q_2\delta\psi_2 = \Big[&4mgr\cos(\varphi_0 + 3\alpha - \psi_1 - \omega t) + \\ &+ 2mgr\cos(\varphi_0 + 3\alpha - \psi_1 - \psi_2 - \omega t) - 2rJ_e^{(1)}\sin\beta_1 - \\ &- 4rJ_e^{(2)}\cos\frac{\psi_2}{2}\sin\left(\beta_2 - \frac{\psi_2}{2}\right) + 2rJ_{1c}^{(2)}\sin\psi_2\Big]\delta\psi_1 + \\ + \Big[2mgr\cos(\varphi_0 + 3\alpha - \psi_1 - \psi_2 - \omega t) &- 2rJ_e^{(2)}\sin\beta_2 - 2rJ_{2c}^{(2)}\sin\frac{\psi_2}{2}\Big]\delta\psi_2. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Отсюда определяем Q_1 и Q_2:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 = {} & 4mgr\cos(\varphi_0+3\alpha-\psi_1-\omega t)+2mgr\cos(\varphi_0+3\alpha-\psi_1-\psi_2-\omega t)- \\ & -2rJ_e^{(1)}\sin\beta_1-4rJ_e^{(2)}\cos\frac{\psi_2}{2}\sin\left(\beta_2-\frac{\psi_2}{2}\right)+2rJ_{1c}^{(2)}\sin\psi_2, \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

$$Q_2 = 2mgr\cos(\varphi_0+3\alpha-\psi_1-\psi_2-\omega t)-2rJ_e^{(2)}\sin\beta_2-2rJ_{2c}^{(2)}\sin\frac{\psi_2}{2}.$$

Наконец вносим приведенные ранее значения сил $J_e^{(1)}$, $J_e^{(2)}$, $J_c^{(1)}$, $J_{1c}^{(2)}$, $J_{2c}^{(2)}$:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 = {} & 4mgr\cos(\varphi_0+3\alpha-\psi_1-\omega t)+2mgr\cos(\varphi_0+ \\ & +3\alpha-\psi_1-\psi_2-\omega t)-2mr\omega^2\varrho_1\sin\beta_1-4mr\omega^2\varrho_2\cos\frac{\psi_2}{2}\sin\left(\beta_2-\frac{\psi_2}{2}\right)+ \\ & +8mr^2\omega\psi_2'\sin\psi_2, \\ Q_2 = {} & 2mgr\cos(\varphi_0+3\alpha-\psi_1-\psi_2-\omega t)-2mr\omega^2\varrho_2\sin\beta_2- \\ & -8mr^2\omega\psi_1'\sin\psi_2. \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Углы β_1, β_2 (рис. 4) связаны с ранее введенными расстояниями ϱ_1, ϱ_2 соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varrho_1}{\cos(\alpha+\psi_1)} &= \frac{R-r}{\sin\beta_1} = \frac{2r}{\cos(\alpha+\psi_1-\beta_1)}, \\ \frac{\varrho_2}{\sin(\psi_2+\beta_2)} &= \frac{\varrho_1}{\sin\beta_2} = \frac{2r}{\sin(\psi_2+\beta_1-\beta_2)}. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Из последних уравнений выводим следующие зависимости:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1\sin\beta_1 &= (R-r)\cos(\alpha+\psi_1), \\ \varrho_1\cos\beta_1 &= 2r-(R-r)\sin(\alpha+\psi_1), \\ \varrho_2\sin\beta_2 &= 2r\sin\psi_2+(R-r)\cos(\alpha+\psi_1+\psi_2), \\ \varrho_2\cos\beta_2 &= 2r(1+\cos\psi_2)-(R-r)\sin(\alpha+\psi_1+\psi_2), \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

позволяющие в выражениях (32) для Q_1 и Q_2 исключить функции ϱ_1, ϱ_2, β_1, β_2 параметров ψ_1, ψ_2. Именно

$$\left.\begin{aligned} Q_1 = {} & 4mgr\cos(\varphi_0+3\alpha-\psi_1-\omega t)+ \\ & +2mgr\cos(\varphi_0+3\alpha-\psi_1-\psi_2-\omega t)-4mr\omega^2(R-r)\cos(\alpha+\psi_1)- \\ & -2mr\omega^2\cos(\alpha+\psi_1+\psi_2)+8mr^2\omega\psi_2'\sin\psi_2, \\ Q_2 = {} & 2mgr\cos(\varphi_0+3\alpha-\psi_1-\psi_2-\omega t)- \\ & -2mr\omega^2[2r\sin\psi_2+(R-r)\cos(\alpha+\psi_1+\psi_2)]-8mr^2\omega\psi_1'\sin\psi_2. \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Пользуясь найденными значениями T, Q_1, Q_2, составляем уравнения Лагранжа

$$\left.\begin{aligned} & 2r[\psi_1''(3+2\cos\psi_2)+\psi_2''(1+\cos\psi_2)-\psi_2'(2\psi_1'+\psi_2')\sin\psi_2] = \\ & = 2g\cos(\varphi_0+3\alpha-\psi_1-\omega t)+g\cos(\varphi_0+3\alpha-\psi_1-\psi_2-\omega t)- \\ & -2\omega^2(R-r)\cos(\alpha+\psi_1)-\omega^2(R-r)\cos(\alpha+\psi_1+\psi_2)+4r\omega\psi_2'\sin\psi_2, \\ & 2r[\psi_2''+\psi_1''(1+\cos\psi_2)+\psi_1'^2\sin\psi_2] = g\cos(\varphi_0+3\alpha-\psi_1-\psi_2-\omega t)- \\ & -\omega^2[2r\sin\psi_2+(R-r)\cos(\alpha+\psi_1+\psi_2)]-4r\omega\psi_1'\sin\psi_2. \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Интегралы полученной системы дифференциальных уравнений могут быть получены путем разложения ψ_1 и ψ_2 в степенные ряды по отношению к разности $t-t'$ или при помощи способа последовательных приближений. В дальнейшем ψ_1 и ψ_2 считаются известными функциями времени. Начальные данные для определения произвольных постоянных интегрирования таковы: при $t=t'$, где t' имеет ранее указанное значение, угол ψ

и его производная ψ_1' должны обращаться в нуль; что же касается угла ψ_2 и производной ψ_2', то они находятся из равенств

$$\psi_2|_{t=t'} = 2\alpha + \psi|_{t=t'}, \quad \psi_2'|_{t=t'} = \psi'|_{t=t'}, \tag{37}$$

где ψ имеет то же значение, что в § 1.

Чтобы определить момент t_2 отделения шара *2* от шара *1*, нужно найти выражение реакции N_2 в точке их касания. С этой целью находим сначала полярные координаты ϱ, θ точки C_2, предполагая полюс помещенным в точке C,

$$\varrho = 4r\cos\frac{\psi_2}{2}, \qquad \theta = \psi_1 + \frac{\psi_2}{2}. \tag{38}$$

Вычисляем проекции $j_{2\varrho}$ и $j_{2\theta}$ ускорения j_2 точки C_2 на направление C_2C радиуса-вектора и нормали к нему:

$$\left.\begin{aligned} j_{2\varrho} &= r\left[(2\psi_1' + \psi_2')^2\cos\frac{\psi_2}{2} + 2\psi_2''\sin\frac{\psi_2}{2} + \psi_2'^2\cos\frac{\psi_2}{2}\right], \\ j_{2\theta} &= 2r\left[(2\psi_1'' + \psi_2'')\cos\frac{\psi_2}{2} - \psi_2'(2\psi_1' + \psi_2')\sin\frac{\psi_2}{2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

На основании основной аксиомы динамики, примененной к центру тяжести C_2 шара *2*, можем написать следующее векториальное равенство:

$$m\mathbf{j}_2 = \mathbf{p} + \mathbf{J}_e^{(2)} + \mathbf{J}_{1c}^{(2)} + \mathbf{J}_{2c}^{(2)} + \mathbf{N}_2 \tag{40}$$

или в проекции на направление прямой C_2C_1

$$\begin{aligned} m\left(j_{2\varrho}\cos\frac{\psi_2}{2} - j_{2\theta}\sin\frac{\psi_2}{2}\right) = \\ = p\sin(\varphi_0 + 3\alpha - \psi_1 - \psi_2 - \omega t) - J_e^{(2)}\cos\beta_2 - J_{1c}^{(2)} - J_{2c}^{(2)}\cos\frac{\psi_2}{2} - N_2. \end{aligned} \tag{41}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{N_2}{m} = g\sin(\varphi_0 + 3\alpha - \psi_1 - \psi_2 - \omega t) - \omega^2[2r(1+\cos\psi_2) - \\ - (R-r)\sin(\alpha + \psi_1 + \psi_2)] - 4r\omega\psi_2' - 4r\omega\psi_1'(1+\cos\psi_2) + 2r\psi_1''\sin\psi_2 - \\ - 2r\psi_2'(2\psi_1' + \psi_2') - 2r\psi_1'^2(1+\cos\psi_2), \end{aligned} \tag{42}$$

где правая часть представляет известную функцию времени. Полагая в последнем уравнении $N_2 = 0$, находим искомый момент времени t_2'.

Во всем предыдущем предполагалось, что шар, на который опирается шар *1*, не начнет своего относительного (по отношению к барабану) движения раньше момента времени t_2. Это предположение наверно оправдывается при выполнении неравенства

$$\omega t_2' < 4\alpha. \tag{43}$$

В противном случае необходима поверка, так как выражения для ψ_1 и ψ_2 сохраняют силу только до момента времени $t = t''$, соответствующего началу относительного движения третьего шара. Чтобы определить этот момент, нужно предварительно найти реакцию N_1 в точке касания шара *1* и нижележащего. Для этого мы составляем дифференциальное уравнение движения центра тяжести шара *1* проекции на нормаль к его траектории. Имеем

$$2mr\psi_1'^2 = p\sin(\varphi_0 + 3\alpha - \psi_1 - \omega t) - J_e^{(1)}\cos\beta_1 - J_c^{(1)} + N_2\cos\psi_2 - N_1. \tag{44}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{N_1}{m} = g\sin(\varphi_0 + 3\alpha - \psi_1 - \omega t) - \omega^2[2r - (R-r)\sin(\alpha + \psi_1)] - 4r\omega\psi_1' + \\ + \frac{N_2}{m}\cos\psi_2 - 2r\psi_1'^2. \end{aligned} \tag{45}$$

Момент времени t'' находится из уравнения

$$(R-r)\omega^2\cos\alpha + \frac{N_1}{m}\sin(2\alpha + \psi_1) - g\cos(\varphi_0 + 5\alpha - \omega t) = 0. \tag{46}$$

Это последнее получается тем же путем, каким было составлено уравнение (19), дающее момент t' отделения шара *1* от стенки барабана.

Начиная с момента времени t'' при условии $t'' < t_2$ в относительном движении по отношению к барабану находятся три шара и задача приводится к составлению и интегрированию системы трех дифференциальных уравнений движения этих шаров. Общий ход исследования остается тот же, что и в случае двух шаров.

Следует заметить, что определенный указанным выше способом момент начала свободного параболического движения для верхнего шара конечно будет несколько отличаться от соответствующего момента при установившемся режиме шаровой мельницы. Кроме того все наши рассуждения основаны на предположении, что скольжением шаров в шаровой мельнице можно пренебречь. Упомянутый фактор может сильно изменить числовые результаты, основанные на изложенной здесь теории.

§ 3

Для получения дифференциальных уравнений движения двух находящихся в контакте шаров мы воспользовались теорией относительного движения, введя соответствующие силы инерции. Однако такой путь не является единственным. Можно было бы применить уравнения Лагранжа к абсолютному движению шаров. Действительно, направим координатные оси так, как показано на рис. 5.

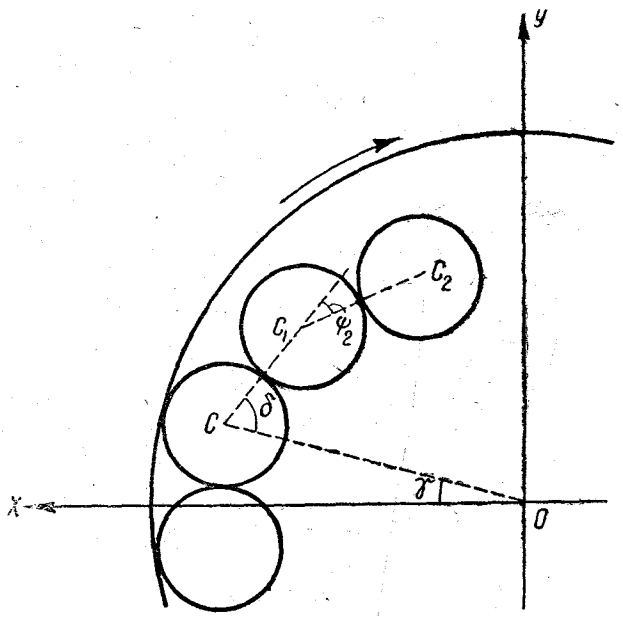


Рис. 5.

Обозначенные на нем углы γ, δ легко вычисляются:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - 4\alpha + \omega t, \quad \delta = \frac{\pi}{2} - \alpha - \psi_1 \tag{47}$$

и мы получим следующие выражения для координат центров тяжести C_1 и C_2 шаров *1* и *2*:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= (R-r)\sin(\varphi_0 + 4\alpha - \omega t) - 2r\cos(\varphi_0 + 3\alpha - \psi_1 - \omega t),\\
y_1 &= (R-r)\cos(\varphi_0 + 4\alpha - \omega t) + 2r\sin(\varphi_0 + 3\alpha - \psi_1 - \omega t),\\
x_2 &= (R-r)\sin(\varphi_0 + 4\alpha - \omega t) - 2r\cos(\varphi_0 + 3\alpha - \psi_1 - \omega t) -\\
&\quad - 2r\cos(\varphi_0 + 3\alpha - \psi_1 - \psi_2 - \omega t),\\
y_2 &= (R-r)\cos(\varphi_0 + 4\alpha - \omega t) + 2r\sin(\varphi_0 + 3\alpha - \psi_1 - \omega t) +\\
&\quad + 2r\sin(\varphi_0 + 3\alpha - \psi_1 - \psi_2 - \omega t).
\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Найдем при помощи уравнений (48) значения скоростей v_1 и v_2 центров тяжести упомянутых выше шаров

$$v_1^2 = x_1'^2 + y_1'^2, \qquad v_2^2 = x_2'^2 + y_2'^2. \tag{49}$$

Далее, пренебрегая сопротивлениями после отделения шаров от стенки барабана, можно считать угловую скорость вращения каждого из них вокруг оси, проходящей через его центр тяжести и параллельной оси вращения мельницы, постоянной и равной ω. Поэтому живая сила системы имеет вид

$$T = m\left(\frac{2}{5}\ r^2\omega^2 + \frac{1}{2}\ v_1^2 + \frac{1}{2}\ v_2^2\right). \tag{50}$$

Составляем уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \psi_1'} - \frac{\partial T}{\partial \psi_1} = Q_1, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \psi_2'} - \frac{\partial T}{\partial \psi_2} = Q_2. \tag{51}$$

Чтобы найти левые части написанных уравнений, остается произвести соответствующие диференцирования в полученном выражении живой силы T системы.

Для нахождения правых частей уравнений Лягранжа нужно вычислить работу сил веса шаров на возможном перемещении системы. Имеем

$$Q_1\delta\psi_1 + Q_2\delta\psi_2 = -p(\delta y_1 + \delta y_2). \tag{52}$$

Находим, пользуясь уравнениями (48), значения δy_1 и δy_2

$$\left.\begin{aligned} \delta y_1 &= -2r\cos(\varphi_0 + 3\alpha - \psi_1 - \omega t)\,\delta\psi_1, \\ \delta y_2 &= -2r\left[\cos(\varphi_0 + 3\alpha - \psi_1 - \omega t) + \cos(\varphi_0 + 3\alpha - \psi_1 - \psi_2 - \omega t)\right]\delta\psi_1 - \\ &\quad - 2r\cos(\varphi_0 + 3\alpha - \psi_1 - \psi_2 - \omega t)\,\delta\psi_2. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Подстановка в равенство (52) дает

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= 2pr\left[2\cos(\varphi_0 + 3\alpha - \psi_1 - \omega t) + \cos(\varphi_0 + 3\alpha - \psi_1 - \psi_2 - \omega t)\right], \\ Q_2 &= 2pr\cos(\varphi_0 + 3\alpha - \psi_1 - \psi_2 - \omega t). \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Вышеизложенный способ позволяет составить для данной задачи уравнения Лагранжа, не прибегая к теории относительного движения.

Укажем еще один способ получения искомых диференциальных уравнений движения системы двух шаров, основанный только на применении закона движения центра тяжести. С этой целью напишем диференциальные уравнения движения центра тяжести каждого шара, сохраняя все принятые ранее обозначения,

$$\left.\begin{aligned} mx_1'' &= -N_1\cos(\delta - \gamma) + N_2\cos(\delta - \gamma - \psi_2), \\ my_1'' &= -p + N_1\sin(\delta - \gamma) - N_2\sin(\delta - \gamma - \psi_2), \\ mx_2'' &= -N_2\cos(\delta - \gamma - \psi_2), \\ my_2'' &= -p + N_2\sin(\delta - \gamma - \psi_2), \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

где δ, γ, x_1, y_1, x_2, y_2 вычисляются на основании равенств (47) и (48).

Исключение реакций N_1 и N_2 из написанных выше четырех уравнений дает систему двух диференциальных уравнений с неизвестными функциями ψ_1 и ψ_2, эквивалентную системе (36), полученной нами путем применения уравнений Лагранжа к относительному движению шаров.

Résumé

La durée du mouvement d'un boulet dans le broyeur à boulets peut être partagée en trois intervalles.

Au cours du premier le boulet n'a pas de mouvement relatif par rapport au cylindre tournant et se meut comme s'il était invariablement lié à celui-ci. Au début du deuxième intervalle

le boulet en question se sépare du cylindre (nous considérons les boulets extérieurs), mais il continue encore de s'appuyer sur le boulet qui se trouve au dessous. Enfin le troisième intervalle commence au moment, ou le boulet en mouvement départ de celui d'en bas. On identifie généralement ce moment avec celui où le boulet se sépare du cylindre. Toutefois ces moments ne coïncident pas en réalité. Au cours du temps qui les sépare le boulet inférieur continue à exercer une pression sur le boulet supérieur, ce qui modifie la trajectoire, que le centre de gravité de ce dernier décrit pendant le troisième intervalle.

Dans le premier paragraphe de l'article présent nous envisageons le mouvement du boulet au cours du deuxième intervalle, en appliquant les équations intrinsèques (12) et (16) du mouvement du centre de gravité du boulet considéré. Nous déterminons ensuite la durée du deuxième intervalle et vérifions l'inégalité (17). Quand elle n'est pas satisfaisante on doit résoudre un problème plus compliqué et considérer le mouvement de quelques boulets (relatif par rapport au cylindre) en contact. Le cas de deux boulets est étudié dans le deuxième et le troisième paragraphes.

Les équations différentielles correspondantes du mouvement on la forme (36). Elles peuvent être intégrées par l'application de la méthode des approximations successives ou par le développement des fonctions inconnues ψ_1 et ψ_2 en séries entières en $t - t'$.