Записки Ленинградского Горного института, т. VIII, 1934
Annales de l'Institut des Mines à Leningrade, vol. VIII, 1934

К вопросу о разложении данной функции в ряд по полиномам Якоби

Проф. М. И. Акимов

Sur le développement d'une fonction donnée en série procédant suivant les polynomes de Jacobi

M. J. Akimoff

В силу свойства замкнутости [1]) полиномов Якоби $V_k(x)$ имеем разложение данной функции $f(x)$ в ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k V_k(x), \quad A_k = \int_{-1}^{+1} p(x) f(x)\, V_k(x)\, dx, \tag{1}$$

$$p(x) = (1+x)^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \alpha > 0, \beta > 0,$$

при условии, что ряд этот равномерно сходящийся.

Допуская существование первой производной функции $f(x)$, конечной и интегрируемой в промежутке $(-1, +1)$, акад. Н. М. Крылов в работах [2]), относящихся к рассматриваемому вопросу, указал интересный способ доказательства равномерной сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k V_k(x) \tag{2}$$

внутри рассматриваемого промежутка, основанный на отождествлении этого ряда с другим, абсолютная и равномерная сходимость которого известны заранее.

Рассуждение акад. Н. М. Крылова опирается на теорему Riesz-Fischer'a,[3]) утверждающую существование функции (интегрируемой как сама она, так и квадрат ее), заданной коэфициентами своего разложения в ряд Фурье, при условии, что ряд квадратов этих коэфициентов сходящийся. Представляются не лишенными интереса следующие простые замечания, которые и составляют предмет настоящей заметки, позволяющие провести все рассуждение без применения теоремы Riesz-Fischer'a.

Из диференциального уравнения функций $V_k(x)$

$$p(x) V_k(x) = -\frac{1}{\lambda_k} \frac{d[p_1(x) V'_k(x)]}{dx}, \tag{3}$$

$$\lambda_k = k(k+\alpha+\beta-1), \; p_1(x) = (1+x)^{\alpha}(1-x)^{\beta},$$

[1]) В. А. Стеклов. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 125 (1903), S. 214. — Записки Петербургской Академии наук, т. XV, № 7 (1904), стр. 20.

[2]) Н. М. Крылов. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris, t. 150 (1910), p. 316. — Известия Киевского университета (1910), № 10. — О разложениях в ряды по фундаментальным функциям... и о разложениях по полиномам Якоби. Диссертация, Киев (1911), стр. 94—103. См. также Encyclopédie des Sciences mathématiques (édition française), t. 2, vol. 5, fasc. 2 (1914), p. 234.

[3]) Comptes rendus, t. 144 (1907), p. 615 et 1022.

следует, что для доказательства равномерной сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k V_k(x)$$

достаточно установить равномерную сходимость каждого ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} A_k V_k'(x), \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} A_k \frac{d V_k'(x)}{dx}. \tag{5}$$

В равномерной сходимости ряда (4) убеждаемся сразу, если в заведомо равномерно относительно z в промежутке $(-1, +1)$ и абсолютно сходящемся ряде [1])

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k B_k,$$

$$B_k = \int_{-1}^{+1} p(x)\varphi(x,z) V_k(x)\,dx, \quad \int_{-1}^{+1} p(x)[\varphi(x,z)]^2\,dx < Q^2, \ (Q \text{ конечно}),$$

положим $\varphi(x,z) = 1$ при $-1 < x \leqslant z$, $\varphi(x,z) = 0$ при $x > z$ и преобразуем интеграл

$$\int_{-1}^{z} p(x) V_k(x)\,dx,$$

пользуясь равенством (3).

Что же касается ряда (5), то, пользуясь тем же равенством (3) и интегрируя по частям, выводим

$$A_k = \int_{-1}^{+1} f(x) p(x) V_k(x)\,dx = -\frac{1}{\lambda_k} \int_{-1}^{+1} f(x) \frac{d[p_1(x) V_k'(x)]}{dx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k} \int_{-1}^{+1} p_1(x) f'(x) V_k'(x)\,dx$$

и в силу свойства функции $V_k(x)$

$$V_k'(x) = \sqrt{\lambda_k}\, V_{k-1}^{(1)}(x),$$

где $V_{k-1}^{(1)}$ получается из V_{k-1} путем замены α и β соответственно на $\alpha+1$ и $\beta+1$, преобразуем ряд (5) в следующий

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} A_{k-1}^{(1)} \frac{d V_{k-1}^{(1)}(x)}{dx},$$

$$A_{k-1}^{(1)} = \int_{-1}^{+1} p_1(x) f'(x) V_{k-1}^{(1)}(x)\,dx.$$

Этот последний ряд есть ряд равномерно сходящийся, как и ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{k-1}^{(1)}} A_{k-1}^{(1)} \frac{d V_{k-1}^{(1)}(x)}{dx}, \quad \lambda_{k-1}^{(1)} = (k-1)(k+\alpha+\beta),$$

подобный (4).

---

[1]) E. Schmidt, Mathematische Annalen, Bd. 63 (1907). S. 440.

Равномерная сходимость ряда (2), а вместе с тем и законность разложения (1), при рассматриваемом условии для $f(x)$, таким образом, установлены.

Мы воспользуемся изложенными замечаниями в последующем, при исследовании разложений функций по полиномам Якоби в случае многих переменных. [1])

Résumé.

Cette note a pour but la simplification d'une méthode proposée par l'académicien N. M. Kryloff pour le développement d'une fonction donnée en série procédant suivant les polynomes de Jacobi.

En formant à priori un développement de convergence uniforme et absolue, on montre, sans s'appuyer sur le théorème de Riesz-Fischer, qu'il peut s'identifier à des développements procédant suivant les polynomes de Jacobi.

---

[1]) См. P. Appell. Archiv der Mathematik und Physik, Bd. 66 (1881), S. 238.