Записки Ленинградского Горного института, т. вып. 1 X, 1935
Annales de l'Institut des Mines à Leningrade, vol. livr. 1 X, 1935

К теории спирального сепаратора

(О движении с трением тяжелой точки по винтовой поверхности)

Доц. *Н. П. Неронов*

Sur la théorie du séparateur à vis

(Mouvement d'un point pesant sur un hélicoide)

Doz. *N. P. Neronoff*

§ 1

Теория спирального сепаратора, а также аналогичная теория винтового спуска повидимому очень мало разработаны. Поэтому следует отметить попытку проф. Л. Б. Левенсона [1] вести конструктивный расчет сепаратора, исходя из анализа движения обогащаемого материала. Соответствующие диференциальные уравнения движения были составлены проф. М. И. Акимовым. [2] Их интегрирование в первом приближении выполнено в настоящей статье. [3]

Существенную роль при проектировании спирального сепаратора играет построение проекций на горизонтальную плоскость траекторий движущихся частиц (так называемая диаграмма разгрузки). Последняя позволяет судить, насколько конструируемый сепаратор подходит для обогащения определенного материала. Построение диаграммы разгрузки проф. Л. Б. Левенсон производит графическим методом, основанным на некоторых допущениях, значительно упрощающих решение поставленной задачи, но вместе с тем понижающих его точность. Так например допускается, что ускорение частицы, движущейся по винтовой поверхности, можно вычислять по формуле, выведенной для наклонной плоскости. Затем предполагается, что линия наибольшего ската дает направление этого ускорения и т. д.

Я поставил своей задачей дать другой метод построения диаграммы разгрузки, именно аналитический, основанный на интегрировании в первом приближении диференциальных уравнений движения. Этот последний позволяет также осветить целесообразность новых форм спирального сепаратора, предложенных проф. М. И. Акимовым. [4] Вопрос о том, насколько велика погрешность первого приближения, составляет нашу дальнейшую задачу.

---

[1] Спиральный сепаратор; его теория, расчет и проектирование, 1925, Ленинград, Инст. мех. обр. пол. ископ.

[2] Ibidem, стр. 50.

[3] См. также «О некоторых задачах динамики, связанных с горно-обогатительным делом», § 2, Записки Ленингр. горн. инст., т. VIII, 1934.

[4] См. в связи с этим статью В. А. Егунова.

Направим ось Z вертикально вверх. Уравнение косой винтовой поверхности в цилиндрических координатах r, θ, z

$$z = ar + b\theta, \tag{1}$$

где через a и b обозначены постоянные ($b < 0$).

Диференциальные уравнения движения имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} r'' - r\theta'^2 + \frac{1}{\Delta}\left(ar\theta'^2 - \frac{2br'\theta'}{r} + g\right)\left(\frac{a}{\Delta} + \frac{kr'}{v}\right) = 0, \\ \theta'' + \frac{2r'\theta'}{r} + \frac{1}{\Delta}\left(ar\theta'^2 - \frac{2br'\theta'}{r} + g\right)\left(\frac{b}{r^2\Delta} + \frac{k\theta'}{v}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Здесь v — скорость точки, k — коэфициент трения скольжения, g — ускорение свободного падения и введены следующие сокращенные обозначения:

$$\Delta = \sqrt{1 + a^2 + \frac{b^2}{r^2}}, \tag{3}$$

$$r' = \frac{dr}{dt}, \quad r'' = \frac{d^2r}{dt^2}, \quad \theta' = \frac{d\theta}{dt}, \quad \theta'' = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что уравнения (2) имеют следующую систему частных интегралов:

$$r = \alpha, \quad \theta = \beta t, \tag{4}$$

соответствующих некоторому равномерному движению точки по винтовой линии на расстоянии α от оси. [1] Постоянные коэфициенты α и β определяются из уравнений:

$$\alpha^2 = \frac{b^2}{2k^2(1 + a^2)}\left[1 - k^2 + \sqrt{(1 + k^2)^2 + 4a^2k^2}\right], \tag{5}$$

$$\beta^2(\alpha^2 + b^2) = a\alpha g.$$

Скорость этого движения оказывается равной $\sqrt{a\alpha g}$.

Переходим к новым переменным ξ и η, связанным с прежними r и θ при помощи уравнений

$$r = \alpha + \xi, \quad \theta = \beta t + \eta. \tag{6}$$

Переменные ξ и η определяются в первом приближении следующей системой диференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \xi'' - \frac{b\beta}{a\alpha}\left(1 + \frac{2a^2}{\Delta_1^2}\right)\xi' + \frac{\beta^2}{\Delta_1^2}\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)\xi - \frac{2k^2a^3\beta}{b^2}\eta' = 0, \\ \eta'' + \frac{\beta}{\alpha}\left(2 + \frac{b^4}{k^2a^4\Delta_1^2}\right)\xi' - \frac{b\beta^2}{a\alpha^2}\left[2 - \frac{b^2(1 + k^2)}{k^2a^2\Delta_1^2}\right]\xi = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где

$$\Delta_1 = \sqrt{1 + a^2 + \frac{b^2}{a^2}}. \tag{8}$$

Общий интеграл предыдущей системы имеет вид (e — основание натуральных логарифмов)

$$\left.\begin{aligned} \xi = Ae^{s_1t} + Be^{s_2t} + Ce^{s_3t}, \\ \eta = A\chi_1e^{s_1t} + B\chi_2e^{s_2t} + C\chi_3e^{s_3t} + D. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

В уравнениях (9) через A, B, C, D обозначены произвольные постоянные и через s_j ($j = 1, 2, 3$) — корни характеристического уравнения третьей степени

$$\left(\frac{s}{\beta}\right)^3 + \frac{\delta}{a}\left(1 + \frac{2a^2}{\Delta_1^2}\right)\left(\frac{s}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{3\delta^2 - 1}{\Delta_1^2} + \frac{4k^2}{\delta^2}\right)\frac{s}{\beta} + \frac{2}{a\delta}\left[2k^2 - \frac{\delta(1 + k^2)}{\Delta_1^2}\right] = 0, \tag{10}$$

[1] Указание на возможность такого движения принадлежит проф. Л. Б. Левенсону.

где

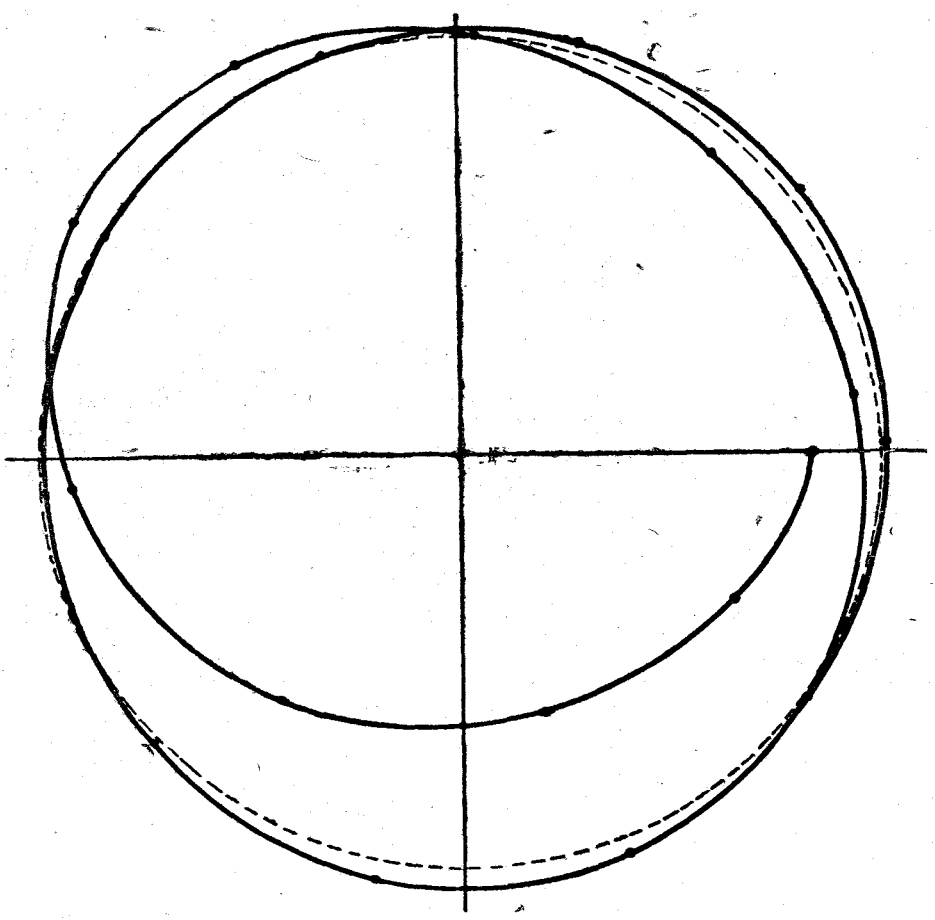
$$\delta = -\frac{b}{a}.$$

Коэфициент χ_j $(j = 1, 2, 3)$ определяется из уравнения

$$\chi_j = -\frac{\beta}{as_j}\left(2+\frac{b^4}{k^2a^4\Delta_1^2}\right)+\frac{b\beta^2}{a\alpha^2 s_j^2}\left[2-\frac{b^2(1+k^2)}{k^2a^2\Delta_1^2}\right]. \tag{11}$$

Характер корней кубического уравнения (10) был мною выяснен ранее на различных примерах. [1] Существенной особенностью их является то обстоятельство, что вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны. Для области значений параметров a, b, k, обладающей этим свойством, можно положить $(i = \sqrt{-1})$

$$s_1 < 0, \quad s_2 = \lambda + \mu i, \quad s_3 = \lambda - \mu i, \quad \lambda < 0. \tag{12}$$



Черт. 1.

Тогда будем иметь

$$\chi_2 = \sigma + \tau i, \quad \chi_3 = \sigma - \tau i, \tag{13}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= -\frac{\beta\lambda}{a(\lambda^2+\mu^2)}\left[2+\frac{b^4}{k^2a^4\Delta_1^2}\right]+\frac{b\beta^2(\lambda^2-\mu^2)}{a\alpha^2(\lambda^2+\mu^2)^2}\left[2-\frac{b^2(1+k^2)}{k^2a^2\Delta_1^2}\right],\\ \tau &= \frac{\beta\mu}{a(\lambda^2+\mu^2)}\left[2+\frac{b^4}{k^2a^4\Delta_1^2}\right]-\frac{2b\beta^2\lambda\mu}{a\alpha^2(\lambda^2+\mu^2)^2}\left[2-\frac{b^2(1+k^2)}{k^2a^2\Delta_1^2}\right].\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

[1] О некоторых задачах динамики, связанных с горнообогатительным делом, § 2, «Записки Ленинградского горного института, 1934, т.VIII.

Общий интеграл системы (7) дифференциальных уравнений принимает вид

$$\left.\begin{aligned}\xi &= Ae^{s_1 t} + Be^{(\lambda+\mu i)t} + Ce^{(\lambda-\mu i)t},\\ \eta &= A\chi_1 e^{s_1 t} + B(\sigma+\tau i)\,e^{(\lambda+\mu i)t} + C(\sigma-\tau i)\,e^{(\lambda-\mu i)t} + D.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Чтобы перейти к вещественным числам, вводим новые произвольные постоянные E и F по формулам

$$2B = E - Fi, \quad 2C = E + Fi. \tag{16}$$

Имеем

$$\left.\begin{aligned}\xi &= Ae^{s_1 t} + e^{\lambda t}[E\cos\mu t + F\sin\mu t],\\ \eta &= A\chi_1 e^{s_1 t} + e^{\lambda t}[(E\sigma + F\tau)\cos\mu t - (E\tau - F\sigma)\sin\mu t] + D.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Значения произвольных постоянных A, E, F, D определяются начальными данными r_0, r_0', θ_0, θ_0' и приведены в выноске следующего параграфа.

Уравнения (6) и (17) решают поставленный нами вначале вопрос о построении диаграммы разгрузки аналитическим способом. Из них мы видим, что при неограниченном возрастании времени t движение асимптотически стремится к равномерному по винтовой линии.

Производство вычислений, необходимых в качестве примера для действительного построения диаграммы разгрузки указанным выше способом, взял на себя В. А. Егунов. Этот пример составляет содержание следующего параграфа.

Траектория частицы, движущейся с трением под влиянием силы тяжести по косой винтовой поверхности, оказалась волнистой кривой, обвивающей упомянутую выше винтовую линию ($v = \text{const}$). Прилагаемый чертеж представляет проекцию этой траектории на горизонтальную плоскость. Окружность, соответствующая проекции винтовой линии, показана пунктиром (черт. 1).

Заметим здесь, что точность первого приближения тем выше, чем меньше абсолютное значение постоянных A, E, F и следовательно чем меньше абсолютное значение величин $r_0 - a$, r_0', $\theta_0' - \beta$, линейными однородными функциями которых эти постоянные являются. Другими словами, для получения надежных результатов нужно начальное положение, а также величину и направление начальной скорости точки брать в смежности с равномерным движением по винтовой линии.

§ 2

Пусть на поверхности прямого кругового цилиндра, радиус основания которого R, взята винтовая линия с шагом h и с углом ω наклона к плоскости основания цилиндра, так что

$$h = 2\pi R\,\operatorname{tg}\omega. \tag{1}$$

Если эту винтовую линию принять за направляющую косой винтовой поверхности, прямолинейная образующая которой составляет угол ψ с плоскостью основания цилиндра, то уравнение косой винтовой поверхности в цилиндрических координатах r, θ, z (ось Z совпадает с осью цилиндра) имеет вид

$$z = ar + b\theta, \tag{2}$$

где

$$a = \operatorname{tg}\psi, \quad b = -\frac{h}{2\pi} = -R\operatorname{tg}\omega. \tag{3}$$

В дальнейшем предполагаем ось Z направленной вертикально вверх. Дифференциальные уравнения движения тяжелой точки по вышеупомянутой винтовой поверхности имеют систему частных интегралов

$$r = \alpha, \quad \theta = \beta t, \tag{4}$$

где t — время, а постоянные α и β определяются системой уравнений

$$\left.\begin{aligned}\alpha^2 &= \frac{b^2}{2k^2(1+a^2)}\left[1 - k^2 + \sqrt{(1+k^2)^2 + 4a^2k^2}\right],\\ \beta^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right) &= \frac{ag}{\alpha}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Выше через g обозначено ускорение свободного падения и через k — коэфициент трения скольжения, связанный с углом трения φ соотношением

$$k = \operatorname{tg} \varphi. \tag{6}$$

Сохраним исходные данные, которыми пользовался проф. Л. Б. Левенсон [1] в своей книге:

$$\begin{aligned} R &= 0{,}25 \text{ м}, \\ \omega &= 25^\circ, \\ \varphi &= 20^\circ, \\ \psi &= 20^\circ. \end{aligned}$$

При помощи равенств (3) и (6) получаем

$$\left.\begin{aligned} k &= 0{,}36398, \\ a &= 0{,}36398, \\ b &= -0{,}11658. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Наконец уравнения (5) дают

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 0{,}30327 \text{ м}, \\ \beta &= 3{,}2028 \text{ 1/сек}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Таким образом система частных интегралов (4) определена. При ней для скорости v движущейся точки получается независящая от времени величина

$$v = \alpha\beta \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{a a g},$$

в нашем случае численно равная

$$v = 1{,}0406 \text{ м/сек}.$$

Полагая

$$r = a + \xi, \quad \theta = \beta t + \eta, \tag{9}$$

выше (§ 1) мы получили систему диференциальных уравнений, которой в первом приближении удовлетворяют переменные ξ и η. Интегралы этой системы зависят от корней характеристического уравнения третьей степени

$$\left(\frac{s}{\beta}\right)^3 + A_1 \left(\frac{s}{\beta}\right)^2 + A_2 \left(\frac{s}{\beta}\right) + A_3 = 0, \tag{10}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{\delta}{a}\left(1 + \frac{2a^2}{\Delta_1^2}\right), \\ A_2 &= \frac{4k^2}{\delta^2} - \frac{1 - 3\delta^2}{\Delta_1^2}, \\ A_3 &= \frac{2}{a\delta}\left[2k^2 - \frac{\delta^2(1 + k^2)}{\Delta_1^2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и

$$\delta = -\frac{b}{a}, \quad \Delta_1^2 = 1 + a^2 + \frac{b^2}{a^2}. \tag{12}$$

Пользуясь равенствами (7) и (8), находим

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= +1{,}2747, \\ A_2 &= +3{,}1511, \\ A_3 &= +1{,}9187. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Для решения уравнения (10) воспользуемся известными формулами Hudde, дающими корни уравнения

$$x^3 + px + q = 0, \tag{14}$$

---

[1] Спиральный сепаратор; его теория, расчет и проектирование, 1925, пример № 8, стр. 53 и след.

в которое обращается уравнение (10), если взять

$$\frac{s}{\beta} = x - \frac{1}{3} A_1 = x - 0{,}4249, \tag{15}$$

и в котором

$$p = -\frac{1}{3} A_1^2 + A_2 = +2{,}6095,$$

$$q = \frac{2}{27} A_1^3 - \frac{1}{3} A_1 A_2 + A_3 = +0{,}7332.$$

Имеем ($i = \sqrt{-1}$)

$$M = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = +0{,}79244,$$

$$N_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{M} = +0{,}5236,$$

$$N_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{M} = -1{,}2568,$$

$$x_1 = \sqrt[3]{N_1} + \sqrt[3]{N_2} = -0{,}2732,$$

$$x_{2,3} = -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{N_1} + \sqrt[3]{N_2}\right) \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{N_1} - \sqrt[3]{N_2}\right) = -0{,}1366 \pm 1{,}6326i.$$

Переход от x к $\frac{s}{\beta}$ по уравнению (15) дает

$$\left.\begin{aligned} \frac{s_1}{\beta} &= -0{,}6981; \\ \frac{s_{2,3}}{\beta} &= -0{,}2883 \pm 1{,}6326i. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

В дальнейшем вещественный корень s_1 обозначается просто s, а комплексные корни s_2 и s_3 представляются в виде

$$s_{2,3} = \lambda \pm \mu i.$$

Подставляем значение β из равенства (8) в равенство (16)

$$\left.\begin{aligned} s &= -2{,}2359, \\ \lambda &= -0{,}92336, \\ \mu &= +5{,}2289. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Вводим обозначения

$$U = \frac{\beta}{a}\left(2 + \frac{b^4}{k^2 a^4 \Delta_1^2}\right),$$

$$V = \frac{b\beta^2}{a\alpha^2}\left[2 - \frac{b^2(1+k^2)}{k^2\alpha^2\Delta_1^2}\right],$$

$$\chi = -\frac{U}{s} + \frac{V}{s^2},$$

$$\sigma = -\frac{U\lambda}{\lambda^2+\mu^2} + \frac{V(\lambda^2-\mu^2)}{(\lambda^2+\mu^2)^2},$$

$$\tau = \frac{U\mu}{\lambda^2+\mu^2} - \frac{2V\lambda\mu}{(\lambda^2+\mu^2)^2}.$$

Находим числовые значения параметров χ, σ, τ:

$$\left.\begin{aligned} \chi &= 2{,}7990, \\ \sigma &= 1{,}9416, \\ \tau &= 3{,}7239. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Вычисленные значения параметров α, β, s, λ, μ, χ, σ, τ позволяют составить выражения для переменных ξ и η, а затем по формулам (9) перейти к переменным r и θ:

$$\left.\begin{aligned} r &= \alpha + Ae^{st} + e^{\lambda t}(E\cos\mu t + F\sin\mu t), \\ \theta &= D + \beta t + A\chi e^{st} + e^{\lambda t}[(E\sigma + F\tau)\cos\mu t + (F\sigma - E\tau)\sin\mu t]. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Что же касается значений произвольных постоянных A, D, E, F, то они определяются следующими начальными условиями:

$$\left.\begin{aligned} t_0 &= 0, \\ r_0 &= 0{,}25 \text{ метра}, \\ \theta_0 &= 0, \\ r_0' &= 0, \\ r_0\theta_0' &= 0{,}50 \ м/сек. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Этими же величинами оперировал и проф. Л. Б. Левенсон, с тою лишь разницей, что у него начальная скорость предполагается равной нулю. Мы взяли ее отличной от нуля, исходя из того соображения, что материал поступает на сепаратор с некоторой скоростью. Эта скорость считалась перпендикулярной к радиусу-вектору. Численное значение ее проекции на горизонтальную плоскость взято равным 0,50 *м/сек*.

Если продифференцировать формулы (19) по t и подставить как в них, так и в выражениях для производных r' и θ' начальные данные, то для определения A, D, E, F получим следующие четыре уравнения:

$$\left.\begin{aligned} r_0 &= \alpha + A + E, \\ \theta_0 &= A\chi + E\sigma + F\tau + D, \\ r_0' &= As + E\lambda + F\mu, \\ \theta_0' &= \beta + A\chi s + E(\lambda\sigma - \mu\tau) + F(\lambda\tau + \mu\sigma). \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Вносим сюда числовые значения параметров α, β, s, λ, μ, χ, σ, τ, а также начальные значения функций r, r_0', θ, θ_0' при помощи равенств (8), (17), (18), (20):

$$\left.\begin{aligned} 2{,}236A + 0{,}9234E - 5{,}229F &= 0, \\ 6{,}258A + 21{,}26E - 6{,}714F &= 1{,}203, \\ A + E &= -0{,}05327, \\ D + 2{,}799A + 1{,}942E + 3{,}724F &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Решение предыдущей системы уравнений дает следующие значения произвольных постоянных [1]

$$\left.\begin{aligned} A &= -0{,}1362, \\ E &= +0{,}08288, \\ F &= -0{,}04358, \\ D &= +0{,}3824. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

[1] Значения произвольных постоянных A, E, F, D в каждом частном случае можно вычислять по их общим выражениям, не прибегая к решению системы уравнений (21).

Обозначим через G_1, G_2, G_3, H_1, H_2 коэфициенты системы дифференциальных уравнений, определяющих движение точки по винтовой поверхности,

$$G_1 = -\frac{b\beta}{a\alpha}\left(1 + \frac{2a^2}{\Delta_1^2}\right), \quad G_2 = \frac{\beta^2}{\Delta_1^2}\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right), \quad G_3 = -\frac{2k^2a^3\beta}{b^2},$$

$$H_1 = \frac{\beta}{a}\left(2 + \frac{b^4}{k^2a^4\Delta_1^2}\right), \quad H_2 = -\frac{b\beta^2}{a\alpha^2}\left[2 - \frac{b^2(1+k^2)}{k^2a^2\Delta_1^2}\right],$$

Для упрощения вида уравнений (19) положим

$$\begin{aligned} A\chi &= B, \\ E &= K\sin n, \\ F &= K\cos n, \\ E\sigma + F\tau &= L\sin l, \\ F\sigma - E\tau &= L\cos l. \end{aligned}$$

Пользуясь равенствами (18) и (23), находим:

$$\left.\begin{aligned} B &= -\ 0{,}3812, \\ K &= \ \ 0{,}09365, \\ n &= \ 117^\circ 44', \\ L &= \ \ 0{,}3933, \\ l &= \ 180^\circ 12'. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Для r и θ получаются следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} r &= \alpha + Ae^{\delta t} + Ke^{\lambda t}\sin(\mu t + n), \\ \theta &= D + \beta t + Be^{\delta t} + Le^{\lambda t}\sin(\mu t + l), \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

по которым и производились вычисления значений r и θ для моментов времени от $t = 0$ до $t = 4$ сек. через каждые 0,2 секунды (см. таблицу на стр. 39)

Исследуемая траектория частицы в проекции на горизонтальную плоскость дает спиралевидную кривую, асимптотически приближающуюся к окружности радиуса $\alpha = 0{,}3033$ *м* и переходящую периодически то снаружи внутрь окружности, то извнутри наружу (см. черт. 1). В натуре же это — волнистая кривая, обвивающая винтовую линию, уравнение (4) которой было написано ранее.

Исследуем закон изменения скорости при движении частицы. Диференцирование уравнений (25) дает

$$\left.\begin{aligned} r' &= A\delta e^{\delta t} + Ke^{\lambda t}[\lambda\sin(\mu t + n) + \mu\cos(\mu t + n)], \\ \theta' &= \beta + B\delta e^{\delta t} + Le^{\lambda t}[\lambda\sin(\mu t + l) + \mu\cos(\mu t + l)]. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Если положить

$$\begin{aligned} A\delta &= A_1, & B\delta &= B_1, \\ K\lambda &= K_1\cos m, & L\lambda &= L_1\cos m, \\ K\mu &= K_1\sin m, & L\mu &= L_1\sin m, \end{aligned}$$

то

$$\operatorname{tg} m = \frac{\mu}{\lambda}, \quad K_1^2 = K^2(\lambda^2 + \mu^2), \quad L_1^2 = L^2(\lambda^2 + \mu^2).$$

где сохранены все обозначения предыдущего параграфа. Наконец введем сокращенное обозначение

$$\nu = \lambda^2 + \mu^2 + \delta^2 - 2\lambda\delta.$$

Тогда выражения для постоянных A, E, F, D будут иметь следующий вид:

$$A = \frac{1}{\nu}[-(\alpha - r_0)(\lambda^2 + \mu^2 - G_2) + r_0'\delta + (\beta - \theta_0')G_3],$$

$$E = \frac{1}{\nu}[-(\alpha - r_0)(\delta^2 - 2\lambda\delta + G_2) - r_0'\delta - (\beta - \theta_0')G_3],$$

$$F = \frac{1}{\mu\nu}\{(\alpha - r_0)[\mu^2\delta + \lambda\delta^2 - \lambda^2\delta + G_2(\lambda - \delta)] + r_0''(\lambda^2 + \mu^2 - \lambda\delta) + (\beta - \theta_0')(\lambda - \delta)G_3\},$$

$$D = \theta_0 + \frac{1}{G_3H_2}[(\alpha - r_0)(G_2H_1 - G_1H_2) + r_0' + (\beta - \theta_0')G_2].$$

t	r	θ (в рад.)	θ (в град.)
0,0	0,2500	0,0000	0° 0′
0,2	0,2194	0,4951	28° 22′,0
0,4	0,1930	1,2723	72° 53′,8
0,6	0,2200	2,2042	126° 17′,5
0,8	0,2785	3,0435	174° 22′,8
1,0	0,3200	3,6914	211° 30′,1
1,2	0,3215	4,2004	240° 39′,9
1,4	0,2986	4,7565	272° 31′,6
1,6	0,2815	5,4122	310° 5′,8
1,8	0,2851	6,1399	351° 47′,4
2,0	0,3009	6,8370	360° + 31° 43′,9
2,2	0,3125	7,4705	68° 1′,6
2,4	0,3118	8,0679	102° 15′,3
2,6	0,3034	8,6779	137° 12′,4
2,8	0,2973	9,3241	174° 19′,9
3,0	0,2980	9,9809	212° 22′,7
3,2	0,3029	10,6486	250° 7′,1
3,4	0,3066	11,2867	286° 40′,7
3,6	0,3063	11,9127	322° 32′,8
3,8	0,3035	12,5429	358° 39′,2
4,0	0,3013	13,1850	720° + 35° 26′,6

Уравнения (26) можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned} r' &= A_1 e^{st} + K_1 e^{\lambda t} \sin(\mu t + n_1), \\ \theta' &= \beta + B_1 e^{st} + L_1 e^{\lambda t} \sin(\mu t + l_1), \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

где

$$n_1 = n + m, \quad l_1 = l + m.$$

При этом численно получается

$$\begin{aligned} A_1 &= 0{,}3045, \\ K_1 &= 0{,}4973, \\ n &= 217° 45', \\ B_1 &= 0{,}8523, \\ L_1 &= 2{,}088, \\ l_1 &= 280° 13'. \end{aligned}$$

Уравнения (27) вместе с первым из уравнений (25) показывают, что горизонтальная проекция v_1 скорости движущейся тяжелой точки, периодически изменяясь, приближается к пределу $a\beta$, численно равному 0,9713 *м/сек*.

Пользуясь формулой

$$v_1 = \sqrt{r'^2 + r^2\theta'^2}$$

и уравнениями (27), вычисляем значения v_1 для четвертой секунды времени:

t	r'	$r\theta'$	v_1
3,0	+ 0,01874	+ 0,9537	0,9539
3,2	+ 0,02598	0,9824	0,9829
3,4	+ 0,00879	0,9647	0,9647
3,6	— 0,01049	0,9584	0,9585
3,8	— 0,01474	0,9876	0,9877
4,0	— 0,00497	+ 0,9748	0,9748

Таким образом оказывается, что к концу 4-й секунды величина v_1 достаточно близко подошла к своему предельному значению.

Résumé

Le problème posé se rencontre dans la théorie du séparateur à vis.

Dirigeons l'axe des z verticalement vers le haut. L'équation de l'hélicoïde dans les coordonnées cylindriques r, θ, z a la forme

$$z = ar + b\theta.$$

Ecrivons les équations différentielles (2) du mouvement (§ 1). Les intégrales du système précédent peuvent être présentées sous la forme de

$$r = \alpha + \xi, \quad \theta = \beta t + \eta,$$

où les constantes α, β sont déterminées par les égalités (5) et les fonctions ξ, η du temps t se trouvent dans la première approximation du système (7) des équations différentielles. Nous obtenons les expressions (17) pour ξ et η, qui permettent de tracer la projection de la trajectoire du point en question sur le plan horizontal. Cette projection pour un cas particulier (§ 2) est représentée sur le dessin (fig. 1).