Записки Ленинградского горного института, т. VIII, 1934
Annales de l'Institut des Mines à Leningrade, vol. VIII, 1934

Напряжения в изолированном шаре

Инж. Б. Лунин

Spannungen in einer isolierten Kugel

B. Lunin

I

Предположим, что шар радиуса r из однородного изотропного материала находится под действием только сил притяжения собственной массы. Для определения закона распределения напряжений выделим внутри шара малый элемент двумя парами меридиональных плоскостей, с углом между ними $\Delta\varphi$ и двумя шаровыми поверхностями радиусов

$$\rho + \frac{\Delta\rho}{2} \quad \text{и} \quad \rho - \frac{\Delta\rho}{2}.$$

Обозначая вес единицы объема материала шара (на наружной поверхности) через γ, напряжение по радиусу через σ_ρ, напряжение по касательной к шаровой поверхности (нормальное напряжение в меридиональном сечении) через σ_0, проектируем все силы на ось симметрии выделенного элемента.

Имеем

$$(\Delta\varphi)^2\left(\rho - \frac{\Delta\rho}{2}\right)^2\sigma_\rho - (\Delta\varphi)^2\left(\rho + \frac{\Delta\rho}{2}\right)(\sigma_\rho + \Delta\sigma_\rho) +$$
$$+ 4\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\cdot\Delta\varphi\cdot\rho\cdot\Delta\rho\sigma_0 - \frac{(\Delta\varphi)^2\rho^3\cdot\Delta\rho\cdot\gamma}{r} = 0.$$

Переходя к пределу, пренебрегая малыми высших порядков и сокращая, получаем:

$$-2\sigma_\rho d\rho - \rho d\sigma_\rho - \frac{\gamma\rho^2 d\rho}{r} = 0,$$

или

$$2(\sigma_0 - \sigma_\rho) - \rho\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} - \frac{\gamma\rho^2}{r} = 0 \qquad (1)$$

Обозначим приращение длины радиуса ρ после деформации через u. Тогда относительные деформации будут:

$$\xi_0 = \frac{u}{\rho} = \frac{1}{E}(\sigma_0 - \mu\sigma_0 - \mu\sigma_\rho)$$

$$\xi_\rho = \frac{du}{d\rho} = \frac{1}{E}(\sigma_\rho - 2\mu\sigma_0),$$

откуда

$$\frac{u}{\rho} - \frac{du}{d\rho} = \frac{1+\mu}{E}(\sigma_0 - \sigma_\rho)$$

или

$$\sigma_0 - \sigma_\rho = \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{u}{\rho} - \frac{du}{d\rho}\right).$$

Здесь E — модуль упругости и μ — Пуассоново число материала шара. Имеем также:

$$\frac{u}{\rho}+\mu\frac{du}{d\rho}=\frac{\sigma_0}{E}(1-\mu-2\mu^2)$$

$$\sigma_0=\frac{E\left(\frac{u}{\rho}+\mu\frac{du}{d\rho}\right)}{1-\mu-2\mu^2};\qquad \sigma_\rho=E\frac{du}{d\rho}+\frac{2\mu E\left(\frac{\mu}{\rho}+\mu\frac{du}{d\rho}\right)}{1-\mu-2\mu^2}$$

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho}=E\frac{d^2u}{d\rho^2}+\frac{2\mu E}{1-\mu-2\mu^2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{du}{d\rho}-\frac{u}{\rho^2}+\mu\frac{d^2u}{d\rho^2}\right)=$$

$$=\frac{E\left[(1-\mu)\frac{d^2u}{d\rho^2}+2\mu\left(\frac{1}{\rho}\frac{du}{d\rho}-\frac{u}{\rho^2}\right)\right]}{(1+\mu)(1-2\mu)}.$$

Подставляя найденные выражения $\sigma_0-\sigma_\rho$ и $\frac{d\sigma_\rho}{d\rho}$ в уравнение (1), получаем:

$$\frac{2E}{1+\mu}\left(\frac{u}{\rho}-\frac{du}{d\rho}\right)-\frac{E\rho\left[(1-\mu)\frac{d^2u}{d\rho^2}+2\mu\left(\frac{1}{\rho}\frac{du}{d\rho}-\frac{u}{\rho^2}\right)\right]}{(1+\mu)(1-2\mu)}-\frac{\gamma\rho^2}{r}=0$$

или

$$\frac{d^2u}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{du}{d\rho}-\frac{2u}{\rho^2}=\frac{-(1+\mu)(1-2\mu)\rho}{(1-\mu)Er}=-A\rho.$$

Здесь

$$A=\gamma\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{(1-\mu)Er}.$$

Так как

$$\frac{d^2u}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{du}{d\rho}-\frac{2u}{\rho^2}=\frac{d}{d\rho}\left(\frac{du}{d\rho}+\frac{2u}{\rho}\right)$$

то

$$\frac{du}{d\rho}+\frac{2u}{\rho}=-\frac{A\rho^2}{2}+C$$

или

$$\rho\frac{du}{d\rho}+2u=-\frac{A\rho^3}{2}+C\rho.$$

Для интегрирования этого уравнения положим $u=yz$. Тогда:

$$\rho\frac{dy}{d\rho}\cdot z+\rho\frac{dz}{d\rho}\cdot y+2yz=-\frac{A\rho^3}{2}+C\rho.$$

Приравнивая

$$\rho\frac{dz}{d\rho}y+2yz$$

нулю, имеем:

$$\rho\frac{dz}{d\rho}=-2z,$$

откуда

$$2\ln\rho=\ln D-\ln z$$

или

$$z=\frac{D}{\rho^2}.$$

Следовательно

$$\frac{D}{\rho}\frac{dy}{d\rho}=-\frac{A\rho^3}{2}+C\rho$$

$$Dy=-\frac{A\rho^5}{10}+\frac{C\rho^3}{3}+F.$$

Поэтому

$$u = -\frac{A\rho^3}{10} + \frac{C\rho}{3} + \frac{F}{\rho^2} \tag{2}$$

$$\frac{du}{d\rho} = -\frac{3A\rho^2}{10} + \frac{C}{3} - \frac{2F}{\rho^3}. \tag{3}$$

Так как при $\rho = 0$, $u = 0$, то $F = 0$.

Напряжения σ_ρ и σ_0 выражаются так:

$$\sigma_\rho = \frac{E\left[(1-\mu)\left(-\frac{3A\rho^2}{10} + \frac{C}{3}\right) + 2\mu\left(-\frac{A\rho^2}{10} + \frac{C}{3}\right)\right]}{(1+\mu)(1-2\mu)} =$$

$$= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[-\frac{A(3-\mu)}{10}\rho^2 + \frac{C}{3}(1+\mu)\right]$$

$$\sigma_0 = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[-\frac{A(1+3\mu)}{10}\rho^2 + \frac{C}{3}(1+\mu)\right]$$

При $\rho = r$, $\sigma_\rho = 0$, следовательно

$$\frac{C(1+\mu)}{10} = \frac{A(3-\mu)}{10} r^2$$

$$\sigma_\rho = \frac{AE(3-\mu)}{10(1+\mu)(1-2\mu)}(r^2 - \rho^2) = \frac{\gamma(3-\mu)}{10(1-\mu)} \cdot \frac{(r^2-\rho^2)}{r}.$$

Максимальной величины σ_ρ достигает в центре шара, где оно равно:

$$\sigma_{\rho\,\max} = \frac{\gamma(3-\mu)r}{10(1-\mu)}.$$

При $\rho = r$, $\sigma_\rho = 0$.

Полагая $\rho = r - h$, имеем при малых (сравнительно с r) значениях h

$$\sigma_\rho = \frac{\gamma(3-\mu)}{5(1-\mu)} h,$$

т. е. на небольших расстояниях h радиальное напряжение прямо пропорционально глубине.

$$\sigma_0 = \frac{\gamma}{10(1-\mu)\cdot r}[(3-\mu)r^2 - (1+3\mu)\rho^2].$$

При $\rho = 0$

$$\sigma_{0\,\max} = \sigma_{\rho\,\max} = \frac{\gamma(3-\mu)r}{10(1-\mu)}.$$

При $\rho = r$

$$\sigma_{0\,\min} = \frac{\gamma(1-2\mu)r}{5(1-\mu)}.$$

Если $\mu = 0{,}5$, то $\sigma_{0\,\min} = 0$.

II.

Предположим теперь, что шарообразное тело состоит из несжимаемого ядра радиусом r_1 и из плотно прилегающей к ядру шаровой оболочки (упругой и сжимаемой), наружный радиус которой равен попрежнему r. Считая плотность ядра и

плотность оболочки одинаковыми, мы можем воспользоваться ранее выведенными формулами, полагая при $\rho = r_1$, равным нулю u, т. е.

$$-\frac{Ar_1^3}{10}+\frac{Cr_1}{3}+\frac{F}{r_1^2}=0.$$

Так как

$$\sigma_\rho=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\left(-\frac{3A\rho^2}{10}+\frac{C}{3}-\frac{2F}{\rho^3}\right)+2\mu\left(-\frac{A\rho^2}{10}+\frac{C}{3}+\frac{F}{\rho^3}\right)\right]$$

и так как при $\rho = r$, $\sigma_\rho = 0$, то

$$-\frac{Ar^2(3-\mu)}{10(1+\mu)}+\frac{C}{3}-\frac{2F(1-2\mu)}{r^3(1+\mu)}=0.$$

Исключая $\frac{C}{3}$, находим:

$$-\frac{A}{10}\left[-r_1^2+r^2\frac{(3-\mu)}{1+\mu}\right]=F\cdot\left[\frac{2(1-2\mu)}{(1+\mu)r^3}+\frac{1}{r_1^3}\right].$$

Откуда

$$F=\frac{Ar_1^3r^3[r_1^2(1+\mu)-r^2(3-\mu)]}{10[2r_1^3(1-2\mu)+r^3(1+\mu)]}$$

$$\frac{C}{3}=\frac{Ar_1^2}{10}-\frac{A[r_1^2(1+\mu)-r^2(3-\mu)]r^3}{10[2r_1^3(1-2\mu)+r^3(1+\mu)]}$$

$$\sigma_\rho=\frac{\gamma}{10(1-\mu)\cdot r}\left\{(1+\mu)r_1^2-(3-\mu)\rho^2+\left[1+\mu+2(1-2\mu)\frac{r_1^3}{\rho^3}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\frac{[(3-\mu)r^2-(1+\mu)r_1^2]r^3}{2r_1^3(1-2\mu)+r^3(1+\mu)}\right\}.$$

При $\rho = r_1$, σ_ρ достигает максимальной величины

$$\sigma_{\rho\,\max}=\frac{\gamma r_1^2}{10r}\left\{\frac{3r^3\left[(3-\mu)\frac{r^2}{r_1^2}-(1+\mu)\right]}{2(1-\mu)r_1^3+(1+\mu)r^3}-2\right\}$$

$$\sigma_0=\frac{\gamma}{10(1-\mu)r}\left\{(1+\mu)r_1^2-(1+3\mu)\rho^2+\left[1+\mu-(1-2\mu)\frac{r_1^3}{\rho^3}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\frac{[(3-\mu)r^2-(1+\mu)r_1^2]r^3}{2r_1^3(1-3\mu)+r^3(1+\mu)}\right\}.$$

При $\rho = r_1$

$$\sigma_{0\,\max}=\frac{\gamma r_1^2}{10(1-\mu)r}\left\{\frac{3\mu r^3\left[(3-\mu)\frac{r^2}{r_1^2}-(1+\mu)\right]}{2(1-\mu)r_1^3+(1+\mu)r^3}-2\mu\right\}.$$

При $\rho = r$

$$\sigma_{0\,\min}=\frac{\gamma(1+\mu)(1-2\mu)(3r_1^5-5r_1^3r^2+2r^5)}{10(1-\mu)r[2r_1^3(1-2\mu)+r^3(1+\mu)]}.$$

Если $\mu = 0{,}5$, то

$$\sigma_0=\frac{\gamma(r^2-\rho^2)}{2r}.$$

Полагая $\rho = r-h$ и пренебрегая при малых сравнительно с r величинах h квадратами их, имеем: $\sigma_0 = \gamma h$, т. е. напряжение меняется, как и следовало ожидать, по гидростатическому закону.

Рассмотрим случай, когда разность $r - r_1 = H$ мала по сравнению с r. Полагая, как выше, $r - \rho = h$, имеем:

$$\sigma_\rho \cong \frac{\gamma}{10(1-\mu)r}\left\{-2r^2 + 2\mu r^2 - 2rH - 2\mu rH + 6rh - 2\mu rh + \right.$$
$$\left. + \frac{2r^2[(1-\mu)r - (1+\mu)h - 2(1-2\mu)H]\cdot[1-\mu)r + (1+\mu)H]}{(r-3h)[(1-\mu)r - 2(1-2\mu)H]}\right\} \cong$$
$$\cong \frac{\gamma}{5(1-\mu)}\left\{\frac{3h}{r-3h}[(1-\mu)r + (1+\mu)H] + 3h - \mu h - \right.$$
$$\left. - \frac{(1-\mu^2)r^2 h}{(r-3h)[(1-\mu)r - 2(1-2\mu)H]}\right\} \cong \frac{\gamma(1-\mu)r^2 h}{(r-3h)[(1-\mu)r - 2(1-\mu)H]} \cong h\gamma$$

$$\sigma_0 \cong \frac{\gamma}{10(1-\mu)r}\cdot\left\{-2\mu r^2 - 2Hr(1+\mu) + 2hr(1+3\mu) + \right.$$
$$\left. + \frac{2r^2[\mu r - (1+\mu)h + (1-2\mu)H]\cdot[(1-\mu)r + (1+\mu)H]}{(r-3h)[(1-\mu)r - 2(1-2\mu)H]}\right\} \cong$$
$$\cong \frac{\gamma}{5(1-\mu)}\left\{-\mu r - H(1+\mu) + h(1+3\mu) + \right.$$
$$\left. + \frac{[\mu r - (1+\mu)h + (1-2\mu)H]\cdot(1-\mu)r + \mu rH(1+\mu)}{(r-3h)(1-\mu) - 2(1-2\mu)H}\right\} \cong$$
$$\cong \frac{\gamma}{5(1-\mu)[(r-3h)(1-\mu) - 2(1-2\mu)H]} \times$$
$$\times [3\mu rh(1-\mu) + \mu r2(1-2\mu)H - r(1-\mu)(1+\mu)H +$$
$$+ rh(1-\mu)(1+3\mu) - (1+\mu)(1-\mu)rh + (1-2\mu+3\mu^2)rH] \cong$$
$$\cong \frac{\gamma\mu rh}{(r-3h)(1-\mu) - 2(1-2\mu)H} \cong \frac{\gamma\mu h}{1-\mu}.$$

Zusammenfassung

Es wird eine ideal elastische Kugel betrachtet, deren Material sich nur unter der Einwirkung der Anziehungskraft seiner Masse befindet. Danach wird von der Voraussetzung ausgegangen, dass sich in der Kugel ein nichtzusammendrückbarer Kern befindet. Bei der Annahme, dass die Dicke der Hülle im Verhältnis zum Radius des Kernes klein ist, wird iür die Spannungen in den meridionalen Schnitten die Formel

$$\sigma_0 = \frac{\gamma h\mu}{(1-\mu)},$$

erhalten, welche früher von verschiedenen Verfassern (unter anderen — Akad. Dynnik) aus gänzlich anderen Voraussetzungen erhalten worden ist.