*Записки Ленинградского горного института, т. VIII, 1934*
*Annales de l'Institut des Mines à Leningrade, vol. VIII, 1934*

# Об одном случае предельной теоремы исчисления вероятностей

*Доц. А. Казанский*

## Sur un cas du théorême de limite de la théorie des probabilités

*A. Kazansky*

В данной работе имеется в виду рассмотрение случая предельной теоремы относительно независимых величин — случая, который был разработан академиками Марковым и Ляпуновым, в результате чего получились известные в науке условия Ляпунова.

Дальнейшие работы по рассматриваемому вопросу сводились главным образом к выработке новых методов доказательств теоремы о пределе вероятности и существенного расширения условий Ляпунова не дали.

Поэтому естественно поставить и попытаться решить задачу о расширении условий Ляпунова, чему и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим ряд независимых случайных переменных

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

содержащихся в промежутке $(-\infty, +\infty)$ и имеющих функциями распределения соответственно функции ряда

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x),$$

где

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi_i(x) = 1 \text{ для } i = 1, 2, \ldots, \ldots$$

Обозначим

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x d\varphi_n(x), \quad A_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a_n)^2 d\varphi_n(x), \quad A = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

и наконец

$$\beta_n^{(\gamma)} = \int_{A^\gamma}^{\infty} (x - a_n)^2 d\varphi_n(x) + \int_{-\infty}^{-A^\gamma} (x - a_n)^2 d\varphi_n(x)$$

Тогда мы докажем, что если ряд $A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$ расходящийся и если существует такое $\gamma < \frac{1}{2}$, что

$$\frac{\beta_1^{(\gamma)} + \beta_2^{(\gamma)} + \ldots + \beta_n^{(\gamma)}}{A^{2\gamma}} \to 0,$$

то обязательна вероятность

$$(\text{I}) \qquad P\left(t_1 < \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n}{\sqrt{2(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)}} < t_2\right) \to \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t} e^{-t^2} dt.$$

Для краткости в дальнейшем введем следующие обозначения: $x_n - a_n = y_n$ и $\varphi_n(y_n + a_n) = \varphi_n(y_n)$ и новую переменную $z_n$, равную $y_n$ в промежутке $(-, +)$ $(-A^{\gamma}. + A^{\gamma})$ и нулю вне этого промежутка.

Пусть для величин $z_1, z_2, \ldots, z_n$ вероятность неравенства

$$(\text{II}) \qquad P\left(t_1 < \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{\sqrt{2(A_1 + \ldots + A_n)}} < t_2\right) = P_z$$

и пусть вероятность (I) в новых обозначениях

$$(\text{I}) \qquad P\left(t_1 < \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{\sqrt{2(A_1 + \ldots + A_n)}} < t_2\right) = P_y;$$

докажем, что $P_y - P_z \to 0$ при $n \to \infty$.

В самом деле, неравенства (II) и (I) равновероятны во всех тех случаях, когда все $y_i$ лежат в промежутке $(-A^{\gamma}, +A^{\gamma})$.

Но они могут быть неравновероятными, если хоть одно из $y_i$ выходит из пределов этого промежутка.

Отсюда следует, что $P_y - P_z$ не больше вероятности нарушения одного из неравенств.

$$-A^{\gamma} < y_i < A^{\gamma},$$

т. е. не больше вероятности иметь место одному из неравенств.

$$|y_i| > A^{\gamma},$$

которые мы обозначим через $q_i$, где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Следовательно

$$P_y - P_z < \sum_{i=1}^{n} q_i,$$

но

$$q_i = \int_{A^{\gamma}}^{\infty} d\varphi_i(y) + \int_{-\infty}^{-A^{\gamma}} d\varphi_i(y) < \frac{1}{A^{2\gamma}} \left[\int_{A^{\gamma}}^{\infty} y^2 d\varphi_i(y) + \int_{-\infty}^{-A^{\gamma}} y^2 d\varphi_i(y)\right]$$

или иначе

$$q_i < \frac{1}{A^{2\gamma}} \beta_i^{(\gamma)}.$$

Таким образом

$$P_y - P_z < \frac{\beta_1^{(\gamma)} + \beta_2^{(\gamma)} + \ldots + \beta_n^{(\gamma)}}{(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)^{2\gamma}} \to 0,$$

т. е. $P_y - P_z \to 0$, и если мы докажем, что

$$P_z \to \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt,$$

то тем самым докажем теорему.

Для доказательства воспользуемся методом моментов и рассмотрим

$$L_n = M \cdot O \cdot \left[\frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{\sqrt{2A}}\right]^{\alpha} =$$

$$= \sum_{S_1, S_2, \ldots, S_n} \frac{1}{(2A)^{\frac{1}{2}\alpha}} \frac{\alpha!}{S_1! \ldots S_n!} M.\ O.\ (z_1^{S_1} z_2^{S_2} \ldots z_2^{S_n}),$$

где суммирование распространяется на всевозможные $S_1, S_2, \ldots, S_n$, удовлетворяющие условию $S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \alpha$, или в силу наших обозначений

$$\text{(III)} \qquad L_n = \frac{1}{(2A)^{\alpha/2}} \sum \frac{\alpha!}{S_1! \ldots S_n!} \int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} z^{S_1} d\varphi_1(z) \ldots \int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} z^{S_n} d\varphi_n(z).$$

Разобьем сумму (III) на ряд сумм, определяя каждую из последних некоторым числом $l$, смысл которого мы сейчас выясним.

Число $l$ — число чисел среди $S_1, S_2, \ldots, S_n$, не равных нулю, это число не больше $\alpha$, и поэтому наших сумм может быть только конечное множество.

Итак

$$L_n = K_1 + K_2 + \ldots + K_\alpha$$

где $K_i$ — частичная сумма суммы (III), соответствующая $l = i$.

Последующие рассуждения разобьем на несколько этапов, согласуясь с некоторыми предположениями относительно $l$.

1) $l < \frac{\alpha}{2}$, сначала все числа вида $\int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} d\varphi_n(z) < 1$ заменим единицей, что делаем повсюду, за исключением тех случаев, когда это будет особо оговорено, после чего мы очевидно получаем

$$|K_l| < \frac{\alpha!}{2^{\frac{1}{2}\alpha} A^{\frac{1}{2}\alpha}} \sum \left| \int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} z^{S_{\alpha_1}} d\varphi_{\alpha_1}(z) \right| \ldots \left| \int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} z^{S_{\alpha_l}} d\varphi_{\alpha_l} z) \right|,$$

где суммирование распространяется на всевозможные сочетания $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ из $1, 2, \ldots, n$ в комбинации с всевозможными $S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}, \ldots, S_{\alpha_l}$, удовлетворяющими условию

$$S_{\alpha_1} + S_{\alpha_2} + \ldots + S_{\alpha_l} = \alpha.$$

Заметив еще, что различные комбинации значков $S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} \ldots, S_{\alpha_l}$ возможны в конечном числе $m_l$, поэтому одинаковые комбинации значков $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ возможны в числе не больше $m_l$; рассмотрим

$$N_{S_{\alpha_1}} = \left| \int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} z^{S_{\alpha_1}} d\varphi_{\alpha_1}(z) \right|$$

и разберем два случая:

a) $S_{\alpha_1} > 1$; тогда

$$N_{S_{\alpha_1}} \leqslant A^{\gamma(S_{\alpha_1} - 2)} \int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} z^2 d\varphi_{\alpha_1}(z) = A^{\gamma(S_{\alpha_1} - 2)} A_{\alpha_1},$$

b) $S_{\alpha_1} = 1$; тогда

$$\int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} z d\varphi_{\alpha_1}(z) + \int_{A^\gamma}^{\infty} y d\varphi_{\alpha_1}(y) + \int_{-\infty}^{-A^\gamma} y d\varphi_{\alpha_1}(y) = 0,$$

откуда ясно, что

$$N_{S_{\alpha_1}} \leqslant \frac{1}{A^\gamma} A_{\alpha_1} = A^{\gamma(S_{\alpha_1} - 2)} A_{\alpha_1} \quad (S_{\alpha_1} = 1),$$

следовательно при любом $S_{\alpha_1}$

$$\left| \int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} z^{S_{\alpha_1}} d\varphi_{\alpha_1}(z) \right| < A^{(S_{\alpha_1}-2)\gamma} A_{\alpha_1}$$

и

$$|K_l| < \frac{\alpha_l}{(2A)^{\frac{1}{2}\alpha}} \sum A^{(S_{\alpha_1}-2)\gamma} A_{\alpha_1} \ldots A^{(S_{\alpha_l}-2)\gamma} A_{\alpha_l}$$

или иначе

$$|K_l| < \frac{\alpha_l m_l}{2^{\frac{1}{2}\alpha}} \cdot \frac{A^{(\alpha-2l)\gamma}}{A^{\frac{1}{2}l}} \sum A_{\gamma_1} \ldots A_{\gamma_l},$$

где суммирование распространяется на всевозможные сочетания $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ из $1, 2, \ldots, n$.

Заметив, что

$$\sum A_{\gamma_1} \ldots A_{\gamma_l} < (A_1 + \ldots + A_n)^l < A^l,$$

получаем, что

$$|K_l| < \frac{\alpha_l m_l}{2^{\frac{1}{2}\alpha}} \frac{A^{(\alpha-2l)\gamma+l}}{A^{\frac{1}{2}\alpha}} \to 0$$

в силу того, что $A \to \infty$ и $l < \frac{\alpha}{2}$.

Таким образом окончательно все $K_l \to 0$, если только $l < \frac{\alpha}{2}$.

2) $l \geqslant \frac{\alpha}{2}$; рассмотрим два случая:

I случай; $\alpha = 2p+1$, тогда $l$ не может равняться $\frac{\alpha}{2}$, и нам остается рассмотреть совокупность чисел $l > \frac{\alpha}{2}$. Любое из этих чисел мы можем мыслить как одно из чисел формулы

$$l = p + k, \text{ где } k \leqslant p+1.$$

В каждом слагаемом $K_l$, соответствующем $l = p+k$, имеется по крайней мере $k$ чисел из $S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}, \ldots, S_{\alpha_l}$ равных единице, т. е.

$$|K_{p+k}| \leqslant \frac{\alpha!}{2^{\frac{1}{2}\alpha} A^{p+\frac{1}{2}}} \sum \left| \int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} z^{S_{\alpha_1}} d\varphi_{\alpha_1} \right| \ldots \left| \int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} z^{S_{\alpha_p}} d\varphi_{\alpha_p} \right| \cdot$$

$$\cdot \left| \int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} z d\varphi_{\alpha_{p+1}} \right| \ldots \left| \int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} z d\varphi_{\alpha_{p+k}} \right|,$$

откуда

$$|K_{p+k}| < \frac{\alpha!}{2^{\frac{1}{2}\alpha} A^{p+\frac{1}{2}}} \overset{(*)}{\sum} \left| \int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} z^{S_{\alpha_1}} d\varphi_{\alpha_1} \right| \ldots \left| \int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} z^{S_{\alpha_p}} d\varphi_{\alpha_p} \right| \cdot$$

$$\cdot \overset{(**)}{\sum} \left| \int_{A^\gamma}^{+A^\gamma} z d\varphi_{\alpha_{p+1}} \right| \ldots \left| \int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} z d\varphi_{\alpha_{p+k}} \right|,$$

где $\sum^{(*)}$ распространяется на всевозможные сочетания $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ из $1, 2, \ldots, n$ в комбинации с всевозможными $S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}, \ldots, S_{\alpha_p}$, удовлетворяющими условию $S_{\alpha_1} + S_{\alpha_2} + \ldots + S_{\alpha_p} = \alpha - k$, а $\sum^{(**)}$ на всевозможные $\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{p+k}$ из $1, 2, \ldots, n$.

Совершенно так же, как и выше, установим, что

$$\sum^{(*)} \left| \int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} z^{S_{\alpha_1}} d\varphi_{\alpha_1} \right| \ldots \left| \int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} z^{S_{\alpha_p}} d\varphi_{\alpha_p} \right| < A^{\gamma(\alpha - k - 2p) + p} m_p;$$

кроме того

$$\left| \int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} z d\varphi_{\alpha_1} \right| \leqslant \left| \int_{A^\gamma}^{\infty} y d\varphi_{\alpha_1} \right| + \left| \int_{-\infty}^{-A^\gamma} y d\varphi_{\alpha_1} \right| < \frac{1}{A^\gamma} \beta_{\alpha_1}^{(\gamma)},$$

т. е.

$$\sum^{(**)} \left| \int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} z d\varphi_{\alpha_p + 1} \right| \ldots \left| \int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} z d\varphi_{\alpha_p + k} \right| < \frac{1}{A^{k\gamma}} \sum^{(kk)} \beta_{\alpha_p + 1}^{(\gamma)} \ldots \beta_{\alpha_p + k}^{(\gamma)}$$

и следовательно

$$|K_{p+k}| < \frac{\alpha_l m_l}{2^{\frac{1}{2}\alpha}} \cdot \frac{A^{(\alpha - 2p)\gamma + p}}{A^{p + \frac{1}{\alpha}}} \left[ \frac{\beta_1^{(\gamma)} + \ldots + \beta_n^{(\gamma)}}{A^{2\gamma}} \right]^k \to 0,$$

ибо $p < \frac{\alpha}{2}$.

Итак, в случае $\alpha = 2p + 1$, $K_l \to 0$ при любом $l$ и следовательно

$$\lim \left[ M.\ O.\ \left( \frac{z_1 + \ldots + z_n}{\sqrt{2A}} \right)^{2p+1} \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p+1} e^{-t^2} dt.$$

II случай. $\alpha = 2p + 1$; любое из чисел $l$ заключается в формуле

$$l = p + k, \quad \text{где} \quad k = 1, 2, \ldots, p.$$

Положив $l = p + k$ и рассуждая так же, как выше, получим

$$|K_l| < \frac{\alpha_l m_l}{2^{\frac{1}{2}\alpha}} \left[ \frac{\beta_1^{(\gamma)} + \beta_2^{(\gamma)} + \ldots + \beta_n^{(\gamma)}}{A^{2(\gamma)}} \right]^k \to 0,$$

т. е. $K_l \to 0$, если только $k \neq 0$, т. е. $b \neq p$.

Таким образом случай $l = p$ придется разобрать особо, для чего обозначим через

$$A_i^{(\gamma)} = \int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} z^2 d\varphi_i(z).$$

Тогда очевидно, что

$$K_p = \frac{1}{2^p A^p} \sum \frac{2p!}{2^p} A_{\alpha_1}^{(\gamma)} A_{\alpha_2}^{(\gamma)} \ldots A_{\alpha_p}^{(\gamma)} \int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} d\varphi_{\alpha_p + 1} \ldots \int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma} d\varphi_{\alpha_n}$$

и следовательно

$$\frac{2p!}{2^{2p}A^p}\sum A_{\alpha_1}^{(\gamma)}\dots A_{\alpha_p}^{(\gamma)}-K_p=\frac{2p!}{2^{2p}A^p}\cdot$$

$$\cdot\sum A_{\alpha_1}^{(\gamma)}\dots A_{\alpha_p}\left[1-\int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma}d\varphi_{\alpha_p+1}\dots\int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma}d\varphi_{\alpha_n}\right]$$

Заметив, что $\int_{-A^\gamma}^{+A^\gamma}d\varphi_{\alpha_1}<1$, легко найдем, что

$$1-\int_{+A^\gamma}^{+A^\gamma}d\varphi_{\alpha_p+1}\dots\int_{+A^\gamma}^{+A^\gamma}d\varphi_{\alpha_n}<\left(1-\int_{+A^\gamma}^{+A^\gamma}d\varphi_{\alpha_p+1}\right)+\dots+\left(1-\int_{+A}^{+A^\gamma}d\varphi_{\alpha_n}\right)=$$

$$=q_{\alpha_p+1}+\dots+q_{\alpha_n}<q_1+q_2+\dots+q_n,\ \text{где}\ \ q_i=\int_{A^\gamma}^{\infty}\dot{d}\varphi_i+\int_{-\infty}^{-A^\gamma}d\varphi_i,$$

откуда совершенно ясно, что

$$\frac{2p!}{2^{2p}A^p}\sum A_{\alpha_1}^{(\gamma)}\dots A_{\alpha_p}^{(\gamma)}-K_p<\frac{2p!}{2^{2p}}(q_1+\dots+q_n)\to 0,$$

ибо мы показали вначале, что при наших условиях $q_1+\dots+q_n\to 0$.

Итак

$$\lim K_p=\lim\sum A_{\alpha_1}^{(\gamma)}A_{\alpha_2}^{(\gamma)}\dots A_{\alpha_p}^{(\gamma)}$$

и нам остается следовательно найти предел, стоящий в правой части; для этого воспользуемся тождеством

$$p!\sum A_{\alpha_1}^{(\gamma)}\dots A_{\alpha_p}^{(\gamma)}=\left(\sum A_i^{(\gamma)}\right)^p-\sum\frac{p!}{k_1!\dots k_i!}\dots(A_{\alpha_1}^{(\gamma)})^{k_1}\dots(A_{\alpha_i})^{k_i},$$

где в последней сумме суммирование распространяется на все возможные $k_1+k_2+\dots+k_p=p$ и где в каждом произведении хоть одно $k_i\neq 1$, т. е. больше единицы.

Тогда

$$\lim K_p=\frac{2p!}{2^{2p}p!}-\frac{2p!}{2^{2p}p!}\lim\frac{\sum\frac{p!}{k_1!\dots k_i!}(A_{\alpha_1}^{(\gamma)})^{k_1}\dots(A_{\alpha_i}^{(\gamma)})^{k_i}}{A^p}\ ^{1)}$$

и нам остается рассмотреть

$$\frac{1}{A^p}\sum\frac{p!}{k_1!\dots k_p!}(A_{\alpha_1}^{(\gamma)})^{k_1}\dots(A_{\alpha}^{(\gamma)})^{k_p}<\frac{p!}{A^p}\sum(A_{\alpha_1}^{(\gamma)})^{k_1}\dots(A_{\alpha_p}^{(\gamma)})^{k_p}=S_p,$$

где последнюю сумму мы разобьем на ряд сумм, определяя каждую из них числом $l$, равным числу чисел среди $k_1, k_2, \dots, k_p$, не равных нулю.

При этих условиях

$$\frac{1}{A^p}\sum(A_{\alpha_1}^{(\gamma)})^{k_1}\dots(A_{\alpha_p}^{(\gamma)})^{k_p}=M_1+M_2+\dots+M_{p-1}$$

---

1) $\lim\left[\frac{\left(\sum A_i^{(\gamma)}\right)^p}{\left(\sum A_i\right)^p}\right]=\lim\left[1-\frac{\sum\beta_i^{(\gamma)}}{\sum A_i}\right]=1$, ибо $\lim\frac{\sum\beta_i^{(\gamma)}}{\sum A_i}=0$.

где $M_i = \frac{1}{A^p}\sum (A_{\alpha_1}^{(\gamma)})^{k_1} \ldots (A_{\alpha_i}^{(\gamma)})^{k_i}$, и суммирование распространяется на всевозможные сочетания $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ из $1, 2, \ldots, n$ в комбинации $k_1, \ldots, k_i$, удовлетворяющие условию $k_1 + k_2 + \ldots + k_i = p$; число комбинаций мы обозначим через $m_i$.

Заметив еще, что

$$(A_{\alpha_1}^{(\gamma)})^{k_1} \leqslant A^{\gamma(k_1-1)}\, A_{\alpha}^{(\gamma)}$$

получим, что

$$M_i \leqslant \frac{[A]^{\gamma(p-i)+i}}{A^p} \to 0,$$

ибо всегда $i < p$.

Таким образом

$$\lim K_p = \frac{2p!}{2^{2p}p!},$$

отсюда

$$\lim\left[M.\ O.\ \left(\frac{z_1 + \ldots + z_n}{\sqrt{2A}}\right)^{2p}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} t^{2p} e^{-t^2}\, dt$$

И следовательно в силу теоремы Чебышева-Маркова

$$\lim P_z = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt,$$

откуда окончательно

$$\lim P\left(t_1 < \frac{x_1 + \ldots + x_n - a_1 - \ldots - a_n}{\sqrt{2(A_1 + \ldots + A_n)}} > t_2\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt,$$

т. е. теорема доказана.

После того как мы установили теорему, желательно сравнить полученные нами условия с условиями Ляпунова. Пользуясь неравенством Ляпунова

$$\left(\sum f(x)x^m\right)^{l-n} < \left(\sum f(x)x^n\right)^{l-m}\left(\sum f(x)x^l\right)^{m-n}$$

где $l > m \geqslant n \geqslant 0$, легко показать, что если

$$\frac{\left(\sum A_i^{(2+\delta_1)}\right)^2}{\left(\sum A_i\right)^{2+2\theta\delta}} \to 0$$

для некоторого $\delta_1$, то это отношение стремится к нулю для всякого $\delta < \delta_1$; здесь

$$A_i^{(2+\delta)} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_i - \alpha_i|^{2+\delta} d\varphi_i(x)$$

Заметив это, докажем теорему: если для некоторого $\delta$ моменты $A_i^{(2+\delta)}$ существуют при $i = 1, 2, \ldots$ и если для некоторого $\theta < 1$

$$\frac{A_1^{(2+\delta)} + A_2^{(2+\delta)} + \ldots + A_n^{(2+\delta)}}{(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)^{1+\theta\delta}} \to 0,$$

то обязательно

$$P\left(t_1 < \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n - a_1 - a_2 + \ldots - a_n}{\sqrt{(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)}} < t_2\right) \to \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt$$

Доказательство: в силу сделанного замечания можем считать $\delta < \frac{1}{3}$, но

$$\beta_n^{(\delta)} = \int_{A_n^{\delta}}^{\infty} y^2 d\varphi_n(y) + \int_{-\infty}^{-A_n^{\delta}} y^2 d\varphi_n(y) \leqslant \frac{1}{A_n^{\delta}} A_n^{(2+\delta)},$$

тогда очевидно

$$\frac{\beta_1^{(\delta)} + \beta_2^{(\delta)} + \ldots + \beta_n^{(\delta)}}{A^{1-\theta_1\delta}} < \frac{A_1^{(2+\delta)} + A_2^{(2+\delta)} + \ldots + A_n^{(2+\delta)}}{A^{1+(1-\theta_1)\delta}},$$

где $\theta$ — любое число меньше 1.

Полагая $\theta = 1 - \theta_1$ и $2\gamma = 1 - \theta_1\delta$, видим, что так как $\delta < \frac{1}{2+\theta_1}$, то $2\delta + \delta\theta_1 < 1 = 2\gamma + 2\theta_1$, т. е. $\delta < \gamma$; следовательно

$$\frac{\beta_1^{(\gamma)} + \beta_2^{(\gamma)} + \ldots + \beta_n^{(\gamma)}}{A^{2\gamma}} < \frac{\beta_1^{(\delta)} + \ldots + \beta_n^{(\delta)}}{A^{1-\theta_1\delta}} < \frac{A_1^{(2+\delta)} + \ldots + A_n^{(2+\delta)}}{A^{1+\theta\delta}} \to 0,$$

откуда в силу доказанной теоремы получаем требуемое.

В частном случае при $\theta = \frac{1}{2}$ получим очевидно условия Ляпунова.

Заметим еще, что наша теорема показывает справедливость предельной теоремы, при условии если рассматривать только моменты второго порядка, от которых зависит формулировка самой теоремы, т. е. рассматривать которые необходимо.

Ленинград.
1929 г.

## Résumé

A. M. Liapounoff, membre de l'Académie, a établi certaines conditions dü théorème de limite de la théorie des probabilités, admettant l'existence de moments de l'ordre $2 + \delta$, quoique le théorème n'exige que le moment du second ordre.

Le présent mémoire a pour but d'établir les conditions du théorème énoncé, n'admettant que l'existence du moment du second ordre.

Ces conditions sont les suivantes en désignant:

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x d\varphi_n(x); \quad A_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a_n)^2 d\varphi_n(x); \quad A = \sum_{i=1}^{n} A_n$$

$$\beta_n^{(\gamma)} = \int_{A^{\gamma}}^{\infty} (x - a_n)^2 d\varphi_n(x) + \int_{-\infty}^{-A^{\gamma}} (x - a_n)^2 d\varphi_n(x).$$

Si la série

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$$

est divergente et s'il existe un nombre $\gamma < \frac{1}{2}$, tel que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i^{(\gamma)}}{A^{2\gamma}}$$

converge à zéro, lorsque $n \to \infty$, la probabilité

$$P\left(t_1 < \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n}{\sqrt{2(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)}} < t_2\right)$$

a pour limite

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt$$

Le théorème est démontré à l'aide de la méthode des moments.

Il est facile de voir, que les conditions de Liapounoff peuvent être déduites des conditions citées, comme un cas particulier.

Leningrade
1929.