Записки Ленинградского горного института, т. X, вып. 1 1935
Annales de l'Institut des Mines à Leningrade, vol. X, lior. 1 1935

О движении тяжелой точки по винтовой линии на шероховатой поверхности (К теории спирального сепаратора)

Проф. *М. И. Акимов*

Mouvement d'un point pesant sur une hélice, située sur une surface dépolie

Prof. *M. I. Akimov*

В небольшой, интересной по новой постановке вопроса работе «Note sur un problème de mécanique» [1] Каталан (E. Catalan) решает задачу об определении такой гладкой поверхности, проходящей чрез данную винтовую линию с вертикальною осью, что тяжелая материальная точка, помещенная на этой поверхности в какой-нибудь точке рассматриваемой винтовой линии и получившая надлежащую начальную скорость, движется затем по этой кривой.

В работе, относящейся к теории и проектированию спирального сепаратора, проф. Л. Б. Левенсон [2] обратил внимание на важность и дал элементарное исследование более сложного случая движения тяжелой точки по винтовой линии—на шероховатой косой винтовой поверхности.

Этот случай движения был исследован мною [3] с помощью диференциальных уравнений Лягранжа.

Исходя из тех же уравнений, проф. Н. П. Неронов [4] изучил движение тяжелой точки по шероховатой косой винтовой поверхности, близкое к рассматриваемому движению по винтовой линии, и установил устойчивость этого последнего.

Обобщая задачу Каталана, я нашел затем [5] все поверхности, допускающие движение тяжелой точки по винтовым линиям при наличии трения, и исследовал условия для этих поверхностей, при которых рассматриваемое движение будет устойчивым.

---

[1] Journal de mathématiques pures et appliquées, t. 11 (1846), p. 212.

[2] Машины для обогащения полезных ископаемых. Спиральный сепаратор. Л., 1925.

[3] Л. Б. Левенсон, цитированная работа, стр. 49. — «Об одном случае движения тяжелой точки по шероховатой косой винтовой поверхности». Доклад, читанный на Всесоюзном съезде математиков в Харькове 25 июня 1930 г. Резюме доклада опубликовано в Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 11 (1931), S. 74.

[4] К теории спирального сепаратора. Доклад, читанный в Ленинградском механическом обществе 20 ноября 1930 г. — О некоторых задачах динамики. «Записки Ленинградского горного института», т. 8 (1934), стр. 252.

[5] Доклад, читанный на Всесоюзной Конференции по механике в Москве 13 мая 1932 г. — Sur un problème de mécanique. Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich. 1932, Bd. 2, S. 287. — Об одной задаче механики. Прикладная математика и механика, т. I, 1933, стр. 56. — Über die Stabilitätsbedingung der ständigen Bewegung eines schweren Punktes auf einer rauhen Schraubenfläche. Proceedings of the Fourth-International Congress for Applied Mechanics. Cambridge (1934), p. 151.

В настоящей работе, представляющей подробное и систематическое изложение полученных мною прежде результатов, приведены попутно также элементарные выводы их и указан ряд новых поверхностей, могущих найти применение в теории спирального сепаратора и представляющих, при надлежащем выборе их, известные преимущества перед обыкновенною косою винтовою поверхностью, как в смысле достижения большей устойчивости происходящего на них винтового движения, так и по возможности целесообразного выбора распределения скоростей движущихся по ним масс.

В этой работе приведены также новые результаты, относящиеся к исследованию устойчивости рассматриваемого движения по винтовой линии на шероховатой поверхности, и выяснено влияние на это движение: 1) сопротивления среды, 2) вращения поверхности вокруг вертикальной оси расположенных на ней винтовых линий.

§ 1. Общее уравнение поверхности, проходящей через данную винтовую линию

Направим ось z цилиндрической системы координат (r, φ, z) по оси данной винтовой линии вертикально вверх.

Если r_0 — радиус основания цилиндра, на котором расположена винтовая линия, то уравнение ее будет

$$r = r_0, \quad z - z_0 = a\varphi, \tag{1}$$

где $2\pi a$ — шаг винтовой линии.

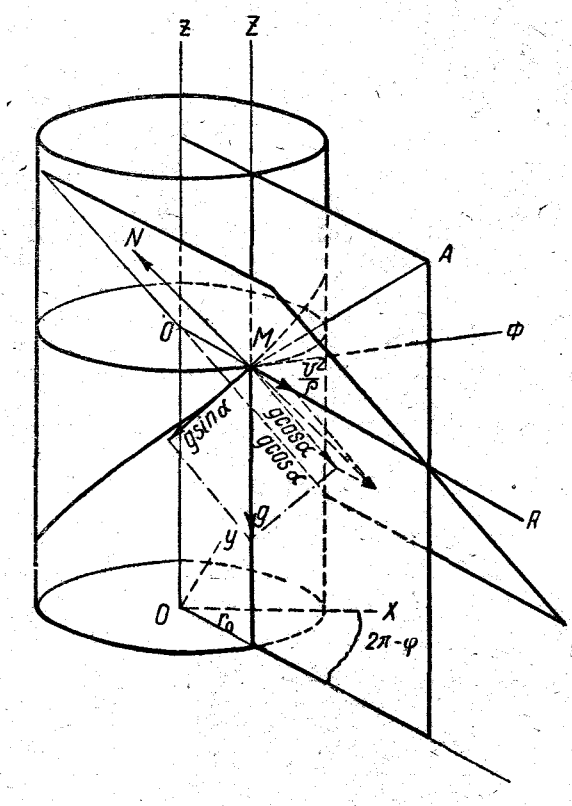


Рис. 1.

Возьмем общее уравнение поверхности в цилиндрических координатах

$$z = F(r, \varphi).$$

Допуская разложение правой части этого уравнения в ряд Тэйлора по степеням φ и $r - r_0$ с коэфициентами $a, b, c, \ldots$, можем написать его в виде

$$z - z_0 = a\varphi + b(r - r_0) + c\varphi^2 + d\varphi(r - r_0) + e(r - r_0)^2 + \ldots$$

Если это уравнение выражает поверхность, проходящую через винтовую линию (1), то в правой части его все члены, кроме первого, при $r = r_0$ должны обратиться в нуль. Можно представить поэтому общее уравнение поверхности, проходящей через винтовую линию (1), в виде

$$z - z_0 = a\varphi + (r - r_0) f(r, \varphi) \tag{2}$$

или

$$z - z_0 = a\varphi + (r - r_0) f(r_0, \varphi) + (r - r_0)^2 f_1(r, \varphi), \tag{2'}$$

где функции $f(r, \varphi)$, $f_1(r, \varphi)$ разлагаются в ряды по целым положительным степеням φ и $r - r_0$ и поэтому остаются конечными при $r = r_0$.

Пусть $a = r_0 \operatorname{tg} \alpha$, тогда α есть угол с горизонтальной плоскостью касательной к винтовой линии.

В вертикальной плоскости $\varphi = \text{const}$, проходящей через ось z, вообразим прямоугольную систему координат (r, z). Уравнение (2) выражает в этих координатах некоторую плоскую кривую, которая с изменением угла φ, т. е. при вращении плоскости

$\varphi = \text{const}$ вокруг вертикальной оси z, перемещается в этой плоскости параллельно оси z, деформируясь при этом, и своим движением в пространстве образует поверхность (2).

Уравнение

$$z - z_0 = a\varphi + (r - r_0) f(r_0, \varphi)$$

выражает прямую MA, касательную в точке $(r_0, z_0 + a\varphi)$ к рассматриваемой кривой, и эту касательную можно определить как прямую пересечения касательной плоскости к поверхности (2) в точке (r_0, φ, z) с вертикальной плоскостью, проходящей чрез эту точку и ось z.

Очевидно, что $f(r_0, \varphi) = \operatorname{tg}\beta$, где β — угол рассматриваемой прямой с горизонтальной плоскостью.

§ 2. Диференциальные уравнения движения тяжелой точки на шероховатой поверхности, проходящей чрез данную винтовую линию

Составим диференциальные уравнения движения тяжелой точки M (массы 1 и веса g) по шероховатой поверхности $z = F(r, \varphi)$ в цилиндрических координатах r, φ, z, связанных с прямоугольными декартовыми координатами x, y, z известными соотношениями

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Для этой цели рассмотрим проекции ускорения движущейся точки и сил, на нее действующих,—вертикального веса g, нормальной к поверхности реакции N и действующего в сторону противоположную скорости v трения kN (k — коэфициент трения) — на три взаимно перпендикулярные направления, в сторону которых возрастают координаты r, φ и z (см. чертеж):

1) направление прямой MR, перпендикулярной к оси цилиндра Oz и проведенной от этой оси к движущейся точке;

2) направление прямой $M\Phi$, перпендикулярной к MR и MZ;

3) направление прямой MZ, параллельной оси цилиндра.

Проекции ускорения точки M на рассматриваемые три направления будут [1]

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right), \quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Проекции веса

$$0, \ 0, \ -g.$$

Проекции нормальной реакции [2]

$$-N\frac{\frac{\partial F}{\partial r}}{\Delta}, \quad -N\frac{\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}}{\Delta}, \quad N\frac{1}{\Delta},$$

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2 + 1}.$$

Проекции силы трения

$$-kN\frac{\frac{dr}{dt}}{v}, \quad -kN\frac{r\frac{d\varphi}{dt}}{v}, \quad -kN\frac{\frac{dz}{dt}}{v},$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

---

[1] Вебстер. Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел. Перевод под ред. К. В. Меликова, 1933, стр. 24.

[2] Там же, стр. 365.

Таким образом дифференциальные уравнения движения (Лягранжа) тяжелой точки на шероховатой поверхности (2) в цилиндрических координатах будут

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 &= -N\,\frac{f(r,\varphi)+(r-r_0)\,\frac{\partial f}{\partial r}}{\Delta} - kN\,\frac{\frac{dr}{dt}}{v}, \\ r\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= +2\,\frac{dr}{at}\,\frac{d\varphi}{dt} - N\,\frac{\frac{1}{r}\left[a+(r-r_0)\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right]}{\Delta} - kN\,\frac{r\,\frac{d\varphi}{dt}}{v}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -g + \quad N\,\frac{1}{\Delta} \qquad\qquad - kN\,\frac{\frac{dz}{dt}}{v}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где

$$\Delta = \sqrt{\left[f(r,\varphi)+(r-r_0)\,\frac{\partial f}{\partial r}\right]^2 + \frac{1}{r^2}\left[a+(r-r_0)\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right]^2 + 1}.$$

Эти уравнения, вместе с уравнением поверхности (2), служат для определения рассматриваемого движения точки M, т. е. для выражения координат ее r, φ, z в функции времени t, а равным образом и для вычисления неизвестной реакции N.

Для определения этой реакции и исключения ее затем из уравнений (3) дифференцируем обе части уравнения (2) один раз и два раза по t, находим

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \left[f(r,\varphi)+(r-r_0)\,\frac{\partial f}{\partial r}\right]\frac{dr}{dt} + \left[a+(r-r_0)\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right]\frac{d\varphi}{dt}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \left[f(r,\varphi)+(r-r_0)\,\frac{\partial f}{\partial r}\right]\frac{d^2r}{dt^2} + \left[a+(r-r_0)\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right]\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \\ &\quad + 2\,\frac{dr}{dt}\,u_1 + (r-r_0)\,u_2, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где

$$u_1 = \frac{\partial f}{\partial r}\,\frac{dr}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\frac{d\varphi}{dt},$$

$$u_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial \varphi}\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Умножим теперь обе части первого из уравнений (3) на

$$-\left[f(r,\varphi)+(r-r_0)\,\frac{\partial f}{\partial r}\right],$$

второго на

$$-\frac{1}{r}\left[a+(r-r_0)\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right],$$

третьего на 1 и результат сложим; получим уравнение, левая часть которого в силу второго из равенств (4) приводится к следующему выражению

$$r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\left[f(r,\varphi)+(r-r_0)\,\frac{\partial f}{\partial r}\right] - \frac{2}{r}\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt}\left[a+(r-r_0)\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right] + 2\,\frac{dr}{dt}\,u_1 + (r-r_0)\,u_2.$$

Что же касается правой части полученного уравнения, то в силу первого из равенств (4) в ней пропадают члены, содержащие k, а коэфициент при N становится равным Δ. Таким образом находим

$$N = \frac{g + r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\left[f(r,\varphi)+(r-r_0)\,\frac{\partial f}{\partial r}\right] - \frac{2}{r}\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt}\left[a+(r-r_0)\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right] + 2\,\frac{dr}{dt}\,u_1 + (r-r_0)\,u_2}{\Delta}.$$

Введем это выражение реакции в первые два из уравнений (3), т. е.

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 &= -N\left\{\frac{f(r,\varphi)+(r-r_0)\frac{\partial f}{\partial r}}{\Delta}+k\frac{\frac{dr}{dt}}{v}\right\}, \\ r\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} &= -N\left\{\frac{\frac{1}{r}\left[a+(r-r_0)\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right]}{\Delta}+k\frac{r\frac{d\varphi}{dt}}{v}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

тогда эти уравнения, где, в силу первого из равенств (4),

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left\{1+\left[f(r,\varphi)+(r-r_0)\frac{\partial f}{\partial r}\right]^2\right\}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left\{r^2+\left[a+(r-r_0)\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right]^2\right\}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+} \\ &\quad +2\left[f(r,\varphi)+(r-r_0)\frac{\partial f}{\partial r}\right]\left[a+(r-r_0)\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right]\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}, \end{aligned} \tag{6}$$

выразят движение проекции точки M на горизонтальную плоскость (r, φ).

§ 3. Условие, при котором поверхность (2) или (2′) допускает движение тяжелой точки по винтовой линии на ней при наличии трения. Скорость этого движения

Имея в виду исследовать случай движения тяжелой точки по винтовой линии на шероховатой поверхности (2), заметим, что если точка движется на поверхности (2) по винтовой линии (1), то ее проекция на плоскость (r, φ) движется по окружности $r = r_0$.

Положим поэтому в уравнениях (5) $r = r_0$, тогда первое из них обращается в следующее

$$-r_0\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{g+r_0\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 f(r_0,\varphi)}{\Delta_0}\frac{f(r,\varphi)}{\Delta_0},$$

где

$$\Delta_0 = \sqrt{[f(r_0,\varphi)]^2+\frac{a^2}{r_0^2}+1},$$

т. е.

$$-r_0\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\left\{[f(r_0,\varphi)]^2+\frac{a^2}{r_0^2}+1\right\} = -g\cdot f(r_0,\varphi)-r_0\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2[f(r_0,\varphi)]^2,$$

откуда

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{gr_0 f(r_0,\varphi)}{a^2+r_0^2}, \tag{7}$$

или

$$v = \sqrt{gr_0 f(r_0,\varphi)}, \tag{8}$$

так как при $r = r_0$ из выражения (6) или непосредственно из равенства [1]

$$-r_0\frac{d\varphi}{dt} = v\cos\alpha,$$

где

$$\cos\alpha = \frac{r_0}{\sqrt{a^2+r_0^2}},$$

имеем

$$v = -\sqrt{a^2+r_0^2}\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

---

[1] При движении точки вниз по винтовой линии $\frac{dz}{dt}$, а потому, в силу уравнения (1), и $\frac{d\varphi}{dt}$ отрицательны. См. чертеж.

Второе из уравнений (5) после подстановки $r = r_0$ дает

$$r_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g + r_0\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 f(r_0, \varphi)}{\Delta_0}\left(\frac{a}{\frac{r_0}{\Delta_0}} + k\,\frac{r_0\frac{d\varphi}{dt}}{v}\right),$$

где также

$$v = -\sqrt{a^2 + r_0^2}\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

После легких преобразований отсюда находим

$$r_0\Delta_0^2\,\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -2\left[g + r_0\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 f(r_0, \varphi)\right]\left(\frac{a}{r_0} - k\,\frac{r_0}{\sqrt{a^2 + r_0^2}}\,\Delta_0\right)\frac{d\varphi}{dt},$$

или, в силу уравнения (7),

$$\frac{gr_0^2}{a^2 + r_0^2}\,\Delta_0^2\,\frac{df(r_0, \varphi)}{d\varphi} =$$

$$= -2\left\{g + \frac{gr_0^2}{a^2 + r_0^2}\,[f(r_0, \varphi)]^2\right\}\left\{\frac{a}{r_0} - k\sqrt{1 + \frac{r_0^2}{a^2 + r_0^2}\,[f(r_0, \varphi)]^2}\right\},$$

или, наконец,

$$\frac{df(r_0, \varphi)}{d\varphi} = -2\left\{\operatorname{tg}\alpha - k\sqrt{1 + \cos^2\alpha\cdot[f(r_0, \varphi)]^2}\right\}. \tag{9}$$

Если $f(r_0, \varphi)$ удовлетворяет этому уравнению, то поверхность (2), проходящая чрез винтовую линию (1), допускает движение тяжелой точки по этой кривой, причем в уравнении поверхности (2′) $f_1(r, \varphi)$ остается произвольной функцией r и φ, сохраняющей конечное значение при $r = r_0$.

Скорость рассматриваемого движения по винтовой линии (1) на поверхности (2) изменяется по закону (8).

Таким образом уравнения (8) и (9) решают задачу, составившую предмет исследования в этом параграфе.

§ 4. Элементарный вывод уравнений (8) и (9)

В виду важности уравнений (8) и (9) для последующего исследования, представляется не лишним вывести их элементарным путем.

Для этой цели составим уравнения рассматриваемого движения в проекциях на касательную к винтовой линии (1) на поверхности (2) и на прямую MA.

На точку M действуют вес ее g, нормальная к поверхности реакция N и сила трения kN.

Касательная и центробежная силы инерции при движении точки M по винтовой линии равны $\frac{dv}{dt}$ и $\frac{v^2}{\varrho}$, где $\varrho = \frac{r_0}{\cos^2\alpha}$ есть радиус главной кривизны винтовой линии.

Согласно начала д'Аламбера между всеми этими силами в каждый момент существует равновесие.

В проекции на касательную к винтовой линии уравнение равновесия будет

$$-\frac{dv}{dt} + g\sin\alpha - kN = 0. \tag{10}$$

Так как нормаль к поверхности в данной точке на ней перпендикулярна к касательной в этой точке к кривой на поверхности, то реакция N лежит в нормальной плоскости к винтовой линии. В этой же плоскости расположены и две взаимно перпендикулярные [1] силы $g\cos\alpha$, $\frac{v^2}{\varrho}$, которые уравновешивают N, поэтому

$$N^2 = g^2\cos^2\alpha + \frac{v^4}{\varrho^2}. \tag{11}$$

[1] Составляющие веса $g\sin\alpha$ и $g\cos\alpha$ расположены в вертикальной плоскости, к которой перпендикулярна горизонтальная центробежная сила $\frac{v^2}{\varrho}$.

Уравнение равновесия между силами N, $g\cos\alpha$ и $\frac{v^2}{\varrho}$ в проекции на прямую MA будет

$$\frac{v^2}{\varrho}\cos\beta - g\cos^2\alpha\sin\beta = 0, \tag{12}$$

так как нормальная реакция перпендикулярна к этой прямой, расположенной в касательной плоскости к поверхности (2), а проекция силы $g\cos\alpha$ на MA равна [1]

$$-g\cos^2\alpha\cdot\sin\beta.$$

Из уравнения (12) имеем

$$v^2 = gr_0\operatorname{tg}\beta,$$

т. е.

$$v = \sqrt{gr_0 f(r_0, \varphi)}. \tag{8}$$

Затем из уравнения (11) находим

$$N = g\cos\alpha\cdot\sqrt{1+\cos^2\alpha\,[f(r_0,\varphi)]^2}. \tag{13}$$

Наконец, из уравнения (10), т. е.

$$\frac{1}{v}\frac{d(v^2)}{dt} = 2(g\sin\alpha - kN),$$

пользуясь равенствами (8) и (13), получаем

$$\frac{gr_0\frac{d\varphi}{dt}}{v}\frac{df(r_0,\varphi)}{d\varphi} = 2\{g\sin\alpha - kg\cos\alpha\cdot\sqrt{1+\cos^2\alpha\,[f(r_0,\varphi)]^2}\}$$

и таким образом вновь приходим к уравнению

$$\frac{df(r_0,\varphi)}{d\varphi} = -2\{\operatorname{tg}\alpha - k\cdot\sqrt{1+\cos^2\alpha\,[f(r_0,\varphi)]^2}\}.$$

§ 5. Движение тяжелой точки по винтовой линии на гладкой поверхности

Имея в виду исследовать подробнее различные случаи движения тяжелой точки по винтовой линии на шероховатой поверхности, рассмотрим сперва случай гладкой поверхности.

Тогда

$$k = 0.$$

Уравнение (9) дает в этом случае

$$f(r,\varphi) = -2\operatorname{tg}\alpha\cdot\varphi = -2\frac{a}{r_0}\varphi.$$

Уравнение (2′) искомой поверхности будет

$$z - z_0 = a\varphi - 2\frac{r-r_0}{r_0}a\varphi + (r-r_0)^2\cdot f_1(r,\varphi).$$

Если выбрать произвольную функцию $f_1(r,\varphi)$ так, чтобы правая часть здесь оказалась разложением

$$\frac{a\varphi}{\left(1+\frac{r-r_0}{r_0}\right)^2}$$

по степеням $r-r_0$, то это уравнение примет вид

$$z - z_0 = ar_0^2\frac{\varphi}{r^2}. \tag{14}$$

[1] Проекции на MA силы $g\cos\alpha$ и ее вертикальной составляющей $g\cos^2\alpha$ одинаковы, так как прямая MA и сила $g\cos\alpha$ лежат во взаимно перпендикулярных вертикальных плоскостях.

Поверхность, выражаемая уравнением (14), найдена и исследована Catalan'ом. [1] Можно составить представление о форме этой поверхности, рассматривая различные сечения ее.

Горизонтальные сечения, т. е. сечения плоскостью $z = \text{const}$, выражаются уравнением

$$r^2 = \text{const}\ \varphi$$

и представляют спирали, аналогичные спирали Архимеда.

Сечения круговыми цилиндрами $r = \text{const}$, с осью Oz, представляют винтовые линии

$$z - z_0 = \text{const}\ \varphi.$$

Сечения вертикальными плоскостями $\varphi = \text{const}$, проходящими чрез ось z, представляют гиперболические кривые

$$z - z_0 = \frac{\text{const}}{r^2},$$

имеющие асимптотами ось z ($r = 0$) и след секущей плоскости с горизонтальной плоскостью $z = z_0$.

Весьма простой вид имеет для поверхности (14) еще уравнение кривых наибольшего ската.

Диференциальное уравнение горизонтальной проекции кривой наибольшего ската на поверхности $z = F(x, y)$ имеет вид [2]

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,dy - \frac{\partial z}{\partial y}\,dx = 0.$$

Для уравнения (14) находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ar_0^2\left(\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{2\varphi}{r^3}\,\frac{\partial r}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = ar_0^2\left(\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{2\varphi}{r^3}\,\frac{\partial r}{\partial y}\right).$$

Но

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

и

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

и

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dx = -\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} = -\frac{dr}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}\,dy - \frac{\partial r}{\partial y}\,dx = \frac{x\,dy - y\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}\ d\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = r\,d\varphi.$$

---

[1] Цитированная работа.

[2] Если dx, dy, dz — угловые коэфициенты касательной в данной точке (x, y, z) к кривой наибольшего ската, а d_1x, d_1y, d_1z — угловые коэфициенты касательной к горизонтальному сечению поверхности $z = F(x, y)$ в той же точке, то условие ортогональности этих двух кривых в рассматриваемой точке будет

$$dx\,d_1x + dy\,d_1y + dz\,d_1z = 0.$$

Для горизонтального сечения поверхности имеем

$$d_1z = \frac{\partial z}{\partial x}\,d_1x + \frac{\partial z}{\partial y}\,d_1y = 0.$$

Из двух последних равенств следует написанное выше диференциальное уравнение горизонтальной проекции кривой наибольшего ската.

Следовательно

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,dy - \frac{\partial z}{\partial y}\,dx = ar_0^2\left(-\frac{dr}{r^3} - \frac{2\varphi d\varphi}{r^2}\right) = 0,$$

т. е.

$$\frac{dr}{r} + 2\varphi d\varphi = 0,$$

откуда

$$r = \text{const}\, e^{-\varphi^2}.$$

Таково уравнение горизонтальной проекции кривой наибольшего ската на поверхности (14).

В силу уравнения (8) скорость движения тяжелой точки по винтовой линии на поверхности (14), в согласии с теоремой живой силы, будет

$$v = \sqrt{2g\,(z_0 - z)}.$$

Движение на этой поверхности, начинаясь без начальной скорости из любого положения на горизонтальной прямой ($z = z_0$, $\varphi = 0$) на высоте $z = z_0$, происходит затем по соответствующей винтовой линии.

§ 6. Движение тяжелой точки по винтовой линии на шероховатой винтовой поверхности

Для случая шероховатой поверхности ($k \neq 0$) частному решению уравнения (9)

$$f(r_0, \varphi) = f'(r_0)$$

соответствует уравнение поверхности (2′)

$$z - z_0 = a\varphi + (r - r_0)f'(r_0) + (r - r_0)^2 f_1(r, \varphi),$$

которая будет винтовою поверхностью

$$z = a\varphi + f(r), \tag{15}$$

если выбрать произвольную функцию $f_1(r, \varphi)$ независящей от φ.

Движение по винтовой линии на этой поверхности происходит с постоянной скоростью [1] [уравнение (8)]

$$v_0 = \sqrt{gr_0 f'(r_0)}, \tag{16}$$

причем должны выполняться условия

$$f'(r_0) > 0$$

и, в силу уравнения (9),

$$\operatorname{tg}\alpha - k\sqrt{1 + \cos^2\alpha \cdot [f'(r_0)]^2} = 0. \tag{17}$$

Здесь

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{r_0}, \quad \cos\alpha = \frac{r_0}{\sqrt{a^2 + r_0^2}}.$$

Согласно условию (17) частицы с различным коэфициентом трения k движутся на винтовой поверхности по винтовым линиям различного радиуса r_0. В этом можно видеть основание для применения винтовых поверхностей в спиральных сепараторах, употребляемых в горнообогатительном деле и сельском хозяйстве. [2]

---

[1] Эта формула тождественна с формулой для скорости движения тяжелой точки по параллели на гладкой поверхности вращения с вертикальною осью. См. P. Appell, Traité de mécanique rationnelle, t. I (1926), p. 513.

[2] Л. Б. Левенсон, Цитированная работа, стр. 34.

Простейшая винтовая поверхность, на которой возможно движение тяжелой точки по винтовой линии при наличии трения, т. е. с соблюдением условия (17), соответствует значению

$$f'(r_0) = \operatorname{tg}\beta = b = \text{const}.$$

Такая поверхность носит название косой винтовой поверхности [1] и выражается уравнением

$$z = a\varphi + br, \quad (\varphi = 0,\ z_0 = br_0). \tag{18}$$

В обычных конструкциях спирального сепаратора находит применение исключительно лишь эта винтовая поверхность. [2]

Уравнения (5), (16) и (17) для этой поверхности будут [3]

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 &= -N\left(\frac{b}{\Delta} + k\,\frac{\frac{dr}{dt}}{v}\right), \\ r\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt} &= -N\left(\frac{a}{\Delta} + k\,\frac{r\frac{d\varphi}{dt}}{v}\right), \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

где

$$N = \frac{g - \frac{2a}{r}\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt} + br\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}{\Delta},$$

$$\Delta = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{r^2} + 1},$$

$$v = \sqrt{(1+b^2)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + (r^2+a^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2ab\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt}},$$

$$v_0 = \sqrt{gr_0 b}, \tag{16'}$$

$$\operatorname{tg}\alpha - k\sqrt{1 + \cos^2\alpha \cdot b^2} = 0. \tag{17'}$$

Эти уравнения являются исходными в работе Н. П. Неронова [4], относящейся к исследованию движения тяжелой точки на поверхности (18) с трением, близкого к рассматриваемому движению по винтовой линии.

Отметим теперь следующие случаи других винтовых поверхностей, движение по винтовым линиям на которых обладает определенными заданными свойствами.

---

[1] Косая винтовая поверхность образуется движением прямой, наклоненной под постоянным углом к некоторой оси и равномерно скользящей одним концом вдоль этой оси, в то время как вся прямая равномерно вращается вокруг этой оси.

Такую поверхность представляет косоугольная нарезка винта.

В статике машин выводится для этого винта следующее соотношение между осевым давлением на винт Q и наименьшим вращающим моментом M, при котором не происходит саморазвинчивания винта (см., например, Делоне, Лекции по практической механике, 1901, стр. 155.—Autenrieth, Technische Mechanik, 1922, S. 119)

$$M = Qr_0\,\frac{\operatorname{tg}\alpha - k\cdot\cos\alpha\cdot\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta}}{1 + k\cdot\sin\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta}},$$

где r_0 радиус средней винтовой линии, к точкам которой отнесены среднее нормальное к поверхности давление N и трение kN. При $M = 0$ отсюда вновь получается равенство (17').

[2] Л. Б. Левенсон, Цитированная работа, стр. 21.

[3] Уравнения (5') даны мною. См. Л. Б. Левенсон, Цитированная работа, стр. 49.—Zeitshrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 11, 1931, S. 74.

Уравнения (16') и (17') выведены впервые проф. Л. Б. Левенсоном элементарным путем. Цитированная работа, стр. 33 и 34.

[4] Доклад, читанный в Ленинградском механическом обществе 20 ноября 1930 г.—«Записки Ленинградского горного института», т. 8, 1934, стр. 252.

Если движение тяжелых частиц по всем винтовым линиям на поверхности (15) происходит с одной и той же скоростью, то независимо от величины r_0 должно быть

$$v_0 = \sqrt{g r_0 \cdot f'(r_0)} = \text{const},$$

откуда

$$f'(r_0) = \frac{\text{const}}{r_0}.$$

Этому условию удовлетворяет функция

$$f(r) = C \log r, \quad C = \text{const},$$

которой соответствует винтовая поверхность

$$z = a\varphi + C \log r,$$

образуемая движением логарифмической кривой

$$z = C \log r,$$

перемещающейся параллельно оси z в вертикальной плоскости (r, z), в то время как сама эта плоскость вращается вокруг той же оси.

Если движение тяжелых частиц по всем винтовым линиям на поверхности (15) происходит с равною вертикальною скоростью $\left(\frac{dz}{dt} = \text{const}\right)$, т. е., в силу уравнения (1) $\left(\frac{d\varphi}{dt} = \text{const}\right)$, с равным периодом обращения частиц вокруг вертикальной оси этих линий (аналогично случаю обращения с равным периодом тяжелых частиц по параллелям на гладком параболоиде вращения с вертикальною осью), то независимо от величины r_0 должно быть

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{v_0}{\sqrt{a^2 + r_0^2}} = -\sqrt{\frac{g r_0 f'(r_0)}{a^2 + r_0^2}} = \text{const}.$$

Этому условию удовлетворяет функция

$$f(r) = C\left(\frac{r^2}{2} + a^2 \log r\right), \quad C = \text{const}.$$

Соответствующая винтовая поверхность

$$z = a\varphi + C\left(\frac{r^2}{2} + a^2 \log r\right)$$

может найти применение в тех случаях при устройстве сепаратора, когда разгрузка разнородных разделившихся частиц смеси должна происходить одновременно.

Если движение тяжелых частиц при данном коэфициенте трения k может происходить по любой винтовой линии на поверхности (15), то независимо от величины r_0 должно быть

$$\operatorname{tg} \alpha - k\sqrt{1 + \cos^2 \alpha \cdot [f'(r_0)]^2} = 0,$$

т. е.

$$\frac{a}{r_0} - k\sqrt{1 + \frac{r_0^2}{a^2 + r_0^2}[f'(r_0)]^2} = 0,$$

откуда

$$f'(r_0) = \sqrt{\left(\frac{1}{k^2}\,\frac{a^2}{r_0^2} - 1\right)\left(\frac{a^2}{r_0^2} + 1\right)}.$$

Этому условию удовлетворяет функция

$$f(r) = \int_{\varrho}^{r} \sqrt{\left(\frac{1}{k^2}\,\frac{a^2}{r^2} - 1\right)\left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right)}\, dr,$$

$$0 < \varrho \leqslant r \leqslant \frac{a}{k},$$

которой соответствует винтовая поверхность (15), обладающая рассматриваемым свойством.

§ 7. Дифференциальные уравнения движения тяжелой точки на шероховатой винтовой поверхности (15), близкого к движению $r = r_0$, $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0$ по винтовой линии (1). Уравнения первого приближения (уравнения в «вариациях»).

Имея в виду исследовать [1] движение тяжелой точки на шероховатой винтовой поверхности (15), близкое к рассматриваемому движению ее [2]

$$r = r_0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0$$

по винтовой линии (1), положим в уравнениях (5)

$$r = r_0 + \xi, \quad \varphi = \omega_0 t + \eta,$$

где

$$\omega_0 = -\frac{v_0}{\sqrt{a^2 + r_0^2}}, \tag{19}$$

а ξ, η — подлежащие определению новые функции переменного t, и выведем из этих уравнений, принимая во внимание условия (16) и (17) и считая, что значения

$$\xi, \ \eta, \quad \frac{d\xi}{dt} = \xi', \quad \frac{d\eta}{dt} = \eta'$$

остаются с изменением t достаточно малыми, дифференциальные уравнения для ξ, η.

Для случая винтовой поверхности уравнение (2) приводится к виду (15). Поэтому

$$z_0 + (r - r_0) f(r, \varphi) = f(r),$$

$$f(r, \varphi) + (r - r_0) \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial r} = f'(r),$$

$$(r - r_0) \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial \varphi} = 0,$$

и можно переписать тогда дифференциальные уравнения движения (5) следующим образом

$$\Delta^2 \frac{d^2 r}{dt^2} - r\Delta^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \Delta N \left\{ f'(r) + k\Delta \frac{\frac{dr}{dt}}{v} \right\} = 0, \tag{20}$$

$$r^2\Delta^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2r\Delta^2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \Delta N \left\{ a + kr^2\Delta \frac{\frac{d\varphi}{dt}}{v} \right\} = 0, \tag{21}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \sqrt{1 + f'^2(r) + \frac{a^2}{r^2}}, \\ v &= \sqrt{[1 + f'^2(r)] \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + (r^2 + a^2) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2af'(r) \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt}} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

и

$$N = \frac{1}{\Delta} \left[g + r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 f'(r) - 2 \frac{a}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + f''(r) \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \right],$$

---

[1] Для случая движения тяжелой точки на шероховатой косой винтовой поверхности такое исследование выполнено впервые Н. П. Нероновым. См. цитированную работу.

[2] Движение

$$r = r_0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0$$

называется установившимся (steady motion, ständige Bewegung), так как близкое к нему «возмущенное» движение

$$r = r_0 + \xi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \eta'$$

будет при данных начальных условиях тождественным, в какой бы момент оно ни началось. Такой характер возмущенного движения обусловливается формой дифференциальных уравнений (27) для ξ, η, коэфициенты которых имеют независящие от времени t постоянные значения.

так как

$$2\frac{dr}{dt}u_1+(r-r_0)u_2=$$

$$=\frac{d^2[(r-r_0)f(r,\varphi)]}{dt^2}-\frac{\partial[(r-r_0)f(r,\varphi)]}{\partial r}\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{\partial[(r-r_0)f(r,\varphi)]}{\partial\varphi}\frac{d^2\varphi}{dt^2}=$$

$$=\frac{d^2f(r)}{dt^2}-f'(r)\frac{d^2r}{dt^2}=f''(r)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2.$$

После подстановки из (22) значений Δ^2 и N, уравнение (20) примет вид

$$\Delta^2\frac{d^2r}{dt^2}-r\left[1+f'^2(r)+\frac{a^2}{r^2}\right]\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+$$

$$+\left[g+r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2f'(r)-2\frac{a}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+f''(r)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]\left\{f'(r)+k\Delta\frac{\frac{dr}{dt}}{v}\right\}=0,$$

т. е.

$$\Delta^2\frac{d^2r}{dt^2}-\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+krf'(r)\Delta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{1}{v}+$$

$$+\left[g-2\frac{a}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+f''(r)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]\left\{f'(r)+k\Delta\frac{\frac{dr}{dt}}{v}\right\}=0. \qquad (20_1)$$

Эта форма уравнения (20) окажется полезной в дальнейших вычислениях
Положим теперь в уравнениях (20) и (21)

$$r=r_0+\xi,\quad \varphi=\omega_0 t+\eta$$

и разложим левые части их по степеням ξ, ξ', η'.

Введя обозначения

$$\frac{dr}{dt}=r',\quad \frac{d\varphi}{dt}=\varphi',$$

$$\Delta_0=\Delta|_{r=r_0}=\sqrt{1+f'^2(r_0)+\frac{a^2}{r_0^2}},$$

$$N_0=|N|_{\substack{r=r_0\\ r'=0\\ \varphi'=\omega_0}}=\frac{1}{\Delta_0}[g+r_0\omega_0^2f'(r_0)]$$

и пользуясь равенствами

$$v_0=\sqrt{gr_0f'(r_0)}, \qquad (16)$$

$$\frac{a}{r_0}-k\sqrt{1+\frac{r_0^2}{a^2+r_0^2}f'^2(r_0)}=0 \qquad (17)$$

и

$$\omega_0=-\frac{v_0}{\sqrt{a^2+r_0^2}}, \qquad (19)$$

согласно которым

$$k=\frac{a\sqrt{a^2+r_0^2}}{r_0^2\Delta_0},\ ^1 \qquad (23)$$

$$av_0+kr_0^2\Delta_0\omega_0=0,\ ^2 \qquad (24)$$

$$N_0=\frac{1}{\Delta_0}\left[g+r_0\frac{v_0^2}{r_0^2+a^2}f'(r_0)\right]=\frac{1}{\Delta_0}\left[g+r_0\frac{gr_0f'(r_0)}{r_0^2+a^2}f'(r_0)\right]=\frac{gr_0^2}{r_0^2+a^2}\Delta_0,\ ^3 \qquad (25)$$

$$kN_0=\frac{ag}{\sqrt{r_0^2+a^2}},\ ^4 \qquad (26)$$

для коэфициентов рассматриваемых разложений получим следующие значения.

---

[1] В силу (17)
[2] В силу (19) и (23), или непосредственно из (21).
[3] В силу (16) и (19), или непосредственно из (13).
[4] В силу (23) и (25), или непосредственно из (10).

В разложении левой части уравнения (20), для коэфициента при ξ'' находим значение

$$\Delta_0^2.$$

Коэфициент при ξ', равный значению при $r = r_0$, $r' = 0$, $\varphi' = \omega_0$ производной по r' от левой части уравнения (20), будет

$$\frac{kN_0\Delta_0^2}{v_0} + \Delta_0 f'(r_0)\left|\frac{dN}{dr'}\right|_{\substack{r=r_0\\ r'=0\\ \varphi'=\omega_0}},$$

т. е., в силу (26),

$$\frac{ag}{v_0\sqrt{r_0^2+a^2}}\,\Delta_0^2 - 2\,\frac{a}{r_0}\,\omega_0 f'(r_0)$$

и на основании (19) и (16) окончательно

$$\frac{ag}{v_0\sqrt{r_0^2+a^2}}\,[\Delta_0^2 + 2f'^2(r_0)].$$

Коэфициенты при ξ и η' в рассматриваемом разложении равны значениям при

$$r = r_0, \quad r' = 0, \quad \varphi' = \omega_0$$

производных от левой части уравнения (20), взятых соответственно по r и по φ'.

Коэфициент при ξ будет

$$-\left(1-\frac{a^2}{r_0^2}\right)\omega_0^2 + gf''(r_0)$$

или, в силу равенства (19),

$$\left(\frac{a^2}{r_0^2}-1\right)\frac{v_0^2}{r_0^2+a^2} + gf''(r_0),$$

а коэфициент при η'

$$-2\left(r_0+\frac{a^2}{r_0}\right)\omega_0$$

или на основании того же равенства (19)

$$2\,\frac{v_0\sqrt{r_0^2+a^2}}{r_0}$$

или, в силу (16),

$$\frac{2gf'(r_0)\sqrt{r_0^2+a^2}}{v_0}.$$

После подстановки

$$r = r_0 + \xi, \quad \varphi = \omega_0 t + \eta$$

в уравнение (21), в разложении левой части этого уравнения по степеням ξ, ξ', η', коэфициент при ξ' будет равен значению при $r = r_0$, $r' = 0$, $\varphi' = \omega_0$ производной от левой части уравнения (21) по r'. В силу равенства (24) этот коэфициент будет

$$2r_0\Delta_0^2\omega_0 - \Delta_0^2 N_0 k r_0^2\,\frac{1}{v_0^2}\left|\frac{dv}{dr'}\right|_{\substack{r=r_0\\ r'=0\\ \varphi'=\omega_0}}$$

или, в силу (26),

$$\omega_0 r_0\Delta_0^2\left[2-\frac{agr_0}{\sqrt{r_0^2+a^2}}\,\frac{1}{v_0^2}\,\frac{af'(r_0)\omega_0}{v_0}\right]$$

или, на основании (19) и (16),

$$\omega_0 r_0\Delta_0^2\left(2+\frac{a^2}{r_0^2+a^2}\right)$$

и окончательно

$$-v_0 r_0\Delta_0^2\,\frac{2r_0^2+3a^2}{(r_0^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Коэфициент при ξ равен значению при $r = r_0$, $r' = 0$, $\varphi' = \omega_0$ производной от левой части рассматриваемого уравнения (21) по r, именно

$$\Delta_0 N_0 k \omega_0 \left| \frac{d\left(\frac{r^2\Delta}{v}\right)}{dr} \right|_{\substack{r=r_0 \\ r'=0 \\ \varphi'=\omega_0}},$$

т. е.

$$\Delta_0 N_0 k \omega_0 \left[-r_0^2 \Delta_0 \frac{1}{v_0^2} \frac{r_0 \omega_0^2}{v} + \frac{1}{v_0} \frac{2r_0^3 \{1 + f'^2(r_0)\} + r_0^4 f'(r_0) f''(r_0) + a^2 r_0}{r^2 \Delta_0} \right],$$

или, в силу (24),

$$\Delta_0 N_0 \left[a \frac{r_0 \omega_0^2}{v_0^2} + \frac{k\omega_0}{v_0} \cdot \frac{2r_0^3 \{1 + f'^2(r_0)\} + r_0^4 f'(r_0) f''(r_0) + a^2 r_0}{r_0^2 \Delta_0} \right]$$

или, в силу (25), (19) и (23),

$$\frac{g r_0^2}{r_0^2 + a^2} \Delta_0^2 a r_0 \left[\frac{1}{r_0^2 + a^2} - \frac{1}{r_0^2} \frac{2r_0^2 \{1 + f'^2(r_0)\} + r_0^3 f'(r_0) f''(r_0) + a^2}{r_0^2 \Delta_0^2} \right]$$

или еще

$$\frac{a g r_0^3}{r_0^2 + a^2} \Delta_0^2 \frac{r_0^4 \{1 + f'^2(r_0)\} + a^2 r_0^2 - (r_0^2 + a^2)[2r_0^2 \{1 + f'^2(r_0)\} + r_0^3 f'(r_0 f''(r_0) + a^2]}{(r_0^2 + a^2) r_0^4 \Delta_0^2}$$

или, наконец,

$$-\frac{ag}{(r_0^2 + a^2)^2} \frac{r_0^4 \{1 + f'^2(r_0)\} + [2r_0^2 \{1 + f'^2(r_0)\} + a^2] a^2 + (r_0^2 + a^2) r_0^3 f'(r_0) f''(r_0)}{r_0}.$$

Коэфициент при η' равен значению при $r = r_0$, $r' = 0$, $\varphi' = \omega_0$ производной от левой части уравнения (21) по φ', т. е.

$$\Delta_0 N_0 k r_0^2 \Delta_0 \left| \frac{d\frac{\varphi'}{v}}{d\varphi'} \right|_{\substack{r=r_0 \\ r'=0 \\ \varphi'=\omega_0}} = 0,$$

так как, в силу (19),

$$\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_0^2} \frac{(r_0^2 + a^2)\omega_0^2}{v_0} = 0.$$

Наконец, коэфициент при η'' равен

$$r_0^2 \Delta_0^2.$$

Таким образом, после подстановки в левые части уравнений (20) и (21)

$$r = r_0 + \xi, \quad \varphi = \omega_0 t + \eta$$

и разложения их по степеням малых величин ξ, ξ', η', приходим, приняв во внимание условия (16) и (17), к следующей системе диференциальных уравнений для ξ и η

$$\left.\begin{aligned} f_1^{(1)} + f_2^{(1)} + \ldots + f_n^{(1)} + \ldots = 0, \\ f_1^{(2)} + f_2^{(2)} + \ldots + f_n^{(2)} + \ldots = 0, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

где $f_n^{(i)}$, $(i = 1, 2)$, суть члены n-го измерения относительно ξ, ξ', η' соответственно в первом и втором уравнениях этой системы.

Ограничиваясь в этой системе членами первого измерения относительно ξ, ξ', η', получаем систему линейных диференциальных уравнений

$$f_1^{(1)} = 0, \quad f_1^{(2)} = 0,$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta_0^2\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{ag}{v_0\sqrt{r_0^2+a^2}}[\Delta_0^2+2f'^2(r_0)]\frac{d\xi}{dt}+\\
&+\left[\left(\frac{a^2}{r_0^2}-1\right)\frac{v_0^2}{r_0^2+a^2}+gf''(r_0)\right]\xi+2\,\frac{1}{v_0}\,gf'(r_0)\sqrt{r_0^2+a^2}\,\frac{d\eta}{dt}=0,\\
&-v_0r_0\Delta_0^2\frac{2r_0^2+3a^2}{(r_0^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{d\xi}{dt}-\frac{ag}{(r_0^2+a^2)}\,\frac{1}{r_0}\times\\
&\times\{r_0^4[1+f'^2(r_0)]+[2r_0^2(1+f'^2(r_0))+a^2]a^2+(r_0^2+a^2)r_0^3f'(r_0)f''(r_0)\}\xi+\\
&+r_0^2\Delta_0^2\,\frac{d^2\eta}{dt^2}=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(28)$$

которая носит название системы уравнений в вариациях ξ, η координат r, φ и будет играть фундаментальную роль в дальнейшем исследовании движения, близкого к рассматриваемому движению по винтовой линии.

§ 8. Условия устойчивости рассматриваемого движения по винтовой линии на поверхности (15)

Представим для краткости уравнения (20) и (21) в виде

$$f^{(1)}(r, r', \varphi', r'', \varphi'')=0,$$
$$f^{(2)}(r, r', \varphi', r'', \varphi'')=0.$$

Обозначая через $f_q^{(i)'}$, $i=1, 2$, значения при $r=r_0$, $r'=0$, $\varphi'=\omega_0$ производных от левых частей этих уравнений по одному из переменных

$$q=r, r', \varphi', r'', \varphi'',$$

можем переписать систему уравнений (28) следующим образом [1]

$$\left.\begin{aligned}
&f_{r''}^{(1)'}\xi''+f_{r'}^{(1)'}\xi'+f_r^{(1)'}\xi+f_{\varphi'}^{(1)'}\eta'=0,\\
&f_{r''}^{(2)'}\xi'+f_r^{(2)'}\xi+f_{\varphi''}^{(2)'}\eta''=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(29)$$

Общее решение системы этих уравнений, которая приводится (если принять η' за одну из искомых функций) к системе третьего порядка, так как координата η в ней явно не входит, можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\xi=C_1\xi_1+C_2\xi_2+C_3\xi_3,\\
&\eta'=C_1\eta_1'+C_2\eta_2'+C_3\eta_3'
\end{aligned}\right\},\qquad(30)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&\xi_i=e^{s_it},\\
&\eta_i'=A_ie^{s_it}
\end{aligned}\right\}\qquad(31)$$
$$(i=1, 2, 3)$$

суть частные решения этой системы.

---

[1] Приравнивая нулю коэфициенты при ξ в этих уравнениях, получим $f_r^{(1)'}=0$. $f_r^{(2)'}=0$. Каждое из двух последних уравнений будет (если ввести вместо r_0 обозначение r) дифференциальным уравнением 2-го порядка относительно $f(r)$. Интегрируя первое уравнение, находим

$$f(r)=C_1\left(\frac{r^2}{2}+a^2\log r\right)+C_2,$$

а интегрируя второе

$$f(r)=\int\sqrt{\left(\frac{1}{C_1}\,\frac{a^2}{r^2}-1\right)\left(\frac{a^2}{r^2}+1\right)}\,dr+C_2.$$

Соответствующие этим функциям винтовые поверхности уже были отмечены в § 6, См. 3-ю выноску на стр. 19.

Подставляя выражения (31) в уравнения (29), находим

$$\left.\begin{aligned} f_{r''}^{(1)'} s_i^2 + f_{r'}^{(1)'} s_i + f_r^{(1)'} + A_i f_{\varphi'}^{(1)'} &= 0, \\ f_{r'}^{(2)'} s_i + f_r^{(2)'} + A_i f_{\varphi''}^{(2)'} s_i &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Откуда, исключая коэфициент A_i, получаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} f_{r''}^{(1)'} s^2 + f_{r'}^{(1)'} s + f_r^{(1)'}, & f_{\varphi'}^{(1)'} \\ f_{r'}^{(2)'} s + f_r^{(2)'}, & f_{\varphi''}^{(2)'} s \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$f_{r''}^{(1)'} f_{\varphi''}^{(2)'} s^3 + f_{r'}^{(1)'} f_{\varphi''}^{(2)'} s^2 + (f_r^{(1)'} f_{\varphi''}^{(2)'} - f_{\varphi'}^{(1)'} f_{r'}^{(2)'}) s - f_{\varphi'}^{(1)'} f_r^{(2)'} = 0. \tag{33}$$

Трем корням этого уравнения

$$s = s_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

соответствуют три частных решения (31) системы (29), причем коэфициенты A_i, $i = 1, 2, 3$, этих решений определяются любым из уравнений (32)

$$A_i = -\frac{f_{r''}^{(1)'} s_i^2 + f_{r'}^{(1)'} s_i + f_r^{(1)'}}{f_{\varphi'}^{(1)'}} = -\frac{f_{r'}^{(2)'} s_i + f_r^{(2)'}}{f_{\varphi''}^{(2)'} s_i}.$$

Система (30) представляет первое приближение при разыскании, при достаточно малых значениях постоянных C_i, $i = 1, 2, 3$, решения уравнений (27) в виде рядов, [1] расположенных по степеням произведений

$$C_i e^{s_i t}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Такой прием применен в рассматриваемой задаче Н. П. Нероновым [2] для исследования движения тяжелой точки на шероховатой косой винтовой поверхности, близкого к движению ее по винтовой линии.

Если ввести в системе (30) вместо постоянных C_i, $i = 1, 2, 3$, начальные значения ξ_0, ξ_0', η_0', $(t = 0)$, переменных ξ, ξ', η', то та же система представит первое приближение при разыскании, при достаточно малых значениях ξ_0, ξ_0', η_0', решения уравнений (27) в виде рядов, расположенных по степеням этих начальных значений. [3]

Одно из важнейших приложений решений, о которых идет речь, в виде рядов по степеням произведений $C_i e^{s_i t}$, $i = 1, 2, 3$, или по степеням начальных значений искомых переменных, имеет место при исследовании вопроса об устойчивости установившихся или периодических движений. [4]

Исследуя в рассматриваемой задаче установившееся движение

$$r = r_0, \quad \varphi' = \omega_0, \tag{34}$$

следует считать это движение устойчивым, если всякое близкое к нему возмущенное движение

$$r = r_0 + \xi, \quad \varphi' = \omega_0 + \eta' \tag{35}$$

таково, что при достаточно малых абсолютных величинах начальных значений ξ_0, ξ_0', η_0' переменных ξ, ξ', η', абсолютные величины этих переменных во все последующее время не превосходят наперед заданных границ. Если, напротив, как бы малы ни были по абсолютной величине начальные значения ξ_0, ξ_0', η_0', абсолютные величины переменных ξ, ξ', η' выходят с течением времени из наперед заданных границ, движение (34) следует считать неустойчивым.

---

[1] Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t. I, 1892, ch. 7. — Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1892, §§ 11, 12, 22, 23. См. также Goursat, Cours d'analyse mathématique, t. 3, 1913, § 470.

[2] См. цитированную работу.

[3] См., например, Goursat, ibid. § 463 и стр. 46, Exercice 1.

[4] Poincaré, Ляпунов, Goursat, цитированные места.

Из разложений ξ, ξ', η' по степеням [1] $C_i e^{s_i t}$, $i = 1, 2, 3$, следует, что для устойчивости движения (34) достаточно, [2] чтобы все корни s_i, $i = 1, 2, 3$, характеристического уравнения (33) или вещественные части их (в случае комплексных корней) были отрицательны.

Для устойчивости движения (34) необходимо, чтобы ни один из корней $s_i, i = 1, 2, 3$, характеристического уравнения (33) или вещественная часть корня (в случае комплексных корней) не оказались положительны.

Вопрос об устойчивости движения (34) в том случае, когда предыдущее необходимое условие устойчивости удовлетворено, но некоторые корни характеристического уравнения (33) или вещественные части их обращаются в нуль, требует дополнительного исследования. [3]

Из сказанного следует, что для решения задачи об устойчивости движения (34) необходимо определить знаки корней, или вещественных частей их, характеристического уравнения (33).

Перепишем уравнение (33) в виде

$$As^3 + Bs^2 + Cs + D = 0. \tag{36}$$

Существует следующая зависимость между корнями и коэфициентами этого уравнения

$$\left.\begin{aligned} -\frac{B}{A} &= s_1 + s_2 + s_3, \\ \frac{C}{A} &= s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3, \\ -\frac{D}{A} &= s_1 s_2 s_3, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

откуда

$$-\frac{BC - AD}{A^2} = (s_1 + s_2)(s_1 + s_3)(s_2 + s_3). \tag{38}$$

В случае двух комплексных корней уравнения (36) положим

$$s_1 = l + \sqrt{-1}\, m, \quad s_2 = l - \sqrt{-1}\, m, \quad s_3 = n,$$

тогда равенства (37) и (38) обращаются в следующие

$$\left.\begin{aligned} -\frac{B}{A} &= 2l + n, \\ \frac{C}{A} &= 2ln + l^2 + m^2, \\ -\frac{D}{A} &= (l^2 + m^2)\, n, \end{aligned}\right\} \tag{37$_1$}$$

$$-\frac{BC - AD}{A^2} = 2l\,[(l + n)^2 + m^2]. \tag{38$_1$}$$

---

[1] Из этих «асимптотических» разложений следует, что если все корни s_i, $i = 1, 2, 3$, или вещественные части их отрицательны, то

$$\text{пред}\ \xi = \text{пред}\ \xi' = \text{пред}\ \eta' = 0,$$

когда

$$t \to \infty,$$

т. е. возмущенное движение (35) асимптотически приближается к невозмущенному (34). См. Н. П. Неронов, цитированная работа.

[2] То же заключение можно сделать, рассматривая разложения переменных ξ, ξ', η' по степеням начальных значений ξ_0, ξ_0', η_0'. См. Goursat, цитированное сочинение, стр. 46.

[3] Ляпунов, цитированное сочинение, стр. 87—157.

Изменяя, в случае необходимости, знаки всех коэфициентов уравнения (36), положим

$$A > 0.$$

Тогда условия, [1] необходимые и достаточные, чтобы все корни уравнения (36) были отрицательны или (в случае комплексных корней) с отрицательными вещественными частями, выражаются следующими неравенствами [2]

$$B > 0, \quad D > 0, \quad BC - AD > 0. \tag{39}$$

В случае обращения в нуль одного корня уравнения (36) второе из неравенств (39) обращается в равенство

$$D = 0.$$

В случае обращения в нуль вещественных частей двух комплексных корней уравнения (36) третье из неравенств (39) обращается в равенство

$$BC - AD = 0.$$

В случае одновременного обращения в нуль двух корней уравнения (36) второе и третье из неравенств (39) обращаются в равенства

$$D = 0, \quad BC - AD = 0.$$

Все эти случаи могут представиться при исследовании устойчивости установившегося движения тяжелой точки по винтовой линии на шероховатой винтовой поверхности (15). Для этого движения коэфициенты характеристического уравнения (33) будут

$$A = f_{r'}^{(1)'} f_{\varphi'}^{(2)'} = r_0^2 \Delta_0^4 > 0,$$

$$B = f_{r'}^{(1)'} f_{\varphi'}^{(2)'} = \frac{a g r_0^2 \Delta_0^2}{v_0 \sqrt{r_0^2 + a^2}} \left[\Delta_0^2 + 2 f'^2(r_0)\right] > 0,$$

$$C = f_r^{(1)'} f_{\varphi'}^{(2)'} - f_{r'}^{(2)'} f_{\varphi'}^{(1)'} =$$

$$= r_0^2 \Delta_0^2 \left[\left(\frac{a^2}{r_0^2} - 1\right) \frac{v_0^2}{r_0^2 + a^2} + g f''(r_0)\right] + 2 g r_0 \Delta_0^2 f'(r_0) \frac{2 r_0^2 + 3 a^2}{r_0^2 + a^2} =$$

$$= \frac{g \Delta_0^2}{r_0 (r_0^2 + a^2) f'(r_0)} \left[S + r_0^2 (5 a^2 + 2 r_0^2) f'^2(r_0) - (r_0^2 + a^2)^2\right],$$

$$D = -f_{\varphi'}^{(1)'} f_{r'}^{(2)'} = \frac{2 a g^2 f'(r_0)}{r_0 (r_0^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} v_0} S,$$

где [3]

$$S = r_0^3 (r_0^2 + a^2) f'(r_0) f''(r_0) + r_0^2 (r_0^2 + 2 a^2) f'^2(r_0) + (r_0^2 + a^2)^2.$$

---

[1] Такие условия для характеристического уравнения какой угодно степени установлены впервые Routh'ом (A Treatise on the Dynamics of a System Rigid Bodies, London, 1884, p. 59, 164—176). См. также Hurwitz, Mathematische Annalen, Bd. 46, 1895, S. 273.

[2] Отсюда, как следствие, имеем

$$C > 0.$$

[3] Обозначая для краткости левую часть равенства (17) через $-R$, имеем

$$\frac{dR}{dr_0} = \frac{a}{r_0^4 (r_0^2 + a^2) \Delta_0^2} S.$$

См. выноску на стр. 16.

Следовательно

$$BC - AD =$$

$$= \frac{ag^2 r_0 \Delta_0^4}{v_0 (r_0^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} f'(r_0)} [\Delta_0^2 + 2f'^2(r_0)][S + r_0^2 (2r_0^2 + 5a^2) f'^2(r_0) - (r_0^2 + a^2)^2] -$$

$$- \frac{2ag^2 r_0 f'(r_0) \Delta_0^4}{(r_0^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} v_0} S =$$

$$= \frac{ag^2 r_0 \Delta_0^2}{v_0 (r_0^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} f'(r_0)} \left\{ S + \left[1 + \frac{2f'^2(r_0)}{\Delta_0^2} \right] [r_0^2 (2r_0^2 + 5a^2) f'^2(r_0) - (r_0^2 + a^2)^2] \right\}.$$

Таким образом подлежащие удовлетворению неравенства (39) для исследуемого движения приводятся к двум:

$$S > 0,$$

$$S + \left[1 + \frac{2f'^2(r_0)}{\Delta_0^2} \right] [r_0^2 (2r_0^2 + 5a^2) f'^2(r_0) - (r_0^2 + a^2)^2] > 0.$$

И можно формулировать общий критерий устойчивости установившегося движения

$$r = r_0, \quad v^2 = g r_0 f'(r_0)$$

тяжелой точки по винтовой линии (1), имеющего место на шероховатой винтовой поверхности (15) при условии

$$R = -\frac{a}{r_0} + k \sqrt{1 + \frac{r_0^2}{a_0^2 + r_0^2} f'^2(r_0)} = 0,$$

следующим образом.

Положим

$$\frac{dR}{dr_0} = \frac{a}{r_0^4 (r_0^2 + a^2) \Delta_0^2} S,$$

тогда, если

$$r_0^2 (2r_0^2 + 5a^2) f'^2(r_0) - (r_0^2 + a^2)^2 > 0,$$

т. е., в силу (17),

$$0 < k^2 \leq \frac{a^2}{r_0^2} \frac{2r_0^2 + 5a^2}{3r_0^2 + 6a^2},$$

то должно быть

$$\frac{dR}{dr_0} > 0,$$

т. е.

$$S > 0, \tag{40}$$

а если

$$\frac{a^2}{r_0^2} \frac{2r_0^2 + 5a^2}{3r_0^2 + 6a^2} \leq k^2 < \frac{a^2}{r_0^2},$$

то должно быть

$$S > \left[1 + \frac{2f'^2(r_0)}{\Delta_0^2} \right] [(r_0^2 + a^2)^2 - r_0^2 (2r_0^2 + 5a^2) f'^2(r_0)]. \tag{41}$$

Случаи, когда одно из неравенств (40), (41) или оба одновременно обращаются в равенства, т. е. когда характеристическое уравнение (33) имеет один или два корня, равные нулю, или два чисто мнимые корня, требуют дополнительного исследования. [1]

Из условий (40), (41) можно получить весьма простой, удобный для приложений, достаточный критерий устойчивости рассматриваемого движения.

---

[1] Исследование таких случаев задачи об устойчивости движения составляет главный предмет работ акад. Ляпунова: Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892.— Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Математический сборник, т. 17, вып. 2, 1893, стр. 253—333. Эти работы переизданы в одной книге. ОНТИ, 1935.

Представим выражение S в виде

$$r_0^2(r_0^2+a^2)f'(r_0)[r_0f''(r_0)+f'(r_0)]+a^2r_0^2f'^2(r_0)+(r_0^2+a^2)^2,$$

тогда очевидно, что при [1]

$$r_0f''(r_0)+f'(r_0)\geqslant 0 \tag{42}$$

всегда выполняются неравенства (40) и (41).

Так как для функций

$$f(r)=br,\quad f(r)=C\log r,\quad f(r)=C\left(\frac{r^2}{2}+a^2\log r\right)$$

условие (42) удовлетворяется, то рассматриваемое установившееся движение тяжелой точки по винтовой линии (1) на каждой из винтовых поверхностей

$$z=a\varphi+br,$$
$$z=a\varphi+C\log r,$$
$$z=a\varphi+C\left(\frac{r^2}{2}+a^2\log r\right),$$

при наличии трения, устойчиво.

Для функции

$$f(r)=\int_{\varrho}^{r}\sqrt{\left(\frac{1}{k^2}\,\frac{a^2}{r^2}-1\right)\left(\frac{a^2}{r^2}+1\right)}\,dr,\quad \varrho=\text{const},$$

условие (42) не удовлетворяется, а неравенство (40) обращается в равенство, так как для этой функции имеет место тождество

$$R=-\frac{a}{r_0}+k\sqrt{1+\frac{r_0^2}{r_0^2+a^2}f'^2(r_0)}=0,$$

а потому

$$\frac{dR}{dr_0}=0.$$

Один из корней соответствующего характеристического уравнения (33) в этом случае равен нулю, а остальные корни, при соблюдении условия

$$0<k^2<\frac{a^2}{r_0^2}\,\frac{2r_0^2+5a^2}{3r_0^2+6a^2}, \tag{43}$$

будут отрицательны или с отрицательными вещественными частями.

На основании сказанного в § 6 на поверхности

$$z=a\varphi+\int_{\varrho}^{r}\sqrt{\left(\frac{1}{k^2}\,\frac{a^2}{r^2}-1\right)\left(\frac{a^2}{r^2}+1\right)}\,dr$$

имеет место непрерывный ряд установившихся движений по винтовым линиям, к которым принадлежит рассматриваемое движение

$$r=r_0,\quad v^2=gr_0f'(r_0).$$

Согласно исследованиям акад. Ляпунова [2] движения этого ряда, при соблюдении условия (43), будут устойчивы.

Если же

$$\frac{a^2}{r_0^2}\,\frac{2r_0^2+5a^2}{3r_0^2+6a^2}\leqslant k^2<\frac{a^2}{r_0^2},$$

то для таких движений рассматриваемого ряда неравенство (41) переходит в неравенство обратного смысла и не удовлетворяется необходимое условие устойчивости (стр. 18). Рассматриваемые движения будут неустойчивы.

(*Окончание следует*)

---

[1] Это условие аналогично условию устойчивости движения тяжелой точки по параллели на гладкой поверхности вращения с вертикальною осью. См., например, E. T. Whittaker, A Treatise on the Analytical Dynamics. Cambridge, 1917, p. 205.

[2] Общая задача об устойчивости движения, стр. 105, 106.