Записки Ленинградского горного института, т. VIII, 1934
Annales de l'Institut des Mines à Leningrade, vol. VIII, 1934

О некоторых задачах динамики, связанных с горнообогатительным делом

Н. П. Неронов.

Sur quelques problèmes de dynamique

N. Neronoff

§ 1. К теории шаровой мельницы [1].

Ограничимся рассмотрением шаровой мельницы, состоящей из цилиндрического барабана с горизонтальной осью вращения и загруженной смесью шаров и руды. В лабораторных опытах иногда имеет место загрузка одними шарами. При надлежащей угловой скорости вращения барабана и соответствующей величине загрузки устанавливается режим, сущность которого, как известно, состоит в следующем. Шары, вращавшиеся первоначально вместе с барабаном, как одно целое, в некоторый момент начинают свое движение относительно барабана и, падая вниз, дробят руду ударом. Для регулирования работы шаровой мельницы нужно знать действительные траектории шаров за время их относительного движения, в частности большую роль играет траектория внешнего ряда шаров. Между тем способ нахождения ее, указываемый в технической литературе, не может быть признан вполне точным, равным образом и попытки исправить его, как основанные на более или менее произвольных допущениях. Возможно, что недостаточная разработанность теории шаровой мельницы является одной из причин некоторых расхождений между следствиями этой теории и данными опыта, на что имеются указания в литературе.

Движение шара в шаровой мельнице может быт разбито на три периода. В продолжение первого периода шар не имеет относительного движения по отношению к вращающемуся барабану и движется, будучи как бы неизменно связан с последним. Во второй период шар отделяется от стенки барабана, но еще продолжает опираться на нижележащий шар, двигаясь по последнему. Наконец третий период начинается с момента, когда движущийся шар покидает нижний. Траектория центра тяжести шара за третий период его свободного движения может приближенно считаться параболической. Заметим здесь, что обычно момент отделения шара от стенки барабана отождествляется с моментом отделения от нижележащего шара. Между тем в действительности эти моменты не совпадают. За протекающее между ними время нижний шар продолжает производить давление на верхний и тем самым оказывает влияние на параболическую траекторию третьего периода. Изучение движения шара за первый и третий периоды не встречает затруднений. Поэтому предметом дальнейшего исследования является только второй период.

Рассматриваемое движение шара происходит в вертикальной плоскости, перпендикулярной к оси вращения барабана.

[1] Рассматриваемый в этом параграфе вопрос был предложен Институтом механической обработки полезных ископаемых в качестве темы Научно-исследовательскому институту математики и механики при Ленинградском университете.

Введем следующие обозначения:

R — радиус барабана,

r — радиус шара,

ω — постоянная угловая скорость вращения барабана,

g — ускорение свободного падения,

φ_0 — угол, характеризующий положение шара в момент его отделения от стенки барабана,

α — угол, определяемый равенством (рис. 1)

$$\sin\alpha = \frac{r}{R-r}. \tag{1}$$

Угол φ_0 находится из уравнения

$$\cos(\alpha+\varphi_0) = \frac{\omega^2}{g}(R-r)\cos\alpha. \tag{2}$$

Рассмотрим, пренебрегая сопротивлениями, движение шара, отделившегося от стенки барабана, по нижележащему. Будем определять положение первого шара углом ψ поворота плоскости AB вокруг оси A и углом θ поворота шара относительно этой плоскости вокруг оси B (рис. 2). Оси A и B проходят через центры упомянутых выше шаров, которые предполагаются однородными. Применяя уравнение Лагранжа к параметру θ и принимая во внимание начальные условия, без труда находим

$$\theta' = -\psi'. \tag{3}$$

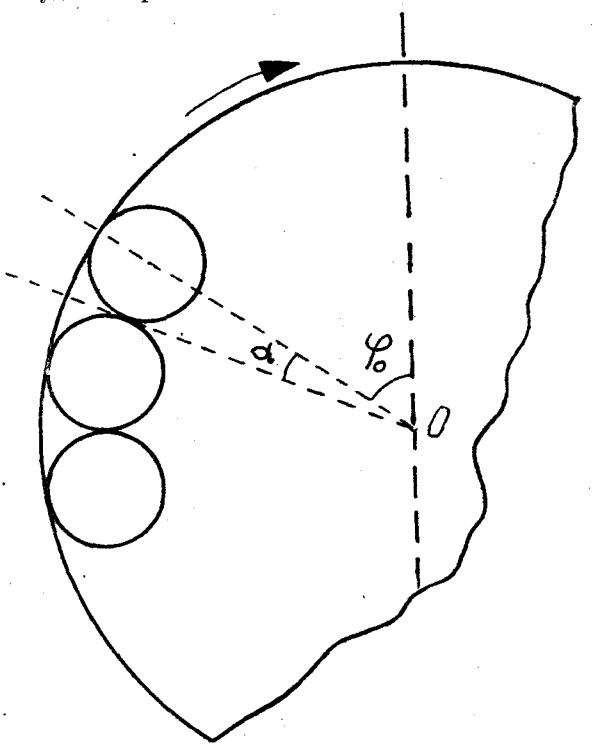


Рис. 1.

Полученное уравнение показывает, что относительное движение шара по отношению к барабану есть поступательное со скоростью, перпендикулярной к плоскости AB и численно равной

$$v = 2r\psi'. \tag{4}$$

Будем рассматривать относительное движение шара по отношению к барабану.

Обозначим через m массу шара. На него действуют: сила тяжести

$$p = mg, \tag{5}$$

переносная (центробежная) сила инерции

$$J_e = m\rho\omega^2, \tag{6}$$

кориолисова сила инерции

$$J_c = 4mr\omega\psi' \tag{7}$$

и опорная реакция N (рис. 2).

Выше через ρ обозначено расстояние OB между центром движущегося шара и осью вращения барабана, находимое из уравнения

$$\rho^2 = (R-r)^2 + 4r^2 - 4r(R-r)\sin(\alpha+\psi). \tag{8}$$

Рассмотрим теперь движение центра тяжести B шара. Его диференциальное уравнение движения в проекции на касательную к траектории

$$2r\psi'' = g\cos(\alpha+\varphi_0-\psi-\omega t) - \omega^2(R-r)\cos(\alpha+\psi). \tag{9}$$

Интеграл этого уравнения может быть представлен степенным рядом по отношению к времени t

$$\psi = \psi_0 + \psi_0' t + \frac{\psi_0''}{1\cdot 2} t^2 + \frac{\psi_0'''}{1\cdot 2\cdot 3} t^3 + \ldots, \tag{10}$$

где в силу начальных условий

$$\psi_0 = 0, \quad \psi_0' = 0 \tag{11}$$

Кроме того на основании уравнений (2) и (10) $\psi_0'' = 0$.

Составляем диференциальное уравнение движения центра тяжести шара в проекции на нормаль к его траектории

$$2r\psi'^2 = g \sin(\alpha + \varphi_0 - \psi - \omega t) - 4r\omega\psi' - \rho\omega^2 \sin(\alpha + \varphi_0 - \varphi - \psi) - \frac{N}{m}. \tag{12}$$

Значение ρ было дано ранее, а связь между углами φ и ψ (рис. 2) выражается уравнением

$$4r \sin\frac{\psi}{2} \sin\left(\frac{\psi}{2} + \varphi - \varphi_0 - \alpha\right) = (R - r) \sin(\varphi - \varphi_0). \tag{13}$$

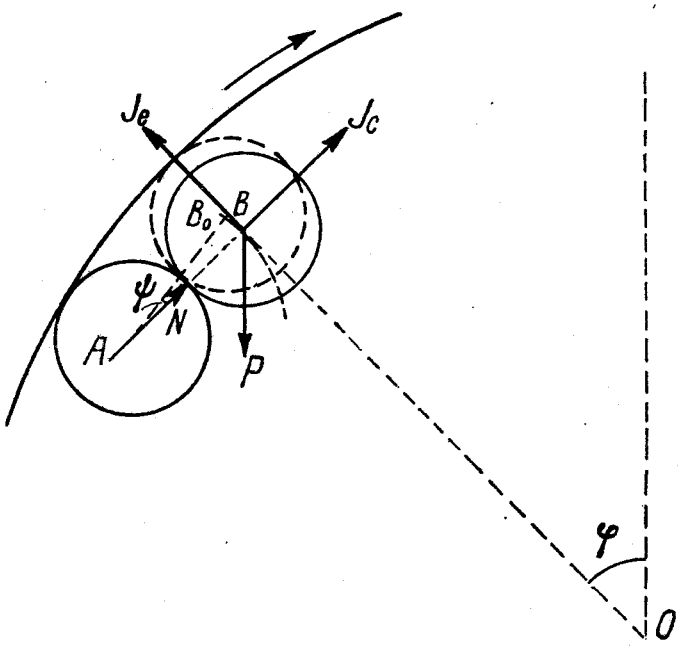


Рис. 2.

Полагая в уравнении (12) $N = 0$, находим значение t_1, соответствующее моменту отделения верхнего шара от нижнего.

За время t_1 барабан повернется на угол равный ωt_1. Если

$$\omega t_1 < 2\alpha, \tag{14}$$

нижний шар наверное не начнет своего относительного движения по отношению к барабану ранее момента времени t_1. Если же последнее неравенство не выполняется, является необходимость в дополнительном исследовании, чтобы выяснить характер совместного движения двух или более находящихся в контакте шаров по отношению к барабану.

Количественная оценка предлагаемого уточнения теории шаровой мельницы может быть произведена на основании численных примеров.

§ 2. О движении с трением тяжелой точки по винтовой поверхности (к теории спирального сепаратора).

Рассматриваемая задача имеет значение для теории спирального сепаратора, которая ставит вопрос о форме траектории тяжелой точки, движущейся с трением по косой винтовой поверхности [1]).

[1]) Содержание настоящего параграфа, оглашенное автором на заседании Ленинградского механического общества 20 ноября 1930 г., включено в доклад проф. М. И. Акимова на ту же тему съезду русских математиков в Харькове 25 июня 1930 г., впоследствии напечатанный в журнале Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" (№ 1, 1931), под названием „Ueber einen Fall der Bewegung eines schweren Punktes auf einer rauhen schiefen Schraubenfläche".

Направляем координатную ось Z вертикально вверх. Уравнение косой винтовой поверхности в цилиндрических координатах r, θ, z

$$z = ar + b\theta, \tag{1}$$

где через a и b обозначены постоянные и $b < 0$.

Диференциальные уравнения движения имеют следующий вид [1])

$$\left.\begin{aligned} r'' - r\theta'^2 + \frac{1}{\Delta}\left(ar\theta'^2 - \frac{2br'\theta'}{r} + g\right)\left(\frac{a}{\Delta} + \frac{kr'}{v}\right) = 0, \\ \theta'' + \frac{2r'\theta'}{r} + \frac{1}{\Delta}\left(ar\theta'^2 - \frac{2br'\theta'}{r} + g\right)\left(\frac{b}{r^2\Delta} + \frac{k\theta'}{v}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Здесь сохранены обычные обозначения производных от r и θ по независимому переменному — времени t; v — скорость точки, k — коэфициент трения скольжения, g — ускорение свободного падения и наконец введено сокращенное обозначение

$$\Delta = \sqrt{1 + a^2 + \frac{b^2}{r^2}}. \tag{3}$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что диференциальные уравнения (2) имеют систему частных интегралов

$$r = \alpha, \quad \theta = \beta t. \tag{4}$$

Постоянные коэфициенты α и β определяются из уравнений

$$\alpha^2 = \frac{b^2}{2k^2(1 + a^2)}\left[1 - k^2 + \sqrt{(1 + k^2)^2 + 4a^2k^2}\right], \quad \beta^2(\alpha^2 + b^2) = a\alpha g. \tag{5}$$

Система частных интегралов (4) соответствует некоторому равномерному движению точки по винтовой линии. [2])

Переходим к новым переменным ξ и η, связанным с прежними r и θ при помощи уравнений:

$$r = \alpha + \xi, \quad \theta = \beta t + \eta. \tag{6}$$

После введения новых переменных и разложения левых частей в бесконечные ряды диференциальные уравнения (2) принимают вид, если положить $\zeta = \eta'$,

$$\left.\begin{aligned} \xi'' - \frac{b^3}{a\alpha}\left(1 + \frac{2a^2}{\Delta_1^2}\right)\xi' + \frac{\beta^2}{\Delta_1^2}\left(\frac{b^2}{\alpha^2} - 1\right)\xi - \frac{2k^2\alpha^3\beta}{b^2}\zeta + \sum L_{l,m,n}\xi^l\xi'^m\zeta^n = 0, \\ \zeta' + \frac{\beta}{\alpha}\left(2 + \frac{b^4}{k^2\alpha^4\Delta_1^2}\right)\xi' - \frac{b\beta^2}{a\alpha^2}\left[2 - \frac{b^2(1 + k^2)}{k^2\alpha^2\Delta_1^2}\right]\xi + \sum M_{l,m,n}\xi^l\xi'^m\zeta^n = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где

$$\Delta_1 = \sqrt{1 + a^2 + \frac{b^2}{\alpha^2}} \tag{8}$$

и суммирование распространено на целые положительные значения показателей l, m, n, удовлетворяющие неравенствам

$$l \geqslant 0, \quad m \geqslant 0, \quad n \geqslant 0, \quad l + m + n > 1. \tag{9}$$

Коэфициенты $L_{l,m,n}$ и $M_{l,m,n}$ бесконечных рядов суть постоянные величины.

Диференциальные уравнения (7) допускают следующую систему частных интегралов

$$\xi = 0, \quad \zeta = 0, \tag{10}$$

соответствующую системе (4) интегралов уравнений (2).

---

[1]) Уравнения составлены проф. М. И. Акимовым, см. „Спиральный сепаратор" проф. Л. Б. Левенсона, 1925, стр. 49—50 Вопрос об их интегрировании был оставлен открытым (см. также предисловие).

[2]) Указание на возможность такого движения было сделано проф. Л. Б. Левенсоном.

Ищем систему интегралов уравнений (7), соседнюю по отношению к системе (10), представляя ξ и ζ бесконечными рядами

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots, \quad \zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \ldots \tag{11}$$

Будем считать ξ_j и $\zeta_j (j = 1, 2, 3, 4, \ldots)$, а также их производные любого порядка по t малыми величинами порядка j.

Вносим значения ξ и ζ из уравнений (11) в дифференциальные уравнения (7) и приравниваем нулю совокупность членов одного и того же порядка. Величины ξ_j и ζ_j находятся последовательно из линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэфициентами.

Система дифференциальных уравнений, определяющая ξ_1 и ζ_1, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\xi_1'' - \frac{b\beta}{a\alpha}\left(1 + \frac{2a^2}{\Delta_1^2}\right)\xi_1' + \frac{\beta^2}{\Delta_1^2}\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)\xi_1 - \frac{2k^2\alpha^3\beta}{b^2}\zeta_1 = 0, \\ &\zeta_1' + \frac{\beta}{\alpha}\left(2 + \frac{b^4}{k^2a^4\Delta_1^2}\right)\xi_1' - \frac{b\beta^2}{a\alpha^2}\left[2 - \frac{b^2(1+k^2)}{k^2a^2\Delta_1^2}\right]\xi_1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Найдя общий интеграл предыдущей системы и возвратившись к переменному η_1 $(\zeta_1 = \eta_1')$, получим

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} + Ce^{s_3 t}, \\ \eta_1 &= A\varkappa_1 e^{s_1 t} + B\varkappa_2 e^{s_2 t} + C\varkappa_3 e^{s_3 t} + D. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

В уравнениях (13) через A, B, C, D обозначены произвольные постоянные, а через s_j $(j = 1, 2, 3)$ корни характеристического уравнения третьей степени

$$\left(\frac{s}{\beta}\right)^3 + \frac{\delta}{a}\left(1 + \frac{2a^2}{\Delta_1^2}\right)\left(\frac{s}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{3\delta^2 - 1}{\Delta_1^2} + \frac{4k^2}{\delta^2}\right)\frac{s}{\beta} + \frac{2}{a\delta}\left[2k^2 - \frac{\delta^2(1+k^2)}{\Delta_1^2}\right] = 0, \tag{14}$$

где

$$\delta = -\frac{b}{a}.$$

Коэфициент $\varkappa_j (j = 1, 2, 3)$ находится из уравнения:

$$\varkappa_j = -\frac{\beta}{\alpha s_j}\left(2 + \frac{b^4}{k^2a^4\Delta_1^2}\right) + \frac{b\beta^2}{a\alpha^2 s_j^2}\left[2 - \frac{b^2(1+k^2)}{k^2\alpha^2\Delta_1^2}\right]. \tag{15}$$

Выясним характер корней кубического уравнения (14) на нескольких численных примерах, приняв за единицу длины — метр, а за единицу времени — секунду. Положим $a = 1$, $b = -1$ и придадим коэфициенту k ряд значений

$$\begin{aligned} &k = 0{,}1, \quad s_1 = -0{,}215, \quad s_2 = -0{,}055 + 1{,}43\,i, \quad s_3 = -0{,}055 - 1{,}43\,i, \\ &k = 0{,}5, \quad s_1 = -1{,}38, \quad s_2 = -0{,}57 + 3\,i, \quad s_3 = -0{,}57 - 3\,i, \\ &k = 1, \quad s_1 = -1{,}45, \quad s_2 = -1{,}34 + 3{,}55\,i, \quad s_3 = -1{,}34 - 3{,}55\,i, \end{aligned}$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Наконец в последнем примере возьмем числовые значения для параметров из практики [1])

$$a = 0{,}364, \quad b = -0{,}116, \quad k = 0{,}364.$$

Будем иметь

$$s_1 = -2{,}27, \quad s_2 = -0{,}897 + 4{,}8\,i, \quad s_3 = -0{,}897 - 4{,}8\,i.$$

Существенной особенностью приведенных нами примеров является то обстоятельство, что вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны. Для области значений параметров a, b, k, обладающей этим свойством, можно положить

$$s_1 < 0, \quad s_2 = \lambda + \mu i, \quad s_3 = \lambda - \mu i, \quad \lambda < 0. \tag{16}$$

[1]) Проф. Л. Б. Левенсон, idem, стр. 53, пример 8.

Тогда будем иметь

$$\varkappa_2 = \sigma + \tau i, \quad \varkappa_3 = \sigma - \tau i, \tag{17}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= -\frac{\beta\lambda}{\alpha(\lambda^2+\mu^2)}\left(2+\frac{b^4}{k^2\alpha^4\Delta_1^2}\right)+\frac{b\beta^2(\lambda^2-\mu^2)}{a\alpha^2(\lambda^2+\mu^2)^2}\left[2-\frac{b^2(1+k^2)}{k^2\alpha^2\Delta_1^2}\right], \\ \tau &= \frac{\beta\mu}{\alpha(\lambda^2+\mu^2)}\left(2+\frac{b^4}{k^2\alpha^4\Delta_1^2}\right)-\frac{2b\beta^2\lambda\mu}{a\alpha^2(\lambda^2+\mu^2)^2}\left[2-\frac{b^2(1+k^2)}{k^2\alpha^2\Delta_1^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Уравнения (13) переписываются в виде:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= Ae^{s_1 t} + Be^{(\lambda+\mu i)t} + Ce^{(\lambda-\mu i)t}, \\ \eta_{11} &= A\varkappa_1 e^{s_1 t} + B(\sigma+\tau i)e^{(\lambda+\mu i)t} + C(\sigma-\tau i)e^{(\lambda-\mu i)t} + D. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Чтобы перейти к вещественным числам, вводим новые произвольные постоянные E и F

$$2B = E - Fi, \quad 2C = E + Fi. \tag{20}$$

Имеем

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= Ae^{s_1 t} + e^{\lambda t}(E\cos\mu t + F\sin\mu t), \\ \eta_{11} &= A\varkappa_1 e^{s_1 t} + e^{\lambda t}[(E\sigma + F\tau)\cos\mu t - (E\tau - F\sigma)\sin\mu t] + D. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Уравнения (21) вместе с уравнениями (6) решают поставленный в начале этого параграфа вопрос о форме траектории движущейся точки в смежности с упомянутым выше равномерным движением по винтовой линии. Решение системы (7) дифференциальных уравнений, представленное нами в виде бесконечных рядов (11), является ассимптотическим по отношению к решению $\xi = 0$, $\zeta = 0$. Эти ряды, характеризующиеся отсутствием вековых членов, будут сходящимися, если начальные данные таковы, что постоянные A, B, C достаточно малы по абсолютной величине.

Замечание. Изучение устойчивости равномерного движения точки по винтовой линии, соответствующего частному решению (10) системы (7) дифференциальных уравнений, не было нашей прямой задачей. Однако необходимо заметить, что из отмеченных выше свойств корней характеристического уравнения (14) непосредственно следует, что рассматриваемое движение устойчиво по отношению к величинам ξ, ξ' и $\zeta = \eta'$.

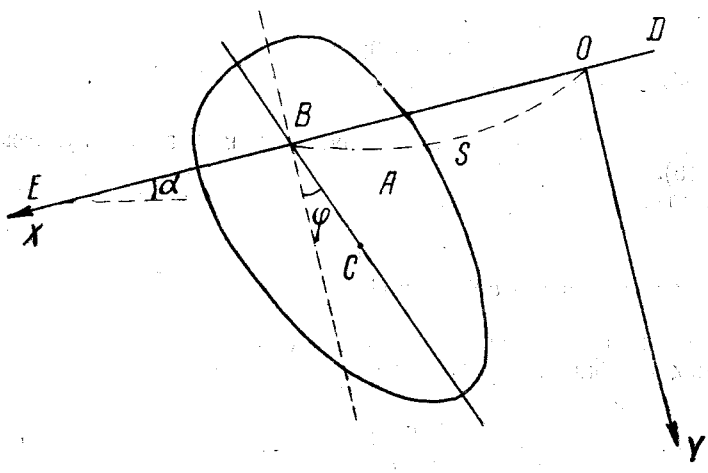


Рис. 3.

§ 3. О случае маятника с подвижной осью подвеса

Выводы настоящего параграфа имеют отношение к вопросу об устойчивости движения вагонетки по бремсбергу.

Тяжелое твердое тело A массы m может вращаться вокруг горизонтальной оси B. Две точки этой оси скользят без трения вдоль двух перпендикулярных к ней неподвижных параллельных прямых DE. Эти последние образуют с горизонтальной плоскостью угол α (рис. 3).

Положение тела определяется двумя параметрами s и φ (см. рис. 3). Будем иметь для координат центра тяжести C выражения

$$x_C = s - l\sin\varphi,\quad y_C = l\cos\varphi, \tag{1}$$

где l обозначает расстояние между центром тяжести и осью вращения B.

Закон движения центра тяжести и закон живой силы дают два интеграла диференциальных уравнений движения [1])

$$x_C = \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha + at + b, \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}I\varphi'^2 + \frac{m}{2}\left(x_C'^2 + y_C'^2\right) = mg\left(x_C\sin\alpha + y_C\cos\alpha\right) + h,$$

где

a, b, h — произвольные постоянные,

g — ускорение свободного падения,

I — момент инерции тела относительно оси параллельной B и проходящей через центр тяжести C.

Из уравнений (2) получаем зависимость между t и φ

$$t = \pm\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{\frac{I + ml^2\sin^2\varphi}{2mgb\sin\alpha + 2h - ma^2 + 2mgl\cos\alpha\cos\varphi}}\,d\varphi, \tag{3}$$

выбирая соответствующим образом знак перед интегралом и обозначая через φ_0 начальное значение угла φ при $t = 0$. Если движение маятника колебательное, то крайние положения ($\varphi = \varphi_1$) определяются уравнением

$$\cos\varphi_1 = \frac{ma^2 - 2h - 2mgb\sin\alpha}{2\,mgl\cos\alpha}, \tag{4}$$

предполагая, что абсолютное значение правой части меньше единицы. В противном случае маятник будет вращаться в одном направлении. Колебания, если они имеют место, происходят около устойчивого положения относительного равновесия ($\varphi = 0$).

Полагая $u = \cos\varphi$, можно полученный интеграл (3) представить в виде

$$t = \mp\int_{u_0}^{u}\frac{[I + ml^2(1-u^2)]\,du}{\sqrt{2mgl\cos\alpha\,(u-u_1)(1-u^2)\,[I + ml^2(1-u^2)]}}, \tag{5}$$

где $u_0 = \cos\varphi_0$ и $u_1 = \cos\varphi_1$. Таким образом задача приведена к обращению ультра-эллиптического интеграла (5).

Период колебания T выразится интегралом:

$$T = 4\int_{u_1}^{1}\frac{[I + ml^2(1-u^2)]\,du}{\sqrt{2mgl\cos\alpha\,(u-u_1)(1-u^2)\,[I + ml^2(1-u^2)]}}. \tag{6}$$

Определив φ, находим s при помощи уравнений (1) и (2).

Равенство (5) для малых колебаний переписывается в виде

$$\mp t = \int_{u_0}^{u}\frac{\sqrt{I}\,du}{\sqrt{2mgl\cos\alpha\,(u-u_1)(1-u^2)}}. \tag{7}$$

Производим подстановку в интеграле правой части:

$$u = \frac{u_1}{3} - \frac{2I}{mgl\cos\alpha}\,v. \tag{8}$$

[1]) Painlevé, Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique, p. 37, V.

Будем иметь

$$\mp t = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\sqrt{4v^3 - g_2 v - g_3}}, \tag{9}$$

где

$$g_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{mgl\cos\alpha}{I}\right)^2 (3 + u_1^2), \quad g_3 = \frac{1}{27}\left(\frac{mgl\cos\alpha}{I}\right)^3 u_1 (9 - u_1^2),$$

$$u_0 = \frac{u_1}{3} - \frac{2I}{mgl\cos\alpha} v_0. \tag{10}$$

Прибавляем к обеим частям равенства (9) постоянную H

$$H = \int_{\infty}^{v_0} \frac{dv}{\sqrt{4v^3 - g_2 v - g_3}}. \tag{11}$$

Имеем

$$H \mp t = \int_{\infty}^{v} \frac{dv}{\sqrt{4v^3 - g_2 v - g_3}}. \tag{12}$$

Обращая последний интеграл, находим v, как эллиптическую функцию (Вейерштрасс) с аргументом $H \mp t$

$$v = p(H \mp t). \tag{13}$$

Пусть будут 2ω и $2\omega'$ ее вещественный и чисто-мнимый периоды. Далее обозначим через $e_1 = p(\omega)$, $e_2 = p(\omega + \omega')$, $e_3 = p(\omega')$ корни полинома $4v^3 - g_2 v - g_3$, причем $e_1 > e_2 > e_3$.
Тогда

$$4v^3 - g_2 v - g_3 = 4(v - e_1)(v - e_2)(v - e_3), \tag{14}$$

где

$$e_1 = \frac{mgl\cos\alpha}{2I}\left(\frac{u_1}{3} + 1\right), \quad e_2 = -\frac{mgl\cos\alpha}{3I} u_1, \quad e_3 = \frac{mgl\cos\alpha}{2I}\left(\frac{u_1}{3} - 1\right). \tag{15}$$

Эллиптическая функция упрощается, если за начальный момент принять момент прохождения маятника через положение относительного равновесия ($u_0 = 1$, $v_0 = e_3$). Тогда

$$H = -2\omega - \omega'. \tag{16}$$

Отсюда

$$v = p(\omega' + t). \tag{17}$$

Угол φ определяется равенством

$$\cos\varphi = \frac{u_1}{3} - \frac{2I}{mgl\cos\alpha} p(\omega' + t). \tag{18}$$

Когда время t возрастает от нуля до ω, функция $p(\omega' + t)$ возрастает от e_3 до e_2, а угол φ от нуля до φ_1. При дальнейшем возрастании времени t угол φ будет изменяться между $+\varphi_1$ и $-\varphi_1$.

Выше было указано, что в случае конечных колебаний задача приводится к обращению ультраэллиптического интеграла (5). Однако, как и в случае маятника с неподвижной осью подвеса, в данной задаче возможно ассимптотическое движение в одном направлении, когда маятник беспредельно приближается к неустойчивому положению относительного равновесия ($\varphi = \pi$), никогда его не достигая. В этом случае $\varphi_1 = \pi$, $u_1 = -1$, и ультра-эллиптический интеграл (5) обращается в эллиптический.

Разбираемая задача имеет связь с задачей об устойчивости плоского движения тяжелого твердого тела, скользящего без трения по наклонной плоскости, опираясь на нее ребрами A и B (рис. 4). Так как в последней задаче связи неудерживающие, то, применяя принцип Даламбера, легко установить, что рассматриваемое движение возможно лишь в случае, если центр тяжести C тела расположен между плоско-

стями AD и BE, проведенными через ребра A и B нормально к наклонной плоскости [1]). Предположим выполнение этого условия и сохраним ранее введенные обозначения.

Условимся считать изучаемое движение устойчивым, если при повороте тела в начальный момент вокруг оси A или B на произвольный достаточно малый по абсолютному значению угол ψ_0 и при сообщении телу произвольной достаточно малой по абсолютному значению угловой скорости φ_0' оно, будучи при дальнейшем его движении предоставлено самому себе, не опрокинется, т. е. будет существовать угол наибольшего отклонения φ_1, определяемый равенством (4).

Найдя при помощи начальных данных значения входящих в это равенство произвольных постоянных, переписываем его в виде

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_0 - \frac{\varphi_0'^2 (I + ml^2 \sin^2\varphi_0)}{2mgl\cos\alpha}, \tag{19}$$

где (рис. 4) $\varphi_0 = \beta + \psi_0 < \pi$.

Угол наибольшего отклонения φ_1 оказывается не зависящим от начальной скорости s_0' поступательного движения, которое может быть сообщено телу в начальный момент.

На основании уравнения (19) условие устойчивости рассматриваемого движения может быть выражено неравенством

$$|\cos\varphi_0| + \frac{\varphi_0'^2 (I + ml^2 \sin^2\varphi_0)}{2mgl\cos\alpha} < 1. \tag{20}$$

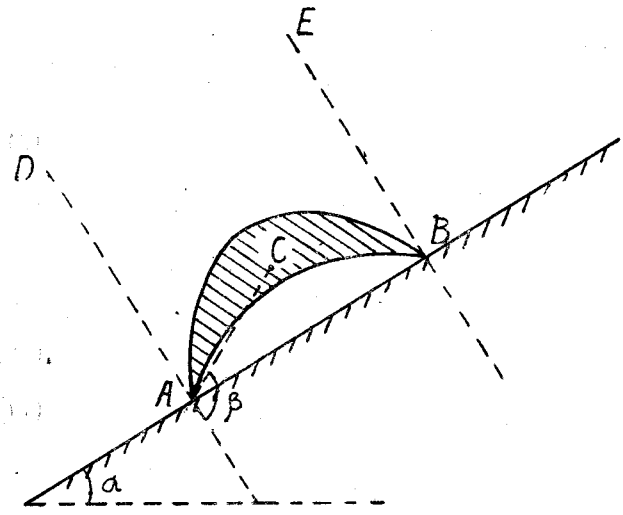


Рис. 4.

При достаточно малых значениях $|\psi_0|$ и $|\varphi_0'|$ это неравенство всегда выполняется и следовательно изучаемое движение будет устойчивым.

Можно поставить вопрос об устойчивости рассматриваемого движения по отношению к конечным значениям $|\psi_0|$ и $|\varphi_0'|$, не превышающим некоторых, наперед заданных пределов. Как и раньше, новая задача решается при помощи уравнения (19). Следует заметить при этом, что движение, устойчивое при первой постановке вопроса, может оказаться неустойчивым при второй.

Наконец отметим случай, соответствующий такому положению центра тяжести, которое обеспечивает возможность устойчивого скольжения тела по наклонной плоскости, но делает невозможным его равновесие при закреплении оси A.

§ 4. Об одном движении упруго подвешенного тяжелого твердого тела (К вопросу о подъеме шахтной клети)

Результаты настоящего параграфа позволяют составить уравнение движения шахтной клети при ее подъеме для интервала времени вблизи начального момента,

[1]) При наличии трения скольжения условия возможности рассматриваемого движения выражаются неравенствами

$$l_A - kH > 0, \quad l_B + kH > 0,$$

где l_A и l_B обозначают расстояния от центра тяжести C до плоскостей AD и BE, H — расстояние от точки C до наклонной плоскости и k — коэфициент трения скольжения.

учитывая упругие деформации каната. Задача решается в предположении, что массой каната можно пренебречь по сравнению с массой клети, т. е. для сравнительно небольших высот подъема и самый канат трактуется как упругая нить.

Тело A подвешено в точке B к упругой нити, навитой на блок, вращающийся вокруг неподвижной оси O (рис. 5). Предполагая отсутствие скольжения нити по блоку, будем считать скорость точки C нити направленной вертикально вверх и по величине заданной функцией времени $v(t)$. Массой нити пренебрегаем. Движение тела A предполагается поступательным и вертикальным.

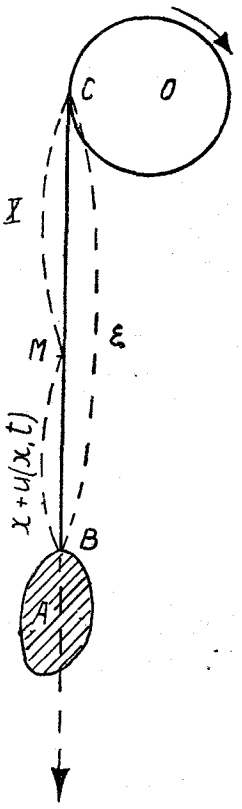


Рис. 5.

Для какой-либо точки M нити ее расстояние MB от конца B (см. рис. 5) равно сумме двух слагаемых: первое x выражает нормальную (т. е. при отсутствии сил) длину рассматриваемой части нити MB, а второе $u(x, t)$ — ее деформацию, являющуюся функцией переменных x и времени t. Предполагая, что имеет место закон Гука, можно написать следующее выражение для величины силы упругости T нити в точке M

$$T = k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \tag{1}$$

где k обозначает некоторую положительную постоянную.

Следствием предположения, что нить не имеет массы, является линейная зависимость $u(x, t)$ от x, т. е.

$$u(x, t) = xf(t), \quad T = kf(t). \tag{2}$$

Помещаем начало координат в точке C и направляем координатную ось вертикально вниз. Обозначаем координаты точек M и B соответственно через X и ξ.

Тогда

$$X = \xi - x - xf(t). \tag{3}$$

Полагая $X = 0$, находим значение x, соответствующее точке C

$$x = \frac{\xi}{1 + f(t)}. \tag{4}$$

Вычисляем скорость точки M нити

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d\xi}{dt} - x \frac{df(t)}{dt}. \tag{5}$$

Применяем последнее уравнение к точке C

$$v(t) = \frac{d\xi}{dt} - \frac{\xi \frac{df(t)}{dt}}{1 + f(t)}. \tag{6}$$

Составляем диференциальное уравнение движения тела A, обозначая через m его массу и через g — ускорение свободного падения

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} = mg - kf(t). \tag{7}$$

Исключаем из уравнений (6) и (7) функцию $f(t)$

$$m\xi \frac{d^2\xi}{dt^2} = \left[\frac{d\xi}{dt} - v(t)\right]\left(m \frac{d^2\xi}{dt^2} - a\right), \tag{8}$$

где

$$a = mg + k. \tag{9}$$

Полученное дифференциальное уравнение третьего порядка определяет функцию ξ при следующих начальных данных

$$\xi|_{t=0}=\xi_0,\quad \frac{d\xi}{dt}\Big|_{t=0}=\xi_0',\quad \frac{d^2\xi}{dt^2}\Big|_{=0}=\xi_0''. \tag{10}$$

Постоянная ξ_0'' находится из уравнения

$$\xi_0''=g-\frac{k}{m}\left(\frac{\xi_0}{l}-1\right), \tag{11}$$

где l обозначает нормальную длину нити BC в начальный момент.

Переходя к интегрированию уравнения (8), вводим вместо переменных t, ξ новые τ, η при помощи равенств

$$t=\lambda\tau,\quad \xi=\xi_0(1+\eta), \tag{12}$$

обозначая через λ пока неопределенную положительную постоянную.

Уравнение (8) переписывается в виде

$$\frac{m\xi_0^2}{\lambda^3}(1+\eta)\frac{d^3\eta}{d\tau^3}=\left[\frac{\xi_0}{\lambda}\frac{d\eta}{d\tau}-v(\lambda\tau)\right]\left(\frac{m\xi_0}{\lambda^2}\frac{d^2\eta}{d\tau^2}-a\right). \tag{13}$$

Вводим далее новые неизвестные функции γ и δ на основании уравнений

$$\gamma=\frac{d\eta}{d\tau},\quad \delta=\frac{d^2\eta}{d\tau^2}. \tag{14}$$

Тогда дифференциальное уравнение (13) третьего порядка с одной неизвестной функцией η будет эквивалентно системе трех дифференциальных уравнений первого порядка с тремя неизвестными функциями η, γ, δ

$$\frac{d\eta}{d\tau}=\gamma,\quad \frac{d\gamma}{d\tau}=\delta,\quad \frac{d\delta}{d\tau}=\frac{\left[\gamma-\frac{\lambda}{\xi_0}v(\lambda\tau)\right]\left(\delta-\frac{a\lambda^2}{m\xi_0}\right)}{1+\eta}. \tag{15}$$

Новые начальные данные

$$\eta\Big|_{\tau=0}=0,\quad \gamma\Big|_{\tau=0}=\frac{\lambda\xi_0'}{\xi_0},\quad \delta\Big|_{\tau=0}=\frac{\lambda^2\xi_0''}{\xi_0}. \tag{16}$$

Пусть функция $v(t)$ будет голоморфна при $|t|<\sigma$ и следовательно при $|\tau|<\frac{\sigma}{\lambda}$. Рассмотрим значения правых частей уравнений (15) в области смежной с системой начальных значений переменных τ, η, γ, δ и ограниченной неравенствами

$$|\tau|<\frac{\sigma}{\lambda},\ |v(\lambda\tau)-v(0)|<\varkappa,\ |\eta|<\alpha,\ \left|\gamma-\frac{\lambda\xi_0'}{\xi_0}\right|<\alpha,\ \left|\delta-\frac{\lambda^2\xi_0''}{\xi_0}\right|<\alpha, \tag{17}$$

где α и $\varkappa$ обозначают некоторые положительные постоянные, причем α, удовлетворяющее неравенству $\alpha<1$, остается пока неопределенным, а σ и $\varkappa$ считаются известными. В этой области правые части уравнений (15) суть голоморфные функции и абсолютные значения этих частей ограничены неравенствами

$$\left.\begin{aligned}&\left|\frac{d\eta}{d\tau}\right|<\alpha+\frac{\lambda|\xi_0'|}{\xi_0},\quad \left|\frac{d\gamma}{d\tau}\right|<\alpha+\frac{\lambda^2|\xi_0''|}{\xi_0},\\ &\left|\frac{d\delta}{d\tau}\right|<\frac{\left[\alpha+\frac{\lambda}{\xi_0}(|\xi_0'|+|v(0)|+\varkappa)\right]\left[\alpha+\frac{\lambda^2}{m\xi_0}(m|\xi_0''|+a)\right]}{1-\alpha}.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Вводим обозначения

$$p=\frac{1}{\xi_0}(|\xi_0'|+|v(0)|+\varkappa),\quad q=\frac{1}{m\xi_0}(m|\xi_0''|+\alpha). \tag{19}$$

Неравенства (18) принимают вид

$$\left|\frac{d\eta}{d\tau}\right| < \alpha + p\lambda, \quad \left|\frac{d\gamma}{d\tau}\right| < \alpha + q\lambda^2, \quad \left|\frac{d\delta}{d\tau}\right| < \frac{(\alpha + p\lambda)(\alpha + q\lambda^2)}{1-\alpha}. \tag{20}$$

Отсюда можно найти верхнюю границу M абсолютных значений правых частей уравнений (15) в указанной выше области. Очевидно M будет функцией α и λ. Диференциальные уравнения (15) допускают единственную систему интегралов голоморфных в области смежной с системой начальных значений переменных τ, η, γ, δ. Целые относительно τ ряды, которыми выражаются эти интегралы, сходятся при $|\tau| < \rho$, где [1])

$$\rho = \frac{\sigma}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\alpha\lambda}{4\sigma M}}\right). \tag{21}$$

Возвращаясь к первоначальному диференциальному уравнению (8), можно представить его интеграл в виде целого ряда

$$\xi = \xi_0 + \xi_0^{(1)} t + \frac{\xi_0^{(2)}}{1.2} t^2 + \frac{\xi_0^{(3)}}{1.2.3} t^3 + \frac{\xi_0^{(4)}}{1.2.3.4} t^4 + \ldots . \tag{22}$$

Производные $\xi_0^{(3)}$, $\xi_0^{(4)}, \ldots$, вычисленные при $t = 0$, находятся: первая—непосредственно из уравнения (8), а остальные—путем его последовательных диференцирований. Ряд (22) будет сходиться при $|t| < r$, где

$$r = \sigma\left(1 - e^{-\frac{\alpha\lambda}{4\sigma M}}\right). \tag{23}$$

Вводим обозначение

$$\varphi(\alpha, \lambda) = \frac{M}{\alpha\lambda}. \tag{24}$$

Тогда

$$r = \sigma\left(1 - e^{-\frac{1}{4\sigma\varphi(\alpha,\lambda)}}\right). \tag{25}$$

Пользуясь неопределенностью α и λ, можно искать систему их значений, доставляющую minimum функции $\varphi(\alpha, \lambda)$, который будет соответствовать maximum'у r.

Если мы в ряде (22) удерживаем только $n+1$ первых членов, то получающаяся при этом ошибка будет меньше, чем аналогичная ошибка при удержании только $n+1$ первых членов разложения функции [1])

$$\xi_0\left[1 + \alpha - \alpha\sqrt[4]{1 + 4\sigma\varphi(\alpha,\lambda)\ln\left(1 - \frac{t}{\sigma}\right)}\right]$$

в ряд по степеням $\frac{t}{\sigma}$.

В действительности клеть подвешивается к канату не непосредственно, а при помощи пружины. Обозначим для последней коэфициент пропорциональности в законе Гука через k_1. Тогда, сохраняя принятые ранее обозначения, мы будем должны заменить диференциальное уравнение (8) движения конца B каната следующим

$$\frac{d}{dt}\frac{\xi^2(m\xi'' - a)}{\xi^2 + \frac{m}{k_1}\left\{\xi\xi'' + v^2(t) - [\xi v(t)]'\right\}} = \frac{\xi[\xi' - v(t)](m\xi'' - a)}{\xi^2 + \frac{m}{k_1}\left\{\xi\xi'' + v^2(t) - [\xi v(t)]'\right\}} \tag{26}$$

При $k_1 \to \infty$ полученное уравнение переходит в уравнение (8).

§ 5. Об одной задаче динамики системы переменной массы

Схема задачи соответствует предельному случаю так называемого бесконечного бремсберга.

Гибкая нерастяжимая нить вынуждена оставаться на идеально гладкой неподвижной кривой $ABCD$ (рис. 6). Обозначим через ρ_1 вес единицы длины одно-

[1]) Goursat, Cours d'Analyse mathématique, t. II, p. 364 n° 383.

родной части нити AB. Введем аналогичное обозначение ρ_2 для части CD. Наконец части BC и DA нити будем считать не имеющими массы. Мы ограничимся случаем четырех подобного рода частей, на которые разбита нить. Общий случай разбирается аналогично. Заметим еще, что в частном случае точки B и C, так же как точки D и A, могут совпасть.

Выбираем на кривой $ABCD$ одно из направлений, например от A к B, за положительное. Пусть данная нить движется в том или ином направлении, например от A к B. Будем предполагать, что благодаря непрерывному включению в рассматриваемую систему новых масс в точках A и C, а также выключению из системы масс в точках B и D, во все время движения нити имеет место стационарное распределение масс на неподвижной кривой, именно распределение, соответствующее начальному моменту и описанное выше.

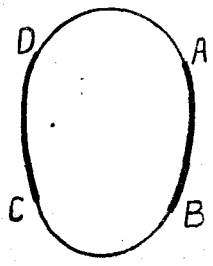


Рис. 6.

Обозначим через v_1 и v_2 скорости включаемых масс в точках A и C, в общем случае не совпадающие со скоростью v нити в данный момент, благодаря чему включение масс будет сопровождаться непрерывными ударами. Наконец предположим, что выключение масс в точках B и D происходит без ударов. Тогда скорость нити будет изменяться непрерывно, а скорости включаемых бесконечно малых масс получают в момент присоединения последних к системе конечные приращения.

Направляем координатную ось Z вертикально вниз и обозначаем координаты точек A, B, C, D соответственно через z_A, z_B, z_C, z_D.

Вводим сокращенное обозначение

$$f = g\frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{p}, \tag{1}$$

где g обозначает ускорение свободного падения, p — полный вес нити, h_1 и h_2 — вертикальные расстояния, взятые с соответствующими знаками, между точками A, B и C, D. Именно

$$h_1 = z_B - z_A, \quad h_2 = z_D - z_C. \tag{2}$$

Пользуясь тем или другим из известных приемов [1]), составляем диференциальное уравнение движения нити

$$\frac{dv}{dt} = f + \frac{\rho_1}{p} v(v_1 - v) + \frac{\rho_2}{p} v(v_2 - v). \tag{3}$$

Здесь v_1 и v_2 могут быть, вообще говоря, функциями времени t и скорости нити v.

Таким образом мы получили диференциальное уравнение первого порядка, определяющее неизвестную функцию v.

Если v_1 и v_2 суть функции только t, уравнение (3) представляет частный случай обобщенного уравнения Riccati. Если $f = 0$ и кроме того v_1 и v_2 зависят только от t, мы имеем уравнение Bernoulli, всегда интегрирующееся в квадратурах.

Если v_1 и v_2 зависят только от v или в частном случае будут постоянны, уравнение (3) также интегрируется в квадратурах.

Наконец отметим еще частный случай, когда во все время движения скорости включаемых масс равны скорости нити в данный момент, т. е. $v_1 = v_2 = v$. В этом случае скорость нити оказывается линейной функцией времени.

Рассмотрим подробнее случай, когда v_1 и v_2 постоянны.

Вводим обозначения

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 + \sqrt{(\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2)^2 + 4pf(\rho_1 + \rho_2)}}{2(\rho_1 + \rho_2)}, \\ \beta &= \frac{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 - \sqrt{(\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2)^2 + 4pf(\rho_1 + \rho_2)}}{2(\rho_1 + \rho_2)}, \\ \lambda &= \frac{\rho_1 + \rho_2}{p}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

[1]) Проф. И. В. Мещерский, Динамика точки переменной массы.

Полагая $f > 0$, видим, что α и β вещественны и кроме того $\alpha > 0$, $\beta < 0$. Уравнение (3) переписывается в виде

$$\frac{dv}{(v-\alpha)(v-\beta)} = -\lambda dt. \tag{5}$$

Его интеграл

$$v = \frac{\alpha - C\beta e^{-\lambda t(\alpha-\beta)}}{1 - Ce^{-\lambda t(\alpha-\beta)}}. \tag{6}$$

Произвольная постоянная C определяется из начального условия

$$v\Big|_{t=0} = v_0. \tag{7}$$

Отсюда

$$C = \frac{v_0 - \alpha}{v_0 - \beta}. \tag{8}$$

Из равенства (6) мы видим, что при беспредельном возрастании времени t движение нити ассимптотически приближается к равномерному. Соответствующий предел скорости будет равен

$$\lim_{t\to\infty} v = \alpha. \tag{9}$$

Если на нить кроме силы веса действует в некоторой точке неподвижной кривой по направлению касательной сила F, взятая с соответствующим знаком, то значение f нужно вычислять по формуле

$$f = g\frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + F}{p}. \tag{10}$$

В случае бремсберга сила F появляется благодаря действию тормоза.

Résumé

§ 1. Sur la théorie du broyeur à boulets.

La durée du mouvement d'un boulet dans le broyeur à boulets peut être partagée en trois intervalles. Au cours du premier le boulet n'a pas de mouvement relatif par rapport au cylindre tournant et se meut comme s'il était invariablement lié à celui-ci. Au début du deuxième intervalle le boulet en question se sépare du cylindre (considérons les boulets extérieurs), mais continue encore à s'appuyer sur le boulet situé au-dessous. Enfin le troisième intervalle commence au moment où le boulet en mouvement quitte celui d'en bas. On identifie d'ordinaire ce moment avec celui de la séparation du boulet d'avec le cylindre. Toutefois ces moments ne coïncident pas en réalité. Pendant le temps qui les partage le boulet inférieur continue à exercer une pression sur le boulet supérieur et grâce à cela altère la trajectoire que le centre de gravité de ce dernier décrit pendant le troisième intervalle.

Dans le présent paragraphe nous envisageons le mouvement du boulet pendant le deuxième intervalle, appliquant les équations intrinsèques (9) et (12) du mouvement du centre de gravité du boulet considéré. On détermine la durée t_1 du deuxième intervalle.

La question du caractère d'un mouvement (relatif par rapport au cylindre tournant) de deux boulets en contact doit être l'objet d'une étude spéciale.

§ 2. Mouvement d'un point pesant avec frottement sur un hélicoïde [1])

Le problème posé se rencontre dans la théorie du séparateur spiral.

Dirigeons l'axe des z verticalement vers le haut. L'équation de l'hélicoïde dans les coordonnées cylindriques r, θ, z a la forme $z = ar + b\ \theta$, où $b < 0$.

[1]) Le contenu de ce paragraphe, lu par l'auteur le 20 novembre 1930 dans la séance de la Société de Mécanique de Leningrade, a été inclus dians la communication faite par le prof. M. Akimoff le 25 juin 1930 au congrès des mathématciens russes à Kharkov sur le même sujet. Ensuite, cette communication a paru dans le journal «Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik» (№ 1, 1931) sous le titre «Ueber einen Fall der Bewegung eines schweren Punktes auf einer rauhen schiefen Schraubenfläche».

Ecrivons les équations différentielles (2) du mouvement [1]), où v designe la vitesse du point, k — le coefficient de frottement, g — l'accélération due à la pesanteur et où est introduite l'indication abrégée (3). Nous voyons par la substitution directe que les équations différentielles (2) ont le système d'intégrales particulières [2]) $r = \alpha$, $\theta = \beta t$, où les constantes α et β se déterminent par les équations (5).

En introduisant les variables nouvelles ξ et η liées avec les variables primitives r et θ par les équations $r = \alpha + \xi$, $\theta = \beta t + \eta$ et en développant les parties gauches des équations différentielles (2) suivant les puissances de ξ, ξ', η', présentons ces équations sous la forme (7), où $\zeta = \eta'$.

Les équations différentielles (7) ont la solution particulière $\xi = 0$, $\zeta = 0$. Cherchons une solution de ces équations voisine à la solution $\xi = 0$, $\zeta = 0$, en présentant ξ et ζ dans la forme des séries infinies

$$\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j, \quad \zeta = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j .$$

On trouve les fonctions ξ_j et ζ_j successivement par les équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants.

Le système (12) d'équations différentielles détermine ξ_1 et ζ_1. Il existe, comme cela se manifeste des exemples numériques, un domaine des valeurs des paramètres a, b, k, pour lequel les racines s_1, s_2, s_3 de l'équation caractéristique (14) du troisième degré, où $\delta = -\frac{b}{a}$, ont la forme $s_1 < 0$, $s_{2,3} = \lambda \pm \mu i$ $(i = \sqrt{-1})$, les parties réelles de toutes les racines étant négatives $(\lambda < 0)$. Dans ce cas les expressions de ξ_1 et $\eta_1 (\zeta_1 = \eta'_1)$ se présentent dans la forme

$$\xi_1 = A e^{s_1 t} + e^{\lambda t} (E \cos \mu t + F \sin \mu t),$$

$$\eta_1 = A \varkappa_1 e^{s_1 t} + e^{\lambda t} [(E\sigma + F\tau) \cos \mu t - (E\tau - F\sigma) \sin \mu t] + D,$$

où A, E, F, D sont des constantes arbitraires et $\varkappa_1$, σ, τ se déterminent des équations (15) et (18).

La solution du système (7) d'équations différentielles exprimée par les séries infinies $\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j$, $\zeta = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j$ sera asymptotique par rapport à la solution $\xi = 0$, $\zeta = 0$.

Ces séries seront convergeantes, si les valeurs absolues des constantes A, E, F sont assez petites.

Remarque. L'étude de la stabilité du mouvement uniforme du point sur une hélice correspondant à la solution particulière $\xi = 0$, $\zeta = 0$ du système d'équations différentielles (7) n'a pas été l'objet de nos considérations. Cependant, des propriétés des racines de l'équation caractéristique (14) signalées ci-dessus, il suit immédiatement que le mouvement considéré est stable par rapport aux fonctions ξ, ξ' et $\zeta = \eta'$.

§ 3. Sur un cas du pendule ayant l'axe de suspension mobile.

Un solide pesant A peut tourner autour de l'axe horizontal B dont deux points glissent sans frottement le long de deux lignes droites DE perpendiculaires à cet axe, immobiles et parallèles (fig. 3). Ces dernières forment avec le plan horizontal l'angle α.

La position du solide se détermine par deux paramètres: l'abscisse s du point B et l'angle φ. Le théorème du mouvement du centre de gravité et celui des forces vives nous fournissent [3]) deux intégrales (2) des équations différentielles du mouvement.

---

[1]) Les équations différentielles (2) du mouvement ont été écrites pour la première fois par le prof. M. Akimoff sans être intégrées, voir prof. L. Levenson, «Machines for ore dressing. Spiral separator, its theory and design», p. 49 — 50 et préface.

[2]) La remarque sur la possibilité du mouvemant correspondant, quand le point décrit uniformément une hélice, a été faite par le prof. L. Levenson.

[3]) Painlevé, Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique, p. 37, V.

La liaison entre le temps t et l'angle φ s'exprime par l'intégrale ultra-elliptique (3) ou (5). Dans le cas particulier ($\varphi_1 = \pi$, $u_1 = -1$) nous aurons le mouvement asymptotique du pendule dans une direction déterminée, quand il s'approche indéfiniment de la position ($\varphi = \pi$) sans jamais l'atteindre. Alors l'intégrale ultra-elliptique (5) se réduit à une intégrale elliptique.

Dans le cas des oscillations petites du pendule autour de la position ($\varphi = 0$) la liaison entre φ et t peut être exprimée par la fonction elliptique de Weierstrass (18).

Le problème considéré est en rapport avec la question de la stabilité du mouvement d'un solide pesant qui glisse sans frottement sur un plan incliné en s'appuyant sur lui le long de deux lignes droites A et B (fig. 4).

§ 4. Sur un mouvement du solide suspendu d'une manière élastique.

D'après les résultats de ce paragraphe on peut écrire l'équation du mouvement de la cage du puits de mine pendant son ascension pour l'intervalle de temps près du moment initial. On résout le problème approximativement en négligeant la masse du câble, sans grande importance en comparaison de la masse de la cage, et on considère le câble comme un fil élastique.

D'abord nous écrivons l'équation différentielle (8) du mouvement de la cage. Son intégrale peut être représentée par une série entière (22) en t (temps) convergente dans le cercle du rayon r déterminé par l'égalité (25). Enfin nous trouvons une limite supérieure de l'erreur qui a lieu si l'on ne retient que $n+1$ premiers termes de la série (22).

§ 5. Sur un problème de dynamique des systèmes de masses variables.

Un fil flexible inextensible est assujetti à rester sur une courbe fixe $ABCD$ (fig. 6). On suppose qu'il n'y a pas de frottement. Désignons par ϱ_1 le poids de l'unité de longueur de la partie homogène AB du fil. Introduisons l'indication analogue ϱ_2 pour la partie CD. Enfin considérons les parties BC et DA du fil comme n'ayant pas de masse.

Supposons que le fil se déplace dans la direction de A à B et que pendant tout le temps du mouvement a lieu une distribution stationnaire des masses sur la courbe fixe. C'est pourquoi quelques unes de ces masses doivent être introduites dans le système dans les points A et C, tandis que les autres doivent être éloignées du système dans les points B et D.

Désignons les vitesses des masses introduites dans les points A et C par v_1 et v_2, ne coïncidant pas dans le cas général avec la vitesse v du fil. Par l'introduction de nouvelles masses il se produit des chocs continus. Supposons que l'éloignement des masses a lieu sans chocs. Tandis que la vitesse v du fil est une fonction continue du temps t, les vitesses des masses infiniment petites introduites dans le système reçoivent des accroissements finis à l'instant de leur adhésion au système.

Pour trouver le mouvement du fil nous employons une des méthodes connues de la dynamique et obtenons l'équation différentielle du mouvement du fil, en désignant par p le poids total du fil et en prenant pour axe des z une verticale dirigée vers le bas (les autres notations sont évidentes)

$$\frac{dv}{dt} = f + \frac{\rho_1}{p} v(v_1 - v) + \frac{\rho_2}{p} v(v_2 - v),$$

où

$$f = \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{p}, \quad h_1 = z_B - z_A, \quad h_2 = z_D - z_C.$$

Si les valeurs v_1 et v_2 des vitesses sont constantes, l'équation précédente peut être intégrée. Dans ce cas, quand le temps t augmente indéfiniment, la vitesse v du fil tend vers une limite déterminée ($f > 0$).