*Записки Ленинградского Горного института, т. VIII, 1934*

*Annales de l'Institut des Mines à Leningrade, vol. VIII, 1934*

# Об одном случае безвихревого непрерывного обтекания бесконечным плоским потоком алгебраического контура

*Н. П. Неронов*

# Sur un cas de mouvement continu irrotationnel à deux dimensions d'un liquide indéfini en présence d'un obstacle fixe cylindrique ayant pour sa directrice une courbe algébrique.

*N. Neronoff*

Ранее мной был рассмотрен имеющий отношение к очертанию аэропланных крыльев вопрос о движении идеальной несжимаемой жидкости в присутствии неподвижного цилиндрического твердого тела [1]). При этом обтекаемый контур предполагается алгебраическим и скорость жидкости на бесконечно-большом расстоянии от твердого тела постоянной по величине и направлению.

Обозначим через $z$ и $w$ два комплексных переменных

$$z = x + iy, \quad w = \varphi + i\psi, \tag{1}$$

где $x$, $y$ и $\varphi$, $\psi$ — декартовы координаты каких-либо двух точек в плоскостях $z$ и $w$. Конформное преобразование, устанавливая зависимость между $z$ и $w$, дает уравнение линий тока $\psi = \text{const}$. В нашей задаче уравнение $\psi = 0$ представляет линию тока $l$, состоящую из двух бесконечных ветвей и обтекаемого контура тела $A$ (см. рис. 1).

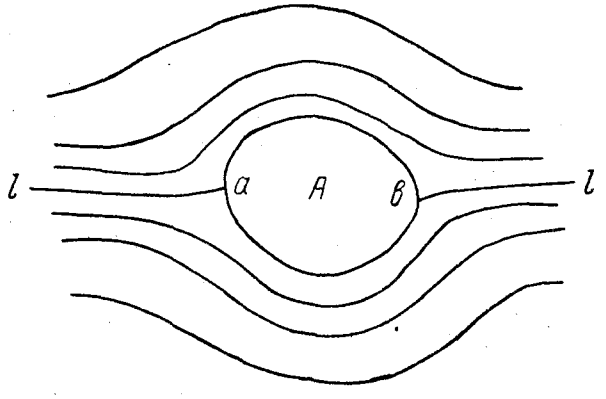



Рис. 1.

[1]) Messenger of Mathematics. 1928, vol. LVIII, № 8; Comptes rendus, 1929, t. 188, № 8; Известия Госуд. гидролог. инст., 1928, № 22; ibid. 1929, № 25; ibid, 1930, № 29; Московский математический сборник, 1931, г. XXXVIII, вып. 3—4.

Указанные мной случаи движения жидкости допускают возможность обобщений. С этой целью мы рассмотрим конформное преобразование вида

$$z = a_1 w + (a_{2m} + ib_{2m})\, w^{\frac{m-\mu}{2m}} (w-1)^{\frac{m+\mu}{2m}}, \tag{2}$$

где $a_1$, $a_{2m}$, $b_{2m}$ обозначают постоянные вещественные параметры ($a_1 > 0$, $a_1 + a_{2m} > 0$), $m$ и $\mu$—целые числа, из которых первое предполагается положительным ($m > |\mu|$), и наконец $i = \sqrt{-1}$. Ранее мной рассматривался случай $\mu = 1$.

Употребляя прежний метод исследования, получим параметрическое уравнение обтекаемого контура в следующем виде

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 \rho + A_{2m} \rho^{\frac{m-\mu}{2m}} (1-\rho)^{\frac{m+\mu}{2m}}, \\ y &= B_{2m} \rho^{\frac{m-\mu}{2m}} (1-\rho)^{\frac{m+\mu}{2m}}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где параметр $\rho$ изменяется в пределах $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ и введены следующие сокращенные обозначения

$$\left.\begin{aligned} A_{2m} &= -a_{2m} \sin\frac{\pi\mu}{2m} \mp b_{2m} \cos\frac{\pi\mu}{2m}, \\ B_{2m} &= \pm a_{2m} \cos\frac{\pi\mu}{2m} - b_{2m} \sin\frac{\pi\mu}{2m}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Верхние знаки соответствуют одной части обтекаемого контура, а нижние другой При $b_{2m} = 0$ контур симметричен относительно оси абсцисс.

Исключая параметр $\rho$, будем иметь уравнение алгебраической кривой порядка $2m$

$$a_1^{2m} y^{2m} = (B_{2m} x - A_{2m} y)^{m-\mu} [a_1 B_{2m} - (B_{2m} x - A_{2m} y)]^{m+\mu}, \tag{5}$$

которое при $\mu = 1$ должно дать уже известный результат.

Параметрическое уравнение одной бесконечной ветви линии тока $l$

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 \rho + a_{2m} \rho^{\frac{m-\mu}{2m}} (\rho-1)^{\frac{m+\mu}{2m}}, \\ y &= b_{2m} \rho^{\frac{m-\mu}{2m}} (\rho-1)^{\frac{m+\mu}{2m}}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где параметр $\rho$ изменяется от 1 до $+\infty$.

Аналогично уравнение другой ветви имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x &= -a_1 \rho - a_{2m} \rho^{\frac{m-\mu}{2m}} (\rho+1)^{\frac{m+\mu}{2m}}, \\ y &= -b_{2m} \rho^{\frac{m-\mu}{2m}} (\rho+1)^{\frac{m+\mu}{2m}}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Здесь параметр $\rho$ изменяется от 0 до $+\infty$.

Исключение параметра $\rho$ из уравнений (6), а также (7) дает уравнение одной и той же алгебраической кривой порядка $2m$

$$a_1^{2m} y^{2m} = (b_{2m} x - a_{2m} y)^{m-\mu} [(b_{2m} x - a_{2m} y) - a_1 b_{2m}]^{m+\mu}, \tag{8}$$

которой принадлежат обе вышеупомянутых бесконечных ветви.

Если $m$ велико по сравнению с $|\mu|$, будем иметь случай обтекания алгебраического контура, близкого к эллиптическому.

## Résumé

A l'infini la vitesse du liquide parfait et incompressible est constante en valeur et en direction.

Désignons par $z$ et $w$ deux variables complexes $z = x + iy$, $w = \varphi + i\psi$ liées par la transformation conforme

$$z = a_1 w + (a_{2m} + ib_{2m})\, w^{\frac{m-\mu}{2m}} (w-1)^{\frac{m+\mu}{2m}},$$

où $a_1$, $a_{2m}$ $b_{2m}$, désignent des paramètres réels $(a_1 > 0, a_1 + a_{2m} > 0)$, $m$ et $\mu$ sont des nombres entiers $(m > |\mu|)$ et enfin $i = \sqrt{-1}$.

Dans cet article on démontre que l'application de la transformation conforme ci-dessus mentionnée conduit au contour de l'obstacle représentant une courbe algébrique d'ordre $2m$. Son équation

$$a_1^{2m} y^{2m} = (B_{2m}x - A_{2m}y)^{m-\mu} [a_1 B_{2m} - (B_{2m}x - A_{2m}y)]^{m+\mu},$$

où sont introduites les notations abrégées

$$A_{2m} = -a_{2m} \sin\frac{\pi\mu}{2m} \mp b_{2m} \cos\frac{\pi\mu}{2m},$$

$$B_{2m} = \pm a_{2m} \cos\frac{\pi\mu}{2m} - b_{2m} \sin\frac{\pi\mu}{2m}.$$

Le cas $\mu = 1$ a été considéré par moi ailleurs [1]).

Si $m$ est très grand par rapport à $|\mu|$, la courbe retrouvée ne diffère que peu de l'ellipse.


---

[1]) Comptes rendus, 1929, t. 188, № 8; Изв. Гос. гидрол. инст., 1929, № 25.

---


Сдано в набор 20 января 1934 г.
Поступило к печати 4 сентября 1934 г.
Формат бумаги 72×105.
Количество бум. листов $8^3/_8$ и вкл.
Авторских листов 30.
Количество печ. знаков в 1 бум. листе 144768.

Ответственный редактор Н. В. Грачев.
Технический редактор Н. Крушкол.
Корректор Ю. П. Полетика.
Зак. № 78.
Тираж 1000 экз.
Изд. № 296.
Ленобллитлит № 15350.

4-я типография ОНТИ НКТП СССР „Красный Печатник". Ленинград, Международный пр., 75а.