Записки Ленинградского горного института т. VIII, 1934
Annales de l'Institut des Mines à Leningrade, vol. VIII, 1934

Линия положения и погрешность положения точки

Проф. Н. Г. Келль

Lagelinien und Fehler der Punktlage

N. G. Kell

Общая теория линий положения и градиентов дает большую наглядность и простоту в вопросах графического уравнивания и определения погрешностей положения точки. Идея применения линий положения выдвинута В. В. Каврайским.

В геодезии при определении положения искомых точек на плоскости мы измеряем непосредственно горизонтальные углы и расстояния, которые можем рассматривать как функцию двух переменных (координат).

Данному измеренному значению функции отвечает некоторое геометрическое место точек на плоскости — некоторая линия, которую назовем линией положения.

Эту линию положения на небольшом протяжении вблизи определяемой точки можно заменить коротким отрезком прямой касательной к линии положения в одной из ее точек. Если измеренную величину u изменить на небольшую величину Δu, то получится другая линия положения (отрезок прямой), близко лежащая к первой и в пределах точности графического построения параллельная ей. Обозначим расстояние (по нормали) между линиями положения одной и той же функции через n и приращение этого расстояния при изменении функции на Δu через Δn, иначе Δn — это поступательное перемещение линии положения при изменении значения функции на Δu. Предел отношения

$$\frac{\Delta u}{\Delta n} = \frac{du}{dn} = g \qquad (1)$$

называется градиентом, который очевидно выражает одно из важнейших свойств данной функции или представляющего ее семейства линий положения вблизи определяемой точки.

Градиент, как векторная величина, изображается вектором с направлением по нормали к линии положения в сторону возрастания функции. Для того чтобы не вычерчивать отдельно этот вектор, условимся его всегда брать повернутым на 90° по движению часовой стрелки, тогда он будет совпадать с линией положения, и стрелка в конце его покажет его длину и направление, повернутое определенным образом.

Под градиентом можно подразумевать изменение функции, отвечающее поступательному перемещению линии положения на единицу длины.

Зная градиент, его направление и величину, всегда можно построить линию положения, отвечающую определенному измеренному значению функции, если дано приближенное положение искомой точки и отвечающее этому положению приближенное значение измеряемой функции. Построение будет следующее:

Из приближенного (предварительного) положения искомой точки $P_п$ (рис. 1) проводим по известному направлению градиент g (повернутый на 90°) — $P_пA$, — это будет направление линий положения. Затем по перпендикуляру $P_пK$ откладываем согласно знаку нормаль n, вычисленную по формуле:

$$n = \frac{u - u_п}{g} = \frac{\Delta u}{g} \qquad (2)$$

где

u — измеренное значение функции,

$u_п$ — приближенное ее значение, отвечающее приближенному положению искомой точки $P_п$.

Положительное направление нормали совпадает с направлением $P_пA$, повернутым обратно против движения часовой стрелки, т. е. с направлением $P_пK$ на рис. 1

$$P_пK = n$$

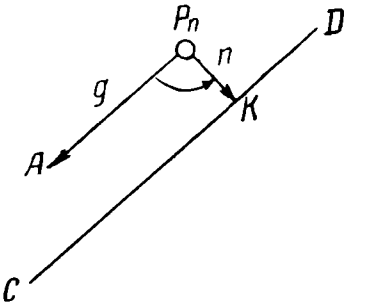


Рис. 1.

Через точку K параллельно $AP_п$ проводим прямую CD, которая и будет искомой линией положения. Это построение является общим для всех случаев построения фигур погрешности.

Проектируя градиент на некоторую ось и применяя формулу диференцирования суммы и разности, легко можно доказать важную для нас теорему, которая гласит:

Градиент алгебраической суммы двух функций равен геометрической сумме градиентов слагаемых функций.

$$\vec{g} = \vec{g}_2 \pm \vec{g}_1, \qquad (3)$$

где

$$g_1 = \frac{du_1}{dn_1} \text{ — градиент } u_1$$

$$g_2 = \frac{du_2}{dn_2} \text{ — } u_2$$

$$g = \frac{d(u_2 \pm u_1)}{dn} \qquad u_2 \pm u_1.$$

Рассмотрим значение градиентов в различных случаях геодезических измерений

1) u — измеряемое непосредственно расстояние, случай линейной засечки.

Очевидно,

$$g = 1, \qquad (4)$$

так как

$$du = dn.$$

Линия положения — касательная к окружности, описанной из данной точки радиусом $= u$.

2) u — измеряемое направление прямой засечки.

$$g = \text{пределу } \frac{\Delta u}{s \operatorname{tg} u} = \frac{1}{s} \qquad (5)$$

где s — расстояние от искомой точки до данной.

Градиент направлен от искомой точки к данной точке стояния инструмента (если применить вышеуказанное условие).

Линия положения представляет собою отрезок самой засечки.

3) u — измеряемое направление боковой засечки.

$$g \text{ также} = \frac{1}{s}, \tag{6}$$

направлен от искомой точки стояния инструмента к данной точке. Линия положения — сама засечка.

4) u — угол обратной засечки, рассматриваемый как разность двух измеряемых направлений $u_2 - u_1$.

Согласно вышеприведенной теореме:

$$\vec{g} = \frac{\vec{1}}{s_2} - \frac{\vec{1}}{s_1} \tag{7}$$

Линия положения — дуга круга, вмещающая угол u и проходящая через две данные точки.

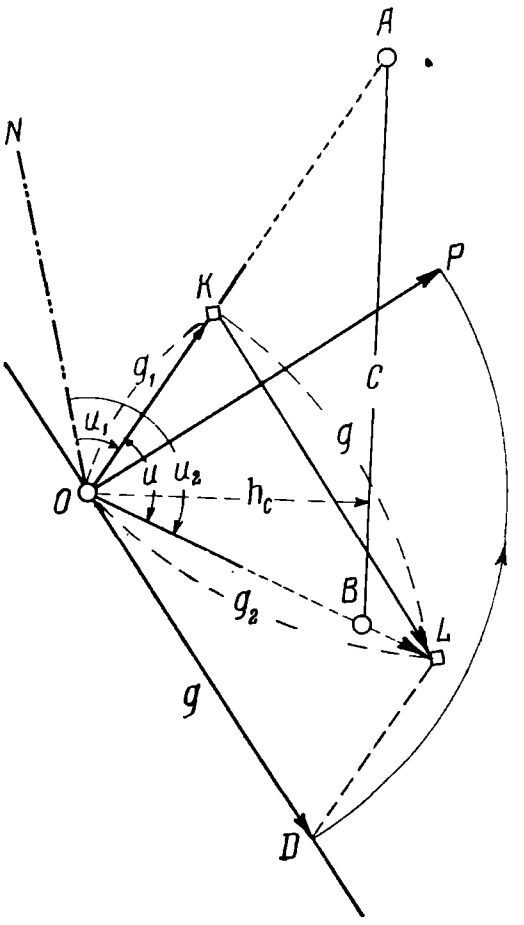


Рис. 2

На рис. 2 осуществлено построение, указанное равенством (7).

O — приближенное положение искомой точки,

A и B — данные точки,

$OA = s_1$, $OB = s_2$, $AB = c$,

OK — градиент направления u_1, равный $\frac{1}{s_1}$,

OL — градиент направления u_2, равный $\frac{1}{s_2}$;

KL — геометрическая разность OL и OK,

OL — является замыкающей треугольника OKL,

KL — параллельно перенесено в OD, которая и является линией положения функции u.

Градиентом угла u будет отрезок $OD = g$.

Действительным направлением градиента g является OP (OD повернуто против движения часовой стрелки на 90°).

При увеличении угла u линия положения OD переместится по направлению OP.

g легко выразить и аналитически.

Из подобия треугольников OAB и OKL, имеющих общий угол и две пропорциональных стороны ($OL : OK = OA : OB = s_1 : s_2$), вытекает, что:

$$\frac{g}{c} = \frac{OL}{OA} = \frac{OK}{OB} = \frac{1}{s_1 s_2}, \text{ или } g = \frac{c}{s_1 s_2}. \tag{8}$$

Если из O опустить перпендикуляр на AB и обозначить его длину через h_c, то $s_1 s_2$ можно заменить через $\frac{ch_c}{\sin u}$ и g выразить иначе, а именно:

$$g = \frac{\sin u}{h_c} \tag{9}$$

Эти выражения весьма упрощают некоторые выводы, даваемые в геодезии. Например погрешность в угле полигона от погрешности центрировки теодолита легко может быть получена из предыдущих определений.

Пусть u на черт. 2 измеряемый угол полигона, тогда

$$\Delta u = \Delta n g = eg,$$

где e — поступательное перемещение линии положения (по радиусу описанной дуги круга).

На основании равенства (8) мы имеем:

$$\Delta u = \frac{ec}{s_1 s_2} \tag{10}$$

или в градусной мере $= \rho \frac{ec}{s_1 s_2}$

Обычная формула, даваемая в учебниках геодезии, но выводимая иначе (см. Иордан, т. II, изд. 1914, стр. 406 и 459 — 460).

Если с введением координат в геодезии мы от графического получения необходимых данных на плане перешли к более точным аналитическим решениям, не зависящим от масштаба плана, то при уравнивании избыточных измерений, где мы имеем дело с величинами второго порядка, нередко целесообразно бывает обратно вернуться к геометрическому построению, пользуясь его простотой и наглядностью и опираясь на крупность масштаба фигуры погрешности (натуральная величина). При этом определение градиента линий положений потребует небольшой сравнительно относительной точности от 1 до 10%, равно как и определение величин, от которых он зависит в рассмотренных выше случаях, т. е. главным образом расстояний s.

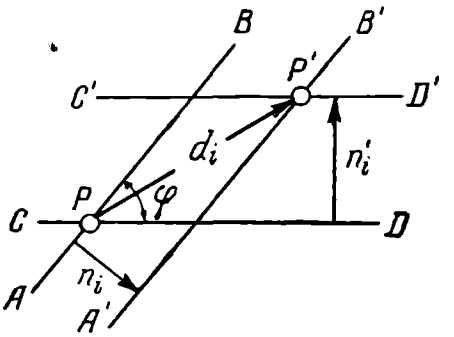


Рис. 3

Для получения s достаточно приближенно в мелком масштабе на клетчатой бумаге начертить данные и искомую точку. Градиент g угловых засечек удобнее выражать в секундах дуги и чертить его в таком масштабе, чтобы средний по длине градиент примерно равнялся отвечающему ему среднему расстоянию, т. е. чтобы на чертеже $g_{ср} = \frac{\rho}{s_{ср}}$ равнялось примерно $s_{ср}$

$\rho = 206\,265$

s — выражено в метрах.

Перейдем к погрешностям положения точки.

Положение проекции точки на горизонтальной плоскости определяется пересечением двух линий положения двух измеренных функций. Ошибкою, или погрешностью точки называется расстояние точки, определенной из ошибочных измерений, от той точки, которая получилась бы при без ошибочных измерениях функций. Если при этом направление перемещения точки неопределенно, то возникает вопрос о средней погрешности вообще. Пусть на рис. 3 n_i и n_i' представляют некоторые определенные поступательные перемещения двух линий положения AB и CD, определяющих точку P. Найдем соответствующее перемещение искомой точки, т. е. длину PP' которую обозначим через d_i.

По формуле квадрата стороны косоугольного треугольника имеем:

$$\overline{PP'^2} = \overline{PL^2} + \overline{LP'^2} - 2\overline{PL}\ \ \overline{LP'}\cos\angle PLP',$$

или

$$d_i^2 = \left(\frac{n_i}{\sin\varphi}\right)^2 + \left(\frac{n_i'}{\sin\varphi}\right)^2 + 2\ \frac{n_i n_i'}{\sin^2\varphi}\cos\varphi$$

Возьмем сумму квадратов всех возможных поступательных перемещений при сохранении их направления, получим:

$$[dd] = \frac{[n\cdot n]}{\sin^2\varphi} + \frac{[n'\cdot n']}{\sin^2\varphi}, \tag{11}$$

так как $[n\cdot n']$ при большом числе слагаемых и равно вероятных положительных и отрицательных значениях n и n' можно считать равным 0.

Найдем по какому-нибудь закону среднюю погрешность M положения точки; эта погрешность будет некоторой функцией от $[dd]$, например средняя квадратичная погрешность $M = \sqrt{\frac{[dd]}{N}}$. Такой же функцией от $[n\cdot n]$ и $[n'\cdot n']$ явятся средние возможные поступательные перемещения линий положения AB и CD.

Назовем средние квадратичные поступательные перемещения их через n_m и n_m, или просто через n и n'; тогда на основании (11) можно написать, что:

$$M^2 = \frac{n^2 + n'^2}{\sin^2\varphi},$$

или на основании (2)

$$M^2 = \frac{\Delta u^2}{g^2\sin^2\varphi} + \frac{\Delta u'^2}{g'^2\sin^2\varphi} = \frac{\Delta u^2 g'^2 + \Delta u'^2 g^2}{4F^2} = \frac{\Delta u^2}{h'^2} + \frac{\Delta u'^2}{h^2}, \tag{13}$$

где

F — площадь треугольника, образованного сторонами g и g' с углом между ними равным φ, $F = {}^1/_2\ gg'\sin\varphi$,

h — высота этого треугольника при основании g,

h' — высота при основании g'

Для двух прямых засечек, если считать средние ошибки измерения направлений одинаковыми, т. е. положить, что $\Delta u = \Delta u' = \Delta\alpha$, получим среднюю погрешность положения определяемой точки в таком виде:

$$M^2 = \Delta\alpha^2\,\frac{s_1^2 + s_2^2}{\sin^2\varphi}, \tag{14}$$

где

s_1 и s_2 — расстояния от искомой до двух данных точек,

φ — угол между засечками.

При нахождении условий, при которых M получает минимальное значение при данной точности измерения углов, мы должны найти min множителя $\frac{s_1^2 + s_2^2}{\sin^2\varphi} = p$; это будет, во-первых, тогда, когда s_1 будет $= s_2$, т. е. когда p будет $= \frac{s\sqrt{2}}{\sin\varphi}$, где s — сторона равнобедренного треугольника, φ — угол при вершине, основанием же его служит неизменная сторона между данными точками, которую назовем через a.

$$s = \frac{a}{2\sin\frac{1}{2}\varphi},\ \text{значит}\ p = \frac{\sqrt{2}}{4}\ \frac{a}{\sin^2\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi}$$

Оно будет min, когда

$$\sin^2\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi = \cos\frac{1}{2}\varphi - \cos^3\frac{1}{2}\varphi$$

оно приобретает max, а это будет при

$$\cos\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ или } \sin\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

т. е. при

$$^1/_2\,\varphi = 54^\circ\,44' \text{ и } \varphi = 100^\circ\,28'$$

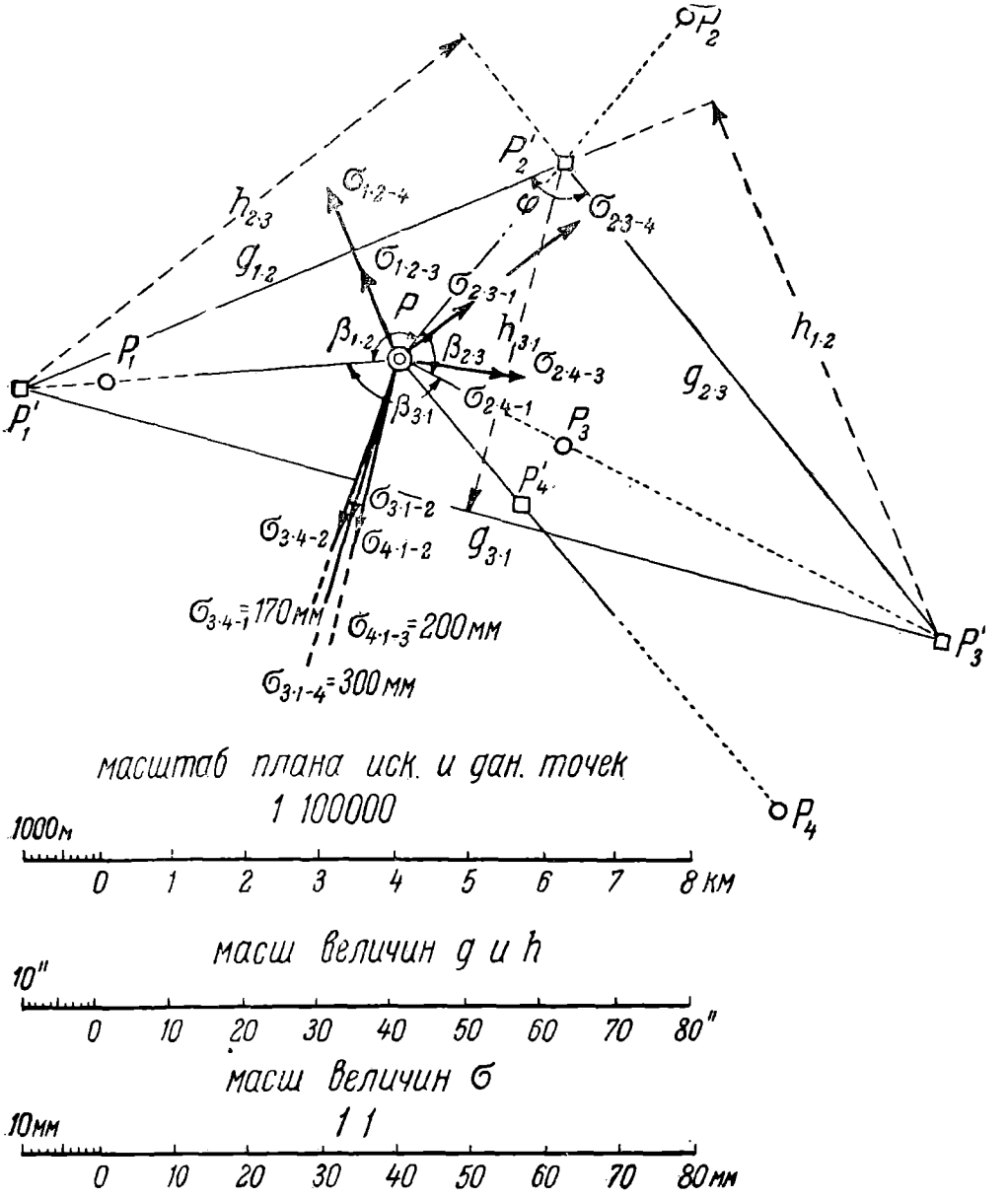


Рис. 4.

Получили обычно даваемый в геодезии результат.

Теперь остается расшифровать, что представляет собою формула (13) для обратной засечки, для так называемой задачи Потенота (Снелиуса).

Для большей определенности применительно к данному случаю эту формулу можно представить в таком виде:

$$M^2 = \frac{\Delta\beta_{1.2}^2 g_{2.3}^2 + \Delta\beta_{2.3}^2 g_{1.2}^2}{4F^2} = \left(\frac{\Delta\beta_{1.2}}{h_{2.3}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\beta_{2.3}}{h_{1.2}}\right)^2 \qquad (15)$$

который поясняется рис. 4.

Эта формула дана Эггертом еще в 1903 г. и помещена им в последнем (1931 г.) издании первого полутома второго тома известной геодезии Иордана (стр. 452) но здесь вывод еще проще благодаря применению общей теории линий положения.

На рис. 4 мы имеем данные точки P_1, P_2, P_3 и искомую точку P. На направлениях PP_1, PP_2 и т. д. отложены в показанном масштабе градиенты их, т. е. величины обратные расстояниям s_1, s_2. таким образом, что $PP'_1 = g_1 = \frac{\rho}{s_1}$ $PP'_2 = g^2 = \frac{\rho}{s_2}$ и т. д. Точки P'_1, P'_2 и P'_3 образуют вершины так называемого инверсионного треугольника, сторонами которого служат градиенты $g_{1.2}$, $g_{2.3}$ и $g_{3.1}$ измеряемых углов $\beta_{1.2}$, $\beta_{2.3}$ и $\beta_{3.1}$; F — площадь инверсионного треугольника, $h_{1.2}$ $h_{2.3}$ и $h_{3.1}$ — высоты этого треугольника.

Здесь следует заметить, что g и h дают число секунд в 1 *м*, а F — квадрат этого числа, $\Delta\beta$ — выражено в секундах и M получается в метрах.

При одинаковых $\Delta\beta = \mu$ формула (15) принимает вид:

$$M^2 = \mu^2 \frac{g_{1.2}^2 + g_{2.3}^2}{4F^2} = \mu^2 \left(\frac{1}{h_{1.2}^2} + \frac{1}{h_{2.3}^2}\right), \qquad (16)$$

из которого вытекает, что M будет меньше, если F — площадь инверсионного треугольника будет больше, а стороны его $g_{2.3}$ и $g_{1.2}$ взяты наименьшие. Значит, если при определении точки задачей Потенота имеется выбор из данных точек, то нужно взять такой «Потенот», у которого F больше, и мерить в нем те два угла β, которые дают наименьшие градиенты, или, иначе говоря, выбрать две максимальные высоты h одного из инверсионных треугольников и измерить соответствующие им углы β. Для лучшего выбора этих углов можно в искомой точке построить пучок векторов $\sigma = \frac{1}{h}$, т. е. дающих число метров или миллиметров, отвечающих 1 секунде ошибки угла. Эти векторы можно вычерчивать в натуральную величину. Направление σ совпадает с направлением h, т. е. с действительным направлением градиентов g углов β. Вместо формулы (16) мы будем иметь:

$$M^2 = \mu^2(\sigma_{i.k-t}^2 + \sigma_{k.t-i}^2). \qquad (17)$$

На рис. 4 построение σ проделано при четырех данных точках, получилось на каждом направлении по два вектора.

Минимальные σ, относящиеся к одному Потеноту, оказались: $\sigma_{1.2-3}$ и $\sigma_{2.3-1}$.

Если искомая и данные три точки лежат на одной окружности, то инверсионный треугольник превращается в отрезок прямой и F становится равным 0, а $\sigma = \infty$. На рис. 4 $\sigma_{4.1-3}$, $\sigma_{3.4-1}$ и $\sigma_{3.1-4}$ оказались велики настолько, что выходят за пределы чертежа и площадь инверсионного тр-ка $P'_1P'_4P'_3$ очень мала.

В случае измерения направлений, а не углов в задаче Потенота Эггерт дает формулу, которая при наших обозначениях имеет вид:

$$M^2 = m^2(\sigma_{1.2}^2 + \sigma_{2.3}^2 + \sigma_{3.1}^2) = m^2 \frac{g_{1.2}^2 + g_{2.3}^2 + g_{3.1}^2}{4F^2} \qquad (18)$$

где $m^2 = {}^1/_2\,\mu^2$ — средняя ошибка направления.

При уравнивании фигур погрешностей, составленных из линий положения, мы берем веса точек пересечения по формуле:

$$P = g^2 g'^2 \sin^2 \varphi = 4F^2$$

или

$$P = F^2. \tag{19}$$

Для обратных засечек, где три линии положения, отвечающие углам $\beta_{i \cdot k}$ $\beta_{k \cdot t}$ и $\beta_{t \cdot i}$, полученным из уравненных на станции трех направлений, обязаны пересечься в одной точке, формула (18) означает, что любые две линии из этих трех дадут один и тот же вес точки пересечения.

На этом можно закончить, считая, что общая идея дана и достаточно пояснена. Желающие могут развивать ее дальше.

В заключение укажу только, что графическое уравнивание с применением градиентов весьма целесообразно при повторных тригонометрических определениях подвижных точек, например в оползневых районах, в участках, подверженных сдвижению от подземных горных выработок, и т. п. Раз построенная фигура погрешности с найденными градиентами будет служить удобным средством для дальнейших исследований передвижения определяемой точки. Вопрос этот освещен шире в курсе П. Келль и В. Баринов «Высшая геодезия и геодезические работы», часть II, 1933 г.

Zusammenfassung

Die Lagelinien (geometrische Punktstellen) vereinigen in der Geodäsie die Fragen von graphischer Ausgleichung und von Ausführungen der Fehler der Punktlage. Die Lagelinien in der Nähe des zu bestimmenden Punktes können als parallele Geradezüge, die den Werten u, $u + \Delta u$, $u + \Delta_2 u$ usw. der zu messenden Grösse (Länge, Richtung, Winkel) entsprechen, betrachtet werden.

Die Grenze der Beziehung $\frac{\Delta u}{\Delta n} = g$ wird durch den Vektor dargestellt und heisst Gradient: letzterer ist senkrecht zur Lagelinie und nach der Seite des Zuwachsens der Funktion u gerichtet. Δn — Abstand zwischen zwei parallelen Lagelinien. Es ist verabredet, den Gradient um 90° nach dem Uhrzeiger zu drehen, damit er mit der Lagelinie übereinstimme.

Kennen wir, den Gradient, dessen Richtung und Grösse, so können wir stets die Lagelinie ziehene welch einem bestimmten gemessenen Wert der Funktion entspricht, falls die annähernde Lage des zu suchenden Punktes und der dieser Lage entsprechende annähernde Wert der zu messenden Funktion gegeben sind. Dies ist auf Abb. 1 dargestellt und durch Formel (2) ausgedrückt.

Der Gradient der algebraischen Summe von zwei Funktionen ist der geometrischen Summe oder Differenz der Gradienten der zu additierenden Funktionen gleich. Dies findet seinen Ausdruck in der Formel (3).

Auf Grund dieses Theorems, ist auf Abb. 2 der Gradient der Rückwärtseinschneidung dargestellt, welcher der geometrischen Differenz von zwei Seitwärtsschneidungen (Richtungen), deren Gradien $= \frac{1}{s}$, gleich ist.

s — Abstand zwischen dem zu suchenden und dem gegebenen Punkte.

Die e Konstruktion ergibt leicht die Formel (10), auf einem anderen Wege von Jordan ausgeführt (S. Jordans «Vermessungskunde», Bd. II, 1914, S. 406 u. 459—460).

Die Gradiententheorie ergibt auch leicht den Fehler der Punktlage (Abb. 3) und die Formel (15), die von Eggert seit 1903 gegeben wurde und im ersten Halbband des II. Bandes der Jordanschen «Vermessungskunde» auf S. 452 angeführt ist. Letztere Ausführungen sind viel komplizierter.

Hier, auf Grund der Formel (2) und der bakannten Gleichung $M^2 = \frac{n^2 + n'^2}{\sin^2 \varphi}$ erhalten aus Abb. 3, bekommen wir die Gleichung (13), woraus dann, zwecks Rückwärtseinschneidung die Formel (15) abgeleitet wird.

Abb. 4 bietet eine Erklärung dafür, worin auch die Vektoren $\sigma = \frac{1}{h}$ angegeben sind. h ist die Höhe der Inversionsdreiecke, die mittels Gradientenablegen $= \frac{1}{s}$ konstruiert sind.

Auf Abb. 4 sind $g_{1\cdot 2}$, $g_{2\cdot 3}$, $g_{3\cdot 1}$ Gradienten der gemessenen Winkel $\beta_{1\cdot 2}$, $\beta_{2\cdot 3}$, $\beta_{3\cdot 1}$, welche das Inversionsdreieck $P_1' P_2' P_3'$, dessen Fläche gleich F ist, zusammenstellen. Formeln (15), oder (16), oder (17) gestatten die vorteilhafteste Kombination aus drei gegebenen Punkten zu wählen zwecks Auflösung der Pothentot'schen (Snellius) Aufgabe. Dreiecke fur den vierten Punkt P_4' sind nicht angegeben. Die Frage ist näher klargelegt in den Vorlesungen über höhere Geodäsie und geodätische Arbeiten, von N. Kell. T. II, 1933 (in russischer Sprache ohne Zusammenfassung in einer fremden Sprache herausgegeben).