*Записки Ленинградского горного института, т. VIII, 1934*
*Annales de l'Institut des Mines à Leningrade, vol. VIII, 1934*

# Об интеграле Кронекера

*Проф. А. Журавский*

## Ueber „das Kronecker'sche Integral"

*A. Jouravsky*

В своих глубоких исследованиях, посвященных функциям многих переменных, Kronecker [1]) показал, что вопрос об определении числа корней системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} f_1(x_1,\ x_2, \ldots x_n) &= 0 \\ f_2(x_1,\ x_2 \ldots x_n) &= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1,\ x_2, \ldots x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

удовлетворяющих условию

$$\varphi(x_1,\ x_2, \ldots x_n) \leq 0, \tag{2}$$

связан с определением величины интеграла

$$I = \int \cdots \int_{n-1} \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i(x_1 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n}{(f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2)^{\frac{n}{2}}}, \tag{3}$$

где

$$F_i(x_1 \ldots x_n) = \begin{vmatrix} f_1, & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_{i-1}}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i+1}}, \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n, & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_{i-1}}, & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i+1}}, \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

если $n$ есть четное число, или отличается от этого определителя множителем $(-1)^{i-1}$, если $n$ есть число нечетное [2]).

Интегрирование распространяется на совокупность значений $x_1,\ x_2, \ldots x_n$, удовлетворяющих уравнению

$$\varphi(x_1,\ x_2, \ldots x_n) = 0$$

Если через $\omega$ обозначить поверхность сферы радиуса единицы в пространстве $n$ измерений, то величина интеграла $I$ определяется равенством:

$$I = \omega(P - N), \tag{4}$$

[1]) Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1869, 1878.
[2]) Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1869.

где $P$ обозначает число корней системы, удовлетворяющих неравенству (2), для которых функциональный определитель $\Delta$ функций $f_1, f_2, \ldots f_n$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}, \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

положителен, а $N$ — число корней, удовлетворяющих тому же условию, для которых определитель $\Delta$ отрицателен.

Величина $\omega$ дается равенством

$$\omega = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$ [1])

Равенство (4) имеет силу лишь в предположении, что определитель $\Delta$ не обращается в нуль для корней системы (1), удовлетворяющих неравенству (2). Picard, стремясь выразить число корней системы (1), удовлетворяющих условию (2), через интеграл (3), показал прием, с помощью которого всегда оказывается возможным свести поставленную задачу к определению интеграла, аналогичного интегралу (3) [2]).

В исследовании Picard'a существенным является условие, что функциональный определитель $\Delta$ не обращается в нуль одновременно со всеми функциями

$$f_1(x_1, \ldots x_n), \quad \ldots \ldots \quad f_n(x_1, \ldots x_n),$$

Этот последний случай представляет по замечанию Kronecker'a особые трудности. Однако весьма интересно и для этого случая выяснить связь интеграла (3) с корнями системы (4).

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением наиболее простого и наиболее важного в приложениях случая $n = 2$.

В этом простейшем случае напишем систему (1) в виде:

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0. \tag{5}$$

Интеграл (3) может быть переписан в виде

$$I = \int_C \frac{P\,dQ - Q\,dP}{P^2 + Q^2}, \tag{6}$$

где $C$ есть кривая, определяемая уравнением

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Функции $P$ и $Q$ будем предполагать однозначными и непрерывными вместе с их частными производными внутри односвязной области $T$.

Кривая $C$ лежит внутри области $T$.

Предположим еще, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ обращаются одновременно в нуль только для конечного числа значений $(x, y)$ внутри области $T$. То же самое предположение сделаем и относительно одновременного обращения в нуль функции $P, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}; Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}$.

---

[1]) Kronecker. Vorlesungen über Theorie der einfachen und vielfachen Integrale. S. 266.

[2]) Picard. Journal des mathematiques pures et appliquées; Picard, Traite d'analyse, t. I, p. 83. T. II, ch. VII.

Пользуясь геометрическими представлениями, поставленный вопрос можно высказать в такой форме: какова связь интеграла $J$ с числом точек пересечения кривых $P$ и $Q$, лежащих внутри контура $C$. (Мы предполагаем, что неравенству $\varphi(x, y) < 0$ отвечают точки $T$, лежащие внутри контура $C$). Окружим каждую из этих точек кривой $C_s$ ($s = 1, 2, \ldots, k$) столь малых размеров, чтобы внутри ее лежала бы только одна точка пересечения кривых $P$, $Q$. В силу предположений, сделанных относительно функций, имеем равенство:

$$\int_C \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2} = \sum_{s=1}^{n} \int_{C_s} \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2}. \tag{7}$$

Поставленная задача сводится к изучению интеграла

$$I_s = \int_{C_s} \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2}, \tag{8}$$

причем внутри контура $C_s$ лежит только одна точка пересечения кривых.

Предположим еще, что контур $C_s$ столь мал, что внутри его нет особенных точек кривых $P$ и $Q$, если точка пересечения кривых есть обыкновенная точка обоих. Если же точка пересечения есть особенная точка хотя бы для одной из кривых, то надлежащим уменьшением контура $C_s$ возможно всегда достичь того, чтобы других, особенных точек кривых $P$ и $Q$ внутри контура $C_s$ не было. Возьмем преобразование

$$X = P(x, y), \quad Y = Q(x, y). \tag{9}$$

Области, близкой к точке пересечения $P$ и $Q$, будет отвечать область значений $X$, $Y$, близких к нулю. Кривой $C_s$ будет отвечать кривая $\Gamma_s$, находящаяся вблизи $x = 0$, $y = 0$.

Кривая $\Gamma_s$ замкнутая.

Интеграл (8) примет вид

$$I_s = \int_{\Gamma_s} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} \tag{10}$$

Известно, что

$$\int_{\Gamma_s} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} = 2\pi m, \tag{11}$$

где $m$ есть целое положительное, отрицательное число или нуль.

Число $m$ зависит от того, как и сколько раз кривая $\Gamma_s$ обходит точку (0,0).

Это последнее обстоятельство тесно связано с характером точки пересечения кривых $P$ и $Q$.

Изучим эту связь внимательнее.

Отметим очевидное предложение.

Если точка $(x_0, y_0)$ кривой $C$, определяемой уравнением

$$f(x, y) = 0,$$

есть точка обыкновенная, то по одну сторону кривой функция $f(x, y)$ больше нуля, по другую меньше нуля в смежности с точкой $(x_0, y_0)$. Функция $f(x, y)$ предполагается однозначной, непрерывной, диференцируемой функцией $x$, $y$. Это предположение дает возможность сделать заключение, что коль скоро функция $f(x, y)$ есть однозначная, непрерывная функция вместе со своими частными производными

в смежности с точкой $(x_0, y_0)$ и точка $(x_0, y_0)$ есть особенная точка кривой $f(x, y) = 0$, то число ветвей кривой $f(x, y) = 0$, проходящих через точку $(x_0, y_0)$, есть число четное или эта точка есть изолированная.

В самом деле, опишем кривую, окружающую точку $(x_0, y_0)$, столь малого радиуса, чтобы эта кривая пересекла все ветви кривой $f(x, y) = 0$, выходящие из точки $(x_0, y_0)$. Так как при переходе каждой ветви функция меняет знак, а при обходе по кривой мы возвращаемся к начальному значению функции, то число пересекаемых ветвей кривой $C$ есть число четное.

В случае, когда функция $f(x, y)$ сохраняет знак в смежности с точкой $(x_0, y_0)$, эта точка есть изолированная.

После этого замечания вернемся к нашей задаче.

Рассмотрим общий случай, предполагая, что точка пересечения есть особенная точка как кривой $P$, так и кривой $Q$.

Ветви кривой $Q$ располагаются как-то между ветвями кривой $P$. Пусть между двумя ветвями $P$ лежит четное число ветвей $Q$. Пусть кривая $C_s$ столь мала, что она пересекает все ветви кривых $P$ и $Q$.

При переходе по кривой $C_s$ от одной ветви $P$ до другой функция $P(x, y)$ будет сохранять свой знак, а функция $Q(x, y)$ переменит его четное число раз и вернется к тому же знаку, что и в начале пути. Часть кривой $\Gamma_s$, соответствующая рассматриваемой части кривой $C$, пересечет четное число раз ось $y$-ов, оставаясь по одну сторону оси $x$-ов.

Заменим кривую $\Gamma_s$ кривой $\Gamma_s'$, которая отличается от кривой $\Gamma_s$ лишь тем, что на рассматриваемом участке пути она не пересекает оси $y$-ов, а в дальнейшем располагается относительно осей $x$-ов и $y$-ов так же, как и кривая $\Gamma_s$.

Положим теперь, что между двумя ветвями $P$ расположено нечетное число ветвей $Q$. При переходе от одной ветви $P$ до другой функция $P(x, y)$ сохраняет знак, а функция $Q(x, y)$ меняет его нечетное число раз.

На участке кривой $\Gamma_s$, соответствующей рассматриваемому участку $C_s$, расположено нечетное число точек пересечения кривой с осью $y$-ов. Заменим в этом случае кривую $\Gamma_s$ кривой $\Gamma_s'$, которая на рассматриваемом участке пересекает ось $y$-ов один раз, а в дальнейшем располагается относительно осей так же, как и кривая $\Gamma_s$. И в том и в другом случае имеем:

$$\int_{\Gamma_s} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} = \int_{\Gamma'_s} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}. \tag{12}$$

Число точек пересечения кривой $\Gamma'_s$ с осями $x$-ов и $y$-ов равно числу точек пересечения кривой $\Gamma_s$ с теми же осями или меньше на число четное.

Равенство имеет место лишь в том случае, когда между двумя ветвями $P$ заключается не больше одной ветви $Q$.

Рассматривая в этом последнем случае участки кривой $\Gamma_s$, соответствующие участкам кривой $C_s$, расположенным между двумя последовательными точками пересечения $C_s$ с ветвями $Q$, и повторяя только что приведенные рассуждения, либо заменим кривую $\Gamma_s$ другой, у которой число точек пересечения с осями меньше, либо придем к заключению, что ветви $P$ перемежаются с ветвями $Q$.

Таким образом мы вправе высказать предположение. Если ветви кривых $P$ и $Q$ не перемежаются, то кривая $\Gamma_s$ всегда может быть заменена кривой $\Gamma_s'$, пересекающей оси $x$ и $y$ в меньшем числе точек, нежели кривая $\Gamma_s$. Величина интеграла $I_s$ при этом не меняется. Применяя к новой кривой то же предположение, можно перейти от нее к новой кривой $\Gamma_s''$ с еще меньшим числом точек пересечения на ней и т. д. Число точек пересечения кривой $\Gamma_s$ с осями конечное.

Поэтому, производя указанные замены кривых, мы либо придем к кривой $\Gamma_s^{(h)}$ на которой точки пересечения с осями $x$-ов и $y$-ов последовательно перемежаются, либо к такой, которая не пересекает осей.

В первом случае число точек пересечения очевидно делится на четыре. Обозначим его через $4m_s$.

Число $m_s$ будем считать положительным в случае, когда при движении по кривой $C_s$ в направлении, противном движению часовой стрелки вокруг точки $(x_0, y_0)$, мы переходим по кривой $\Gamma_s$ в том же направлении вокруг точки $(o,o)$ и отрицательным в противном случае.

В случае, когда кривая $\Gamma_s^{(h)}$ не обходит точки $(o,o)$, будем считать $m_s = 0$.

При этих условиях имеем очевидно

$$I_s = 2\pi m_s. \tag{13}$$

Покажем теперь, как можно определить число $m_s$, зная взаимное расположение ветвей кривых $P$ и $Q$. Обозначим через $P_1, P_2, \ldots P_n$ ветви кривой $P(x, y) = 0$, через $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ ветви кривой $Q(x, y) = 0$. Точки пересечения кривой $C_s$ с ветвями кривой $P_i$ обозначим через $p_i$, а точки пересечения $C_s$ с $Q_i$ обозначим через $q_i$.

Точке $p_i$ отвечает некоторая точка $y_i$ оси $y$-ов, точка $q_k$ — некоторая точка $x_k$ оси $x$-ов. Все точки $y_i$ и $x_k$ лежат на кривой $\Gamma_s$ ($i = 1, \ldots 2m$, $k = 1, \ldots 2n$).

Обозначим через $y_i^{(\alpha)}$, $x_k^{(\alpha)}$ точки пересечения кривой $\Gamma_s^{(\alpha)}$ с координатными осями ($\alpha \leqq h$). Напишем точки $y_1, y_2, \ldots y_{2m}, x_1, x_2 \ldots x_{2n}$ в том порядке, в котором они расположены на кривой.

Если между двумя точками $y_\sigma$, $y_{\sigma+1}$ лежит четное число точек $x_k$ ($k = 1, \ldots 2n$), то мы эти точки вычеркнем, если же нечетное, то оставим одну, и таким образом поступим относительно всех пар точек $(y_1, y_2), \ldots (y_{2m-1}, y_{2m}), (y_{2m}, y_1)$. Оставшаяся система точек $x_1', x_2', \ldots x'_{2n'}, y_1', y_2', \ldots y_{2m'}$ (точка $y_i'$ совпадает с $y_i$) дает точки пересечения кривой $\Gamma_s'$ с осями.

Относительно системы точек $x_1', \ldots x'_{2n'}, y_1' \ldots y_{2m'}$ поступим аналогичным путем.

Если между точками $x_\sigma'$, $x'_{\sigma+1}$ лежит четное число точек $y_k'$, то все эти точки вычеркиваем, если же нечетное, оставляем одну.

Этим путем переходим к новой системе точек $x_1'', \ldots x''_{2n''}$; $y_1'' \ldots y''_{2m''}$ (точка $x_i''$ совпадает с $x_i'$ при $i = 1, 2 \ldots n'$, $n' = n''$), соответствующей точкам пересечения $\Gamma_s''$ с осями.

Продолжая этого рода операцию далее, либо вычеркиваем все точки либо придем к ряду, в котором точки $x_i$ перемежаются точками $y_k$.

Этот последний ряд даст точки пересечения кривой $\Gamma_s^{(h)}$ с осями, и четвертая часть числа точек в последнем ряду есть число $m_s$. Система точек $p_1, \ldots p_{2m}, q_1, \ldots q_{2n}$, расположенная в том порядке, в котором они лежат на кривой $C_s$, получается из соответствующей системы $x_1 \ldots x_{2m}, y_1, \ldots y_{2n}$, расположенной в том порядке, в котором эти точки лежат на кривой $\Gamma_s$, простой заменой букв $y, x$ буквами $p$ и $q$.

Наконец система ветвей кривых $P$ и $Q$, расположенная так, как они последовательно встречаются с кривой, получится из системы точек $p_1, \ldots p_{2m}, q_1, \ldots q_{2n}$, расположенных в том порядке, как они лежат на кривой $P_s$, заменой букв $p$ и $q$ на буквы $P$ и $Q$.

Все, что сказано о вычеркивании точек $x_i$ и $y_k$, без всякого изменения может быть применено к точкам $p_i$, $q_i$ или ветвям $P_i$ и $Q_i$, и мы приходим к правилу.

Теорема. Для получения целого числа, дающего величину интеграла

$$I_s = \int_{C_s} \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2} = 2\pi m_s, \tag{14}$$

надлежит поступить следующим образом: определив расположение ветвей кривых $P$ и $Q$, вычеркиваем все ветви кривой $Q$, расположенные между каждыми двумя последовательными ветвями $P$, если число таких ветвей $Q$ четное, и оставляем одну, если это число есть число нечетное.

Исходя от оставшихся ветвей, вычеркиваем все ветви кривой $P$, расположенные между каждыми двумя последовательными из оставшихся ветвей $Q$, если число та-

ких ветвей $P$ четное, и оставляем одну из них, если это число есть число нечетное.

Эту операцию продолжаем до тех пор, пока либо не вычеркнем все ветви, либо придем к такому расположению ветвей, когда ветви $P$ перемежаются с ветвями $Q$. Четвертая часть числа ветвей дает численную величину числа $m_s$.

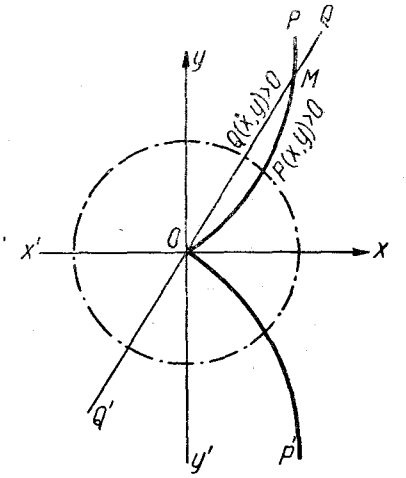


Рис. 1.

Знак $m_s$ определяется следующим образом. Возьмем оставшиеся ветви. Если при движении против часовой стрелки вокруг точки пересечения кривых $P$ и $Q$ мы будем встречать за ветвью $P$, для точек которой $Q(x, y)$ положительно, ветвь $Q$, для точек которой $P(x, y)$ отрицательно, то $m_s$ — число положительное, в противном случае $m_s$ — отрицательное число. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Положим, что

$$P(x, y) = y^2 - x^3 = 0 \qquad (15)$$
$$Q(x, y) = y - \alpha x = 0$$

и за уравнение кривой $C$ примем

$$\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$
$$r < \alpha^2\sqrt{1+\alpha^2} \text{ при } \alpha \neq 0.$$

Применяя указанное правило, находим, что

$$I = \int_C \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq 0 \\ -2\pi, & \alpha = 0. \end{cases} \qquad (16)$$

В самом деле, кривые $P$ и $Q$ располагаются, как показано на чертеже. При $\alpha \neq 0$ обе ветви $P$ и $P'$ лежат по одну сторону прямой $QQ'$ и интеграл равен нулю (рис. 1).

При $\alpha = 0$ прямая $Q$ обращается в ось X-ов. Ветви $P$ и $P'$ перемежаются с осями $OX$ и $OX'$. Число ветвей $P$ и $Q$ равно четырем.

На ветви $P$ функция $Q(x, y) > 0$.

На полуоси $OX'$ функция $P(x, y) > 0$.

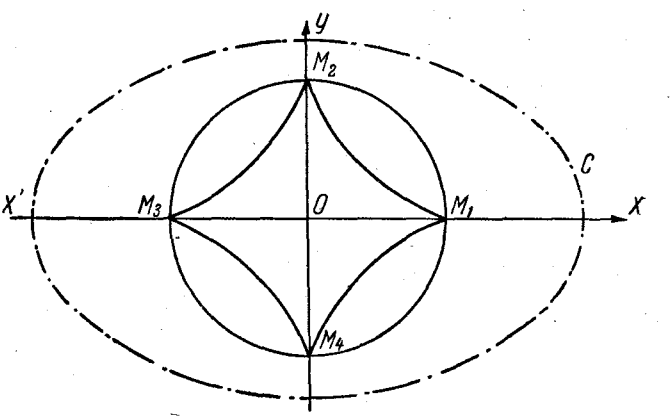


Рис. 2.

Интеграл $I_c = -2\pi$.

Не трудно также, прилагая указанный прием, убедиться, что

$$I = \int_{C'} \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2} = \begin{cases} 0, & \alpha^4 + \alpha^6 > 1 \\ -2\pi, & \alpha^4 + \alpha^6 < 1, \end{cases}$$

где $C'$ — есть окружность радиуса единицы.

Пример 2. Положим, что

$$P(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$
$$Q(x, y) = x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} - 1 = 0. \qquad (17)$$

За кривую $C$ примем, чтобы остановиться на чем-либо определенном, эллипс

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1; \quad a > b > 1.$$

Общие корни системы (17), лежащие внутри эллипса $C$, соответствуют точкам $M_1(1,0)$, $M_2(0,1)$, $M_3(-1,0)$, $M_4(0,-1)$.
Интеграл

$$I = \int_C \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2},$$

взятый по эллипсу, сведется на интегралы, распространенные по кривым, окружающим точки $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$, которые в силу основного предложения суть нули.

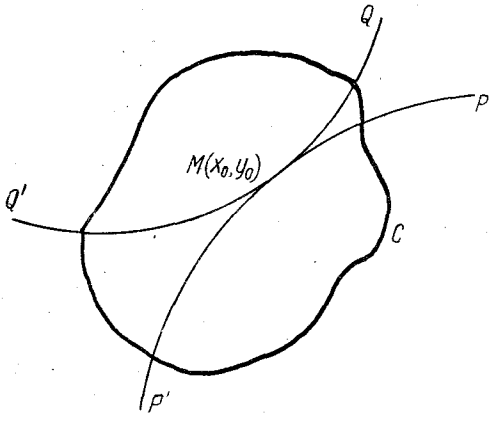



Рис. 3.

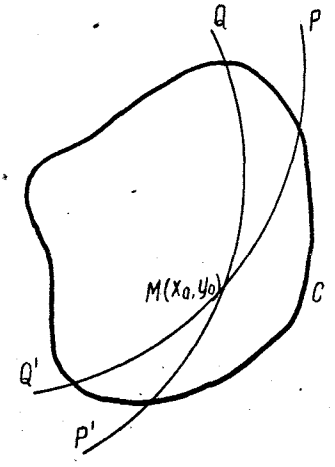



Рис. 4.

$$I = \int_C \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2} = 0.$$

Приведенные примеры показывают с какой легкостью данное правило позволяет находить величину интеграла (рис. 2).

С другой стороны, как приведенные примеры, так и общее рассуждение обнаруживают, что величина интеграла $I$ не дает никакого представления о числе корней системы, расположенных внутри данного контура $C$.

Особенно выпукло выступает несовершенство и непригодность интеграла в применении к рещению задачи Sturm'a на следующих двух простых примерах.

Пример 3. Положим, что уравнения

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0$$

имеют решение $(x_0, y_0)$. Пусть точка $M(x_0, y_0)$ есть обыкновенная точка обеих кривых $P$ и $Q$, и пускай в этой точке кривые соприкасаются.

В этом случае решение системы должно быть кратным.

Между тем интеграл

$$I = \int_\sigma \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2},$$

взятый по кривой $C$, окружающей точку $M(x_0, y_0)$, либо равен нулю в случае соприкосновения нечетного порядка, когда кривая $P$ лежит по одну сторону кривой (рис. 3), либо равен $2\pi$ в случае соприкосновения четного порядка, когда одна кривая пересекает другую.

В последнем случае интеграл не дает никаких указаний относительно кратности решения и все представляется так же, как если бы решение системы не было кратным и кривые $P$ и $Q$ пересекались в точке $M(x_0, y_0)$ (рис. 4).

Критерии кратности решения системы уравнений, которыми обладает алгебра, представляются сложными. Естественно искать более простых приемов.

Наше исследование показывает, что этого едва ли можно достичь путем применения Kronecker'овского интеграла без глубокого изменения его структуры.

## Zusammenfassung

In seinen berühmten Abhandlungen, welche den algebraischen Funktionen von mehreren Veränderlichen gewidmet sind, setzt Kronecker die Frage über die Anzahl der Wurzeln eines algebraischen Systems

$$f_i(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{1}$$

welche in einem gegebenen $n$-dimensionalen Gebiet $I$ liegen, in engem Zusammenhang mit der Wertbestimmung des Integrals

$$I = \underbrace{\int \cdots \int}_{n-1} \frac{\sum_{i=1}^{j} F_i(x_1, \ldots x_n)\, dx_1, \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n}{(f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2)^{\frac{n}{2}}} \,. \tag{2}$$

Für gerade $n$

$$F_i(x_1 \ldots x_n) = \begin{vmatrix} f_1, \frac{df_1}{dx_1}, \cdots \frac{df_1}{dx_{i-1}}, \frac{df_1}{dx_{i+1}} \cdots \frac{df_1}{dx_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n, \frac{df_n}{dx_1}, \cdots \frac{df_n}{dx_{i-1}}, \frac{df_n}{dx_{i+1}}, \cdots \frac{df_n}{dx_n} \end{vmatrix} \tag{3}$$

und unterscheidet sich von dieser Determinante für ungerade $n$ durch den Faktor $(-1)^{i-1}$

Die Integration erstreckt sich über die Grenzfläche

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \tag{4}$$

des Gebietes $T$.

Dieser Zusammenhang ist durch die Gleichung

$$I = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (P - N) \tag{5}$$

ausgedrückt.

$P$ ist die Anzahl der Wurzeln des Systems (1), welche im Inneren des Gebietes $T$ liegen und für welche die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1}, \frac{df_1}{dx_2}, \cdots \frac{df_1}{dx_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{df_n}{dx_1}, \frac{df_n}{dx_2}, \cdots \frac{df_n}{dx_n} \end{vmatrix}$$

eine positive ist, $N$ — die Anzahl derselben, für welche $\Delta$ eine negative ist. Kein Wurzelsystem befindet sich auf der Grenzfläche (4).

Die Gleichung (4) ist unter der Bedingung gültig, dass $\Delta$ für die Wurzeln des Systems (1) im Inneren des Gebietes T niemals den Wert 0 annimmt.

Die Gleichung (5) löst die Sturm'sche Aufgabe, m. a, W. gibt die Anzahl der Wurzeln des Systems (1), welche im Inneren des Gebietes $T$ liegen nur in dem Fall, wenn $\Delta$ sein Zeugnis in $T$ behält. Wechselt $\Delta$ sein Zeugnis in $T$ ein, so kann das Integral (2) nicht zur Lösung der Sturm'schen Aufgabe dienen.

Picard hat später ein Verfahren gegeben, wodurch die Lösung der Sturm' schen Aufgabe auf die Wertbestimmung eines mit dem (2) ähnlichen Integral zurückgeführt ist.

In den Picard'schen Untersuchungen, wie in denen von Kronecker, hat die Bedingung des Nichtverschwindens der Determinante $\Delta$ für Wertsysteme der Wurzeln der Gleichungen (1) eine wichtige Bedeutung.

Um tiefer in die Frage einzudringen ist notwendig die echte Rolle der gestellten Bedingung an klares Licht zu bringen.

Die erste Aufgabe, welcher wir auf diesem Wege begegnen, ist die Frage der Wertbestimmung des Integrals (2) im Falle, wenn $\Delta$ für das Wurzelsystem der Gleichungen (1) den Wert 0 annimmt. Mit dieser Aufgabe beschäftigt sich die vorliegende Arbeit.

Der Einfachheit halber sind alle Untersuchungen nur für $n = 2$ ausgeführt.

Die beiden Gleichungen des Systems

$$P(x, y) = 0, \qquad Q(x, y) = 0$$

stellen sich durch die ebenen Kurven dar, welche sich in verschiedenen Punkten im Innern des gegebenen, zweidimensionalen Gebietes $T$ treffen mögen. Diese Punkte nennen wir Wurzelpunkte des Systems. Es ist leicht sich zu überzeugen, dass der allgemeine Fall zu einem speziellen zurückgeführt werden kann, wenn im Inneren des Gebietes $T$ nur ein Wurzelpunkt liegt und in diesem Punkt $\Delta = 0$.

Im letzten Fall bekommen wir folgende Regel zur Wertbestimmung des Integrals (2).

Wenn der Wurzelpunkt des Systems kein singulärer für beide Kurven ist, dann nimmt das Integral (2) den Wert $2\pi$ oder 0 an, je nachdem die eine Kurve die andere im Punkte ihres Zusammentreffens kreuzt oder nicht (Fig. 3 und 4).

Wenn der Wurzelpunkt ein singulärer für die eine oder für beide Kurven ist, dann ist die Regel viel komplizierter.

Man muss die gegenseitige Lage der verschiedenen Zweigen der beiden Kurven in der Umgebung des Wurzelpunktes bestimmen.

Wenn zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zweigen einer Kurve eine gerade Anzahl der Zweige einer anderen Kurve liegt, dann streichen wir alle diese Zweige aus.

Wenn zwischen zwei aufeinander folgenden Zweigen einer Kurve eine ungerade Anzahl der anderen liegt, nehmen wir nur einen einzigen in Betracht und streichen alle übrigen aus.

Nachdem wir dies für zwei aufeinanderfolgende Zweige der ersten Kurve gemacht haben, wenden wir dasselbe Verfahren auf die gebliebenen Zweige der zweiten Kurve an und setzen in dieser Weise fort.

Zum Schluss wird entweder kein Zweig der beiden Kurven bleiben oder zwischen jeden der zwei aufeinanderfolgenden Zweigen der einen Kurve ein Zweig der anderen liegen.

Die Anzahl der gebliebenen Zweige sei $n$.

Im ersten Fall ist das Integral gleich 0. Im zweiten ist der Integralswert $2\pi n$ gleich.

Dieses Resultat zeigt, dass die gestellte Forderung des Nichtverschwindens der Determinante für das Wurzelsystem der Gleichungen (1) eine wesentliche ist und dass ohne eine gründliche Änderung ihrer Gestalt das Kronecker'sche Integral keinen Dienst zur Lösung der Sturm'schen Aufgabe leisten kann.