Записки Горного Института. Т. VII—3. 1929.
Annales de l'Institut des Mines à Leningrade. V. VII—3. 1929.

Простой графический метод определения символов граней кристалла на стереографической проекции.

В. В. Доливо-Добровольский.

Eine einfache graphische Methode für die Bestimmung der Symbole der Flächen des Krystalls in der stereographischen Projektion.

Von W. W. Doliwo-Dobrowolsky.

СОДЕРЖАНИЕ.

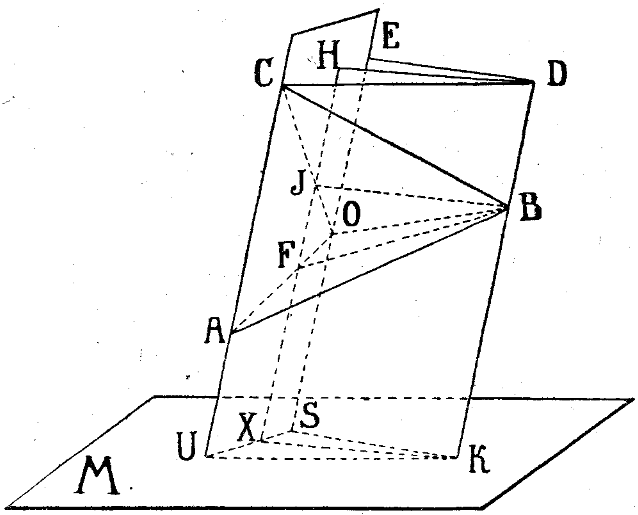
Вступление.

Автор не случайно не озаглавил настоящей статьи новым методом определения символов. Представляя собою комбинацию двух уже известных методов, этот метод не может быть назван новым. Оказывается, что два метода — метод проф. О. М. Аншелеса и несколько видоизмененный метод поясов при их совместном применении делают процесс определения символов более простым, чем при применении каждого из этих методов в отдельности. Однако целью настоящей статьи является не только показать способ такого совместного применения указанных методов, но и дать простой и независимый от них вывод и доказательство предлагаемого комбинированного метода.

Дать такой самостоятельный вывод автор считает необходимым для того, чтобы сделать этот метод вполне доступным, как практически, так и теоретически даже лицам, незнакомым с теми методами, на которые предлагаемый способ опирается, из которых предлагаемый способ вырос.

Одной из двух основ этого метода является следующее положение:

«Если провести меридианы, в которых лежат гномостереографические (и гномонические) проекции четырех граней, принадлежащих одному поясу и провести параллельно одному из этих меридианов прямую, то три остальные меридиана разделят эту прямую на отрезки, отношение которых рационально». Это чрезвычайно важная теорема была открыта и доказана ческие оси на расстояниях OA, OB и OC от начала координат — единичная грань. Таким образом отрезки OA, OB и OC являются единичными отрезками по осям. Рассмотрим пояс граней, заключающий в себе единичную грань ABC и одну из основных граней, напр. AOC. Любые плоскости, параллельные ребру пересечения граней ABC и AOC, т. е. параллельные ребру AC, будут лежать в этом поясе, так как тогда ребра пересечения таких граней будут параллельны между собою и параллельны AC.



Фиг. 1.

Проведем через ось OB плоскость OBDE, параллельную ребру AC. По предыдущему эта плоскость будет принадлежать нашему поясу. Так как эта плоскость проходит через одну из кристаллографических осей, то один из индексов в символе этой плоскости, являющейся возможной гранью, будет равен нулю. (Точка пересечения этой грани с осью OB лежит в бесконечности). Пусть ребра пересечения этой грани с нулем в символе с двумя другими гранями этого пояса будут BD и OE. Нетрудно видеть, что если эту грань перенести параллельно самой себе, так, чтобы ребро OE совпало с AC, то отрезки, отсекаемые этой гранью по двум кристаллографическим осям OA и OC, будут равны соответствующим отрезкам, отсекаемым единичной гранью. Поэтому, если обозначить через p, q и r индексы, соответственно отвечающие кристаллографическим осям OA, OB и OC (одна, безразлично какая, OA, OB или OC, есть первая ось, одна из них вторая, и одна из них — третья), то символ грани OBDE найдется из отношений:

$$p : q : r = \left(1 : \frac{OA}{OA}\right) : \left(1 : \frac{\infty}{OB}\right) : \left(1 : \frac{OC}{OC}\right)$$

ли

$$p : q : r = 1 : 0 : 1.$$

Таким образом построенная грань будет гранью с двумя единицами и с нулем в символе. В дальнейшем данную грань мы будем называть просто гранью с двумя единицами.

Возьмем какую-угодно возможную грань, лежащую в том же поясе. Такая грань будет параллельна ребрам AC, BD и OE, а потому всегда возможно провести ее так, чтобы она проходила через одно из этих ребер. Параллельным (поступательным) переносом сделаем ее проходящей через ребро BD. Пусть тогда эта грань займет положение FBDH, причем, по предыдущему, получившееся ребро пересечения этой грани с основной гранью AOC, ребро FH будет параллельно AC, BD и OE.

Каковы будут символы этой грани?

По кристаллографическим осям эта грань отсекает отрезки OF, OB и OJ. Из определения символа грани имеем:

$$p:q:r=\left(1:\frac{OF}{OA}\right):\left(1:\frac{OB}{OB}\right):\left(1:\frac{OJ}{OC}\right)\quad\ldots\ldots\ldots(1),$$

здесь p, q и r—индексы символа, отвечающие кристаллографическим осям OA, OB и OC.

Выражение (1) можно переписать так:

$$p:q:r=(OA:OF):1:(OC:OJ)\quad\ldots\ldots\ldots(2)$$

Рассечем все грани нашего пояса какой-нибудь плоскостью M (очевидно, для того чтобы это было возможно, плоскость M не должна быть параллельна оси пояса).

Пусть линии пересечения граней пояса AOEC, OBDE, ABDC и FBDH с плоскостью M выразятся прямыми SU, KS, KU и KX. Нетрудно видеть, что в плоскости USEC, ввиду параллельности ребер CU, HX и ES, для отрезков прямых между ними будем иметь:

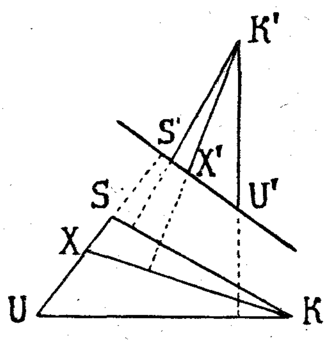
$$OA:OF=SU:SX\quad\text{и}\quad OC:OJ=SU:SX.$$

Пользуясь найденными отношениями, перепишем выражение (2)

$$p:q:r=(SU:SX):1:(SU:SX),$$

или

$$p:q:r=1:(SX:SU):1\quad\ldots\ldots\ldots(3)$$



Фиг. 2.

Сделаем чертеж в плоскости сечения M (фиг. 2). По прежнему пусть SU, KS, KU и KX являются следами плоскостей пояса. Возьмем в той же плоскости M какую-либо точку K′ и проведем через нее три прямых:

$$K'S'\perp KS\qquad K'U'\perp KU'\qquad K'X'\perp KX.$$

Далее проведем прямую $S'U'\perp SU$ так, чтобы она пересекла три первых прямых K′S′, K′U′ и K′X′. Полученный треугольник K′S′U′ будет подобен треугольнику KSU. Этот треугольник прямою K′X′ разбивается на два треугольника K′S′X′ и K′U′X′, соответственно подобных треугольникам KSX и KUX.

Отсюда видно, что

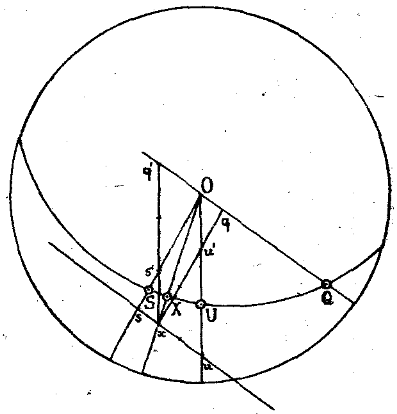
$$SX:SU=S'X':S'U'.$$

Выражение (3) можно поэтому переписать так:

$$p:q:r=1:(S'X':S'U'):1\quad\ldots\ldots\ldots(4)$$

Примем нашу плоскость M за плоскость проекции и спроектируем на эту плоскость методами кристаллографических проекций грани нашего пояса. Линейными проекциями граней мы называем следы на плоскости проекции плоскостей, параллельных данным граням и проходящих через точку зрения. Эти следы очевидно должны быть параллельны следам самих плоскостей на той же плоскости M. Из чертежа (фиг. 1) видно, что линейными проекциями граней USEC, SKDE, UKDC и XKDH будут прямые, параллельные SU, KS, KU и KX.

Гномонические и гномостереографические проекции граней будут лежать на прямых, проходящих через центр проекции и перпендикулярных линейным проекциям граней. Таким образом эти прямые будут перпендикулярны и к прямым SU, KS, KU и KX и, следовательно, будут параллельны прямым S′U′, K′S′, K′U′ и K′X′ (фиг. 2). Точку K′ мы брали в плоскости M произвольно. Если ее взять в центре проекции, то прямые K′S′, K′U′ и K′X′ совпадут с прямыми, соединяющими центр проекции с гномостереографическими (и гномоническими) проекциями граней, т. е. совпадут с меридианами, в которых лежат проекции граней SKDE, UKDC и XKDH (фиг. 1).



Фиг. 3.

Прямая же S′U′ не будет совпадать, но будет параллельна меридиану, в котором лежит проекция грани USEC. Таким образом для построения прямых K′S′, K′U′, K′X′ и S′U′ может служить гномостереографическая проекция граней рассматриваемого пояса. Пусть гномостереографические проекции граней USEC, SKDE, UKDC и XKDH будут Q, S, U и X (фиг. 3). Проведя меридианы через эти проекции и проведя прямую su параллельно меридиану грани Q (прямую пояса) будем иметь

$$sx : su = S'X' : S'U'.$$

Подставляя полученное в формулу (4), найдем

$$p : q : r = 1 : (sx : su) : 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

§ 2. Определение символов граней, лежащих в поясах, которые проходят через основную и единичную грани.

Формула (5) вместе с чертежом (фиг. 3) может служить для нахождения индексов символа любой грани, лежащей в поясе, проходящем через единичную грань и одну из основных граней.

Резюмируя все сказанное в § 2, можно, пользуясь гномостереографическими проекциями, дать следующие общие правила:

Для определения символа грани X, лежащей в поясе, проходящем через единичную грань U и одну из основных граней Q, следует провести прямую, параллельную меридиану грани Q (прямую пояса), пересечь эту прямую меридианами граней U, X и грани S, лежащей в том же поясе и имеющей два индекса в символе, равные единицам; взять на прямой пояса отрезок su от меридиана грани S с двумя единицами в символе до меридиана единичной грани U; смерить полученным отрезком отрезок sx от того же ме-

ридиана грани S до меридиана определяемой грани X[1]*): пользуясь полученным рациональным числом найти индексы символа по формуле*

$$p:q:r=1:(sx:su):1 \qquad (5)$$

где p и r индексы, отвечающие кристаллографическим осям, лежащим в основной грани Q, а q — индекс, отвечающий оси, которая пересекает основную грань Q.

Если пояс проходит чрез первую основную грань (100), то тогда будем иметь

$$p:q:r=(sx:su):1:1 \qquad (6)$$

Для третьего случая, когда пояс проходит через грань единичную и грань (001), будем иметь:

$$p:q:r=1:1:(sx:su) \qquad (7)$$

Рассмотрим пример:

Пусть на чертеже 3 грань Q грань (010). Каковы индексы символа грани X? Грань S—грань с двумя единицами в символе, для данного пояса, проходящего чрез (010), будет иметь символ (101); единичная грань U—(111). Из чертежа видим, что отрезок sx втрое меньше отрезка su, причем оба эти отрезка лежат по одну сторону меридиана грани S (перекрывают один другой),

Поэтому

$$sx:su=1:3.$$

Отсюда по формуле (5):

$$p:q:r=1:{}^1/_3:1.$$

Отсюда символ грани X будет (313). Если бы грань Q была бы гранью (100) (грань S имела бы следовательно символ (011)), то мы бы нашли по формуле (6) для грани X символ (133).

Если бы грань Q являлась бы гранью (001), то символ грани X был бы (331). (Грань S имела бы символ (110)).

В предыдущем мы проводили прямую, пересекающую меридианы граней пояса (прямую пояса) параллельно меридиану основной грани (Q) (фиг. 3).

Рассмотрим теперь случай проведения прямой пояса параллельно меридиану грани с двумя единицами в символе (S). Для простоты проведем ее через точку x (прямая su была проведена на произвольном расстоянии от центра проекции, а потому и положение точки x на меридиане ox произвольно). Проведенная прямая qx меридианами граней Q, U и X будет разделена на отрезки, из которых рассмотрим qx и qu′ Не трудно видеть, что отношение этих отрезков равно обратному отношению отрезков sx и su.

Действительно, так как

$$xq \parallel sO \quad \text{и} \quad sx \parallel Oq, \text{ то} \quad sx=Oq;$$

поэтому

$$su:sx=(sx+xu):sx=1+(xu:sx)=1+(xu:Oq) \qquad (8).$$

---

[1]) Измеряемый отрезок (в данном случае sx) следует считать положительным, если он и его масштаб (в данном случае su) накладываются друг на друга, перекрывают друг друга. В противном случае (если бы отрезки sx и su располагались бы в разные стороны от точки s) измеряемый отрезок следует считать отрицательным.

Из подобных треугольников u′xu и u′qO следует

$$xu : Oq = xu' : qu' \qquad (9);$$

подставляя (9) в выражение (8), получим

$$su : sx = 1 + (xu' : qu') = (qu' + xu') : qu' = qx : qu' \qquad (10)$$

Таким образом, если проводить прямую пояса параллельно меридиану грани с двумя единицами (S), то отношение соответственно выбранных отрезков на этой прямой будет равно отношению соответственных отрезков на прямой пояса, проведенной параллельно меридиану основной грани.

Формулу (10) можно переписать так:

$$sx : su = qu' : qx \qquad (11)$$

Подставляя (11) в формулу (5), найдем

$$p : q : r = 1 : (qu' : qx) : 1 \qquad (12)$$

Полученная формула может служить для определений символов граней, при проведении прямой пояса параллельно меридиану грани S.

Отсюда вытекает второй вариант нахождения символа грани X:

Для определения символа грани X, лежащей в поясе, проходящем через единичную грань U и одну из основных граней Q, следует провести прямую (прямую пояса), параллельную меридиану лежащей в том же поясе грани S с двумя единицами в символе; пересечь эту прямую меридианами граней U, Q, X; взять на проведенной прямой пояса отрезок qx от меридиана основной грани Q до меридиана определяемой грани X; смерить полученным отрезком отрезок qu′ от того же меридиана основной грани Q до меридиана единичной грани U; пользуясь полученным рациональным числом, найти индексы символа по формуле

$$p : q : r = 1 : (qu' : qx) : 1 \qquad (12)$$

где p и r индексы, отвечающие кристаллографическим осям, лежащим в основной грани Q, а q—индекс, отвечающий оси, которая пересекает эту грань.

Пусть p—индекс, отвечающий первой оси [100], q—второй оси [010], r—третьей [001]. Формула (12) будет тогда относиться к случаю, когда данный пояс проходит через вторую основную грань (010).

Для пояса, проходящего через (100), будем иметь

$$p : q : r = (qu' : qx) : 1 : 1 \qquad (13)$$

Для пояса, проходящего через (001), получим

$$p : q : r = 1 : 1 : (qu' : qx) \qquad (14).$$

Пусть прямая пояса xq′ проведена параллельно меридиану единичной грани U. Противоположные стороны параллелограмма Oq′xu равны:

$$ux = Oq'.$$

Из подобия же треугольников s′q′O и s′xs следует:

$$Oq' : sx = q's' : xs'.$$

Принимая это во внимание, находим:

$$\frac{su}{sx}=1+\frac{ux}{sx}=1+\frac{Oq'}{sx}=1+\frac{q's'}{xs'}=\frac{xs'+q's'}{xs'}=\frac{xq'}{xs'},$$

или иначе,

$$sx:su=xs':xq' \qquad (15).$$

Подставляя полученное в формулу (5), найдем

$$p:q:r=1:(xs':xq'):1 \qquad (16)$$

Пользуясь этой формулой, можно определять символы граней пояса третьим вариантом:

Для определения символа грани X, лежащей в поясе, проходящем через единичную грань U и одну из основных граней Q, следует: провести прямую (прямую пояса), параллельную меридиану единичной грани U; пересечь эту прямую меридианами граней Q, X и грани с двумя единицами в символе S, лежащей в том же поясе; взять на проведенной прямой пояса отрезок xq′ от меридиана определяемой грани X до меридиана основной грани Q; смерить полученным отрезком отрезок xs′ от того же меридиана определяемой грани X до меридиана грани с двумя единицами в символе S; пользуясь полученным рациональным числом, найти индексы символа по формуле:

$$p:q:r=1:(xs':xq'):1 \qquad (16)$$

где p и r индексы, отвечающие кристаллографическим осям, лежащим в основной грани Q, а q—индекс, отвечающий оси, которая пересекает эту грань.

Пусть p—индекс, отвечающий первой оси [100], q—[010], r—[001].

Формула (15) будет тогда верна для случая прохождения данного пояса через вторую основную грань (010).

Для пояса, проходящего через (100), формулой для определения символов будет

$$p:q:r=(xs':xq'):1:1 \qquad (17).$$

Для пояса, проходящего через (001), будем иметь

$$p:q:r=1:1:(xs':xq') \qquad (18)$$

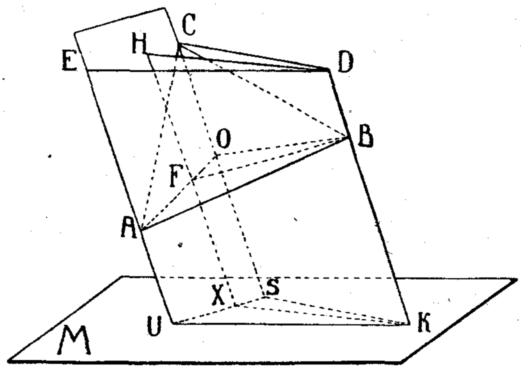
Мы не будем рассматривать четвертого варианта определения, варианта, когда прямая пояса проводится параллельно меридиану определяемой грани X. Этот вариант нельзя рекомендовать, не только ввиду его несколько большей теоретической сложности, но и ввиду большей мешкотности и при практическом применении. Неудобства определения с помощью четвертого варианта особенно выявляются при определении символов нескольких граней, лежащих в одном и том же поясе. Для определения каждой грани придется проводить новую, особую для этой грани прямую пояса и выбирать особые масштабы для измерений отрезков.

В трех первых вариантах при определениях символов нескольких граней достаточно провести только одну прямую пояса и только на этой прямой производить все измерения. При этом особенно удобными оказываются первый и второй варианты. В первом варианте масштаб (su) для измерения отрезков (sx) на прямой пояса будет одинаков для всех граней этого пояса. Во втором варианте для всех граней надо будет измерять один и тот же отрезок (qu′) (различными масштабами (qx)). Это несколько упрощает определение и делает его более механичным.

§ 3. Определение символов граней, лежащих в основных поясах.

Основными поясами будем называть пояса, которые проходят через две основные грани.

Пусть BOC, AOC и AOB (фиг. 4)—три основные грани кристалла (OA, OB и OC—кристаллографические оси). Пусть плоскость ABC—единичная грань. Рассмотрим пояс граней, заключающий в себе две основные грани, напр. AOC и BOC. Любые плоскости, параллельные ребру пересечения этих граней AOC и BOC, т. е. параллельные кристаллографической оси OC, будут лежать в этом поясе, так как тогда ребра пересечения таких граней будут параллельны между собою и параллельны OC. Так как все грани этого пояса будут параллельны одной из кристаллографических осей, то у каждой такой грани один из индексов в символе будет равен нулю. Проведем через ребро AB плоскость ABDE, параллельную оси OC. Эта плоскость, являющаяся по закону Вейсса возможной гранью кристалла, по предыдущему будет лежать в рассматриваемом поясе.



Фиг. 4.

Из чертежа видно, что отрезки, отсекаемые этой гранью по кристаллографическим осям OA и OB, равны отрезкам, отсекаемым единичной гранью. Пусть p—индекс в символе, отвечающий кристаллографической оси OA; q—отвечающий оси OB, r—отвечающий оси OC. (При этом OA, OB и OC не обязательно должны отвечать первой, второй и третьей кристаллографическим осям, только лишь одна из них есть первая, одна из них вторая и одна из них третья кристаллографическая ось) Символ грани ABDE найдется из отношений

$$p : q : r = \left(1 : \frac{OA}{OA}\right) : \left(1 : \frac{OB}{OB}\right) : \left(1 : \frac{\infty}{OC}\right)$$

или

$$p : q : r = 1 : 1 : 0;$$

таким образом эта грань будет гранью с двумя единицами в символе.

Возьмем какую угодно возможную грань, лежащую в том же поясе. Проведем ее через ребро BD. Пусть она займет положение FBDH. Для определения индексов символа этой грани имеем:

$$p : q : r = \left(1 : \frac{OF}{OA}\right) : \left(1 : \frac{OB}{OB}\right) : \left(1 : \frac{\infty}{OC}\right)$$

или

$$p : q : r = (OA : OF) : 1 : 0.$$

Здесь p, q и r—индексы символа, отвечающие соответственно осям OA, OB и OC.

Возьмем какую угодно плоскость M, пересекающую все грани нашего пояса и рассмотрим линии пересечении плоскости M с гранями пояса. Рассуждая затем совершенно так же, как в § 1, найдем:

$$p : q : r = 1 : (SX : SU) : O.$$

Строя же прямые, перпендикулярные к линиям пересечения (фиг. 2), получим, повторяя рассуждения § 1, такие отношения:

$$p : q : r = 1 ; (S'X' : S'U') : O.$$

Примем плоскость M за плоскость проекции. Пусть Q, S, U и X будут гномостереографическими проекциями граней USCE, SKDC, UKDE и XKDH (фиг. 4 и 3). Проведя меридианы через Q, S, U и X и прямую, параллельную меридиану грани Q и применяя рассуждения, тождественные рассуждениям § 1, найдем

$$p : q : r = 1 : (sx : su) : O \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19).$$

Эта формула может служить для определения символов в поясе основных граней по первому варианту.

Если проводить прямую пояса параллельно грани S, то, как было доказано в § 2 (формула 11), на этой прямой получим отрезки, обратно пропорциональные первым

$$qu' : qx = sx : su.$$

Отсюда следует, что индексы можно будет определять по формуле

$$p : q : r = 1 : (qu' : qx) : O,$$

или

$$q : p : r = 1 : (qx ; qu') : O \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20).$$

Так как грань S тоже является основной гранью, как и грань Q, то второй вариант ничем не отличается от первого и формула (20) вполне аналогична формуле (19). В первом варианте индекс q отвечал кристаллографической оси, пересекающей основную грань Q, параллельно меридиану которой была проведена прямая пояса. Во втором варианте индекс p отвечает оси, пересекающей основную грань S, параллельно которой была проведена прямая пояса. Изменились только лишь буквенные обозначения, формула же, конечно, не изменилась. Таким образом первый и второй варианты сливаются здесь в один.

Для определения символа грани X, лежащей в поясе, проходящем через две основные грани Q и S, следует провести прямую, параллельную меридиану одной из основных граней, напр. Q (фиг. 3); пересечь эту прямую (прямую пояса) меридианами граней S, X и грани U того же пояса с двумя единицам в символе; взять на проведенной прямой пояса отрезок su от меридиана другой основной грани (S) до меридиана грани с двумя единицами U; смерить полученным отрезком отрезок sx от того же меридиана основной граіі S до меридиана определяемой грани X [1]*), пользуясь полученным рациональным числом, найти индекс символа по формуле*

$$p : q : r = 1 : (sx : su) : O \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19),$$

---

[1]) Правило знаков то же, что и в предыдущем (см. замечание на стр. 155).

где p и r—индексы, отвечающие кристаллографическим осям, лежащим в основной грани Q, а q—индекс, отвечающий оси, которая пересекает эту грань.

Пользуясь формулой (15) (§ 2) найдем правила определения по третьему варианту:

для определения символа грани X, лежащей в поясе, проходящем через две основные грани Q и S, следует: провести прямую (прямую пояса), параллельную меридиану грани того же пояса U с двумя единицами в символе; пересечь эту прямую меридианами граней Q, S и X; взять на проведенной прямой пояса отрезок xq′ от меридиана определяемой грани X до меридиана одной из основных граней, напр. Q; смерить полученным отрезком отрезок xs′ от того же меридиана определяемой грани X до меридиана второй основной грани S; пользуясь полученным рациональным числом, найти индексы символа по формуле

$$p : q : r = 1 : (xs' : xq') : 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

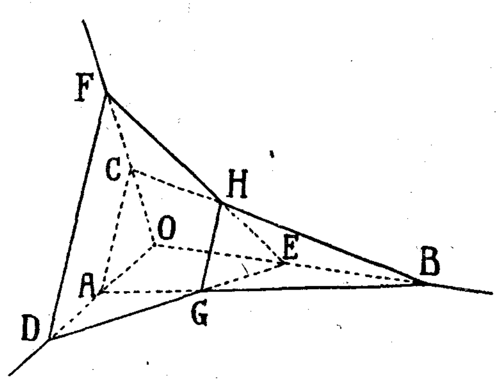
где p и r индексы, отвечающие кристаллографическим осям, лежащим в основной грани Q, а q индекс, отвечающий оси, которая пересекает эту ось.

Из всего сказанного в § 3 видно, что определение символов граней, лежащих в поясах, проходящих через две основные грани, совершенно аналогично, как теоретически, так и практически, определению символов в поясах, проходящих через единичную грань и одну из основных.

Здесь только вторая основная грань играет роль грани с двумя единицами, а грань с двумя единицами заменяет собою единичную; единичная же грань отсутствует.

§ 4. Связь между индексами в символах у граней пояса, проходящего через основные грани.

Докажем известную теорему: «Если пояс граней проходит через основную грань, то отношение индексов отвечающих кристаллографическим осям, лежащим в этой основной грани, постоянно для всех граней этого пояса».



Фиг. 5.

Пусть BOF, DOF и DOB (фиг. 5) три основные грани; OD, OB и OF—кристаллографические оси. Обозначим отрезки, отсекаемые единичной гранью (на черт. не изображенной) по кристаллографическим осям через a_0, $в_0$ и c_0. Пусть две какие-либо грани ABC и DEF лежат в одном поясе с одной из основных граней, напр. DOF. Ребра пересечения этих трех граней должны быть, следовательно, параллельны друг другу

$$AC \parallel DF \parallel GH \ldots\ldots\ldots\ldots (22).$$

Определим символы граней ABC и DEF. Для ABC имеем:

$$p_1 : q_1 : r_1 = \left(1 : \frac{OA}{a_0}\right) : \left(1 : \frac{OB}{b_0}\right) : \left(1 : \frac{OC}{c_0}\right) \quad \ldots\ldots (23),$$

где p_1, q_1, r_1, индексы, отвечающие кристаллографическим осям OD, OB и OF.

Для DEF имеем

$$p_2 : q_2 : r_2 = \left(1 : \frac{OD}{a_0}\right) : \left(1 : \frac{OE}{b_0}\right) : \left(1 : \frac{OF}{c_0}\right) \quad \ldots\ldots (24),$$

где p_2, q_2, r_2—индексы, отвечающие осям OD, OB, и OF. В основной грани DOF, принадлежащей нашему поясу, лежат оси OD и OF. Им отвечают индексы p_1 и r_1 грани ABC и индексы p_2 и r_2 грани DEF. Согласно условию теоремы, отношение этих индексов должно быть постоянным для любых граней пояса. Найдем это отношение для грани ABC из формулы (23):

$$p_1 : r_1 = (a_0 : c_0) . (OC : OA) \quad \ldots\ldots\ldots (25)$$

Это отношение для грани DEF из формулы (24) будет:

$$p_2 : r_2 = (a_0 : c_0) . (OF : OD) \quad \ldots\ldots\ldots (26).$$

Так как согласно (22) AC параллельно DF, то треугольники AOC и DOF подобны, а потому

$$OC : OA = OF : OD.$$

Отсюда видно, что правые части равенств (25) и (26) равны; следовательно равны и левые:

$$p_1 : r_1 = p_2 : r_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

Так как ABC и DEF две любые грани взятого пояса, то формула (27) показывает, что отношение индексов, отвечающих осям OD и OF, одинаково для любых граней пояса:

$$p_1 : r_1 = p_2 : r_2 = p_3 : r_3 = \text{Const} \quad \ldots\ldots\ldots (28)$$

Таким образом теорема доказана.

§ 5. Принципы общего метода определения символов.

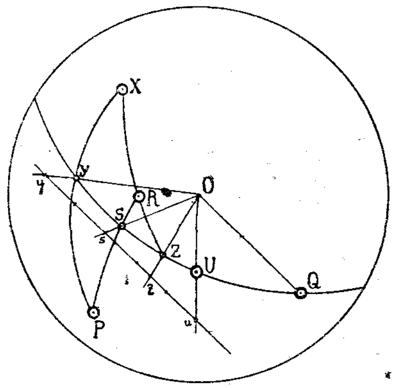
Пусть P, Q и R (фиг. 6) три основные грани кристалла, U—единичная грань [1]). Требуется определить символы некоторой пятой грани X. Проведем дугу большого круга через единичную грань и одну из основных P, Q или R, для примера проведем через Q. На этой дуге будут проектироваться все грани, лежащие в поясе граней U и Q. На этой же дуге должна лежать и грань с двумя единицами и нулем в символе. Построим эту грань. Для этого проведем дугу большого круга через две основные грани, не лежащие в первом поясе (в нашем примере через P и R). У всех граней проведенного пояса (назовем его вторым) один из индексов в символе равен нулю. На пересечении первого и второго пояса и будет лежать возможная грань S с двумя единицами в символе.

---

[1]) Правильнее было бы сказать, что P, Q, R и U не грани, но гномостереографические проекции граней. Однако для краткости, как здесь, так и во всем дальнейшем мы всегда будем условно называть гранью ее гномостереографическую проекцию.

Доказать, что при этом общеизвестном построении получается грань с двумя единицами в символе, можно, пользуясь теоремой предыдущего параграфа. Действительно, так как первый пояс проходит через единичную грань (111) и основную, то отношение двух индексов для всех граней первого пояса всегда равно единице.

Поэтому же единице равно и отношение двух индексов для грани S. Но грань S лежит и во втором поясе. Поэтому один из индексов в символе этой грани равен нулю. Отсюда следует, что два другие индекса грани S, отношение которых равно единице, каждый в отдельности тоже равен единице.



Фиг. 6.

Проведем еще два поясных круга через определяемую грань X и те же основные грани P и R, через которые проведен второй пояс. Проведенные третий (XP) и чертвертый (XR) пояса пересекут первый пояс в некоторых точках Y и Z. Точки пересечения будут некоторыми возможными гранями кристалла. Определим символы этих граней, для чего воспользуемся тем, что обе эти грани лежат в первом поясе, в котором известно положение основной грани (Q), единичной (U) и грани с двумя единицами в символе (S). По приведенным в § 2 правилам находим символы граней Y и Z по какому-нибудь из трех вариантов. Воспользуемся для примера первым вариантом (формула 5). Для индексов Y найдем:

$$p_1 : q_1 : r_1 = 1 : (sy : su) : 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Для индексов грани Z

$$p_2 : q_2 : r_2 = 1 : (sz : su) : 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30).$$

Здесь индексы p_1 и p_2 отвечают кристаллографической оси, пересекающей основную грань P; q_1 и q_2—отвечают оси, пересекающей грань Q; r_1 и r_2—оси, пересекающей R.

Третий пояс проходит через основную грань (P). Согласно теореме предыдущего параграфа, отношение двух индексов (q и r), отвечающих двум осям, лежащим в основной грани (P), будет постоянным для всех граней этого пояса. Зная символ хотя бы одной грани, лежащей в этом поясе, можно определить это отношение. В этом поясе лежит грань Y. Символ этой грани нами определен по формуле (29). Поэтому можно определить постоянное для третьего пояса отношение индексов

$$r_1 : q_1 = su : sy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31).$$

Четвертый пояс проходит через основную грань R. Согласно теореме предыдущего параграфа, отношение двух индексов (p и q), отвечающих двум осям, лежащим в основной грани (R), будет постоянным для всех граней этого пояса.

Аналогично предыдущему, по символу грани Z можно определить это отношение. Для этого воспользуемся формулой (30)

$$p_2 : q_2 = su : sz \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32).$$

Определяемая грань X лежит одновременно и в третьем, и в четвертом поясе. Поэтому отношение индексов этой грани должно удовлетворять как формуле (31), так и формуле (32). Если индексы грани X обозначим через p, q и r, то согласно формуле (31), должно быть

$$r:q = su:sy \qquad (33).$$

Согласно же формуле (32) должно быть

$$p:q = su:sz \qquad (34).$$

Сопоставляя вместе формулы (34) и (33), получим

$$p:q:r = (su:sz):1:(su:sy) \qquad (35).$$

Формула (35) и может служить для определения символа грани X. Из этих формул видно, что в сущности нет надобности полностью определять символы вспомогательных граней Y и Z; достаточно, взяв три отрезка su, sy и sz на прямой пояса, найти их отношения.

Указанный способ дает неопределенность, если грань X лежит во втором поясе. Тогда третий и четвертый пояса сливаются со вторым и вместо вспомогательных граней Y и Z получается только грань с двумя единицами S. Чтобы избежать неопределенности, всегда можно провести второй пояс иначе, через другие основные грани (например, не через P и R, но через Q и R). В таком случае, конечно, изменится и первый пояс (вместо UQ будем иметь UP) и один из последних (вместе XP будем иметь XQ). Иногда, однако, проще определять символы граней второго пояса (да и других основных поясов) по правилам, указанным в § 3, проводя соответствующую прямую пояса.

Если символы остальных граней (не лежащих во втором поясе), определялись по второму варианту, то можно избежать проведения отдельной прямой пояса. Для этого только придется для определений граней второго пояса прибегнуть к третьему варианту. Действительно, при определениях граней общего положения (не лежащих во втором поясе) по второму варианту, прямая пояса проводится параллельно меридиану грани S с двумя единицами в символе. При определениях граней второго пояса по третьему варианту, мы должны проводить прямую пояса параллельно тому же меридиану той же самой грани S с двумя единицами. Таким образом, вместо проведения двух параллельных между собою прямых первого и второго поясов, можно ограничиться одной общей им обоим прямой поясов OS.

§ 6. Правила графического определения символов граней кристалла на стереографической сетке.

Резюмируя все сказанное выше, можно дать следующие общие правила определения символов.

Пусть P, Q и R (фиг. 6) гномостереографические проекции трех основных граней; пусть U—проекция единичной грани. Требуется определить символ какой-нибудь грани X. Проводим дугу большого круга через единичную грань U и одну из основных граней (напр. Q); (первый пояс UQ). Проведем дугу (второй пояс PR) через две другие основные грани, которые не лежат в первом поясе. В пересечении первого и второго пояса получаем вспомогательную грань S с двумя единицами в символе. Проводим дуги через определяемую грань X и те же основные грани, через которые проведем второй пояс (третий пояс XP и четвертый пояс XR). В пересечениях третьего и четвертого поясов с первым получаем две вспомогательные грани Y и Z. Проводим прямую (прямую пояса) параллельную или основной грани Q (первый вариант), или грани с двумя единицами S (второй вариант) [1]). Пересекаем проведенную прямую меридианами всех остальных граней, лежащих в первом поясе: единичной грани U, вспомогательной Y, вспомогательной Z и грани с двумя единицами S (в первом варианте) или основной грани Q (во втором варианте).

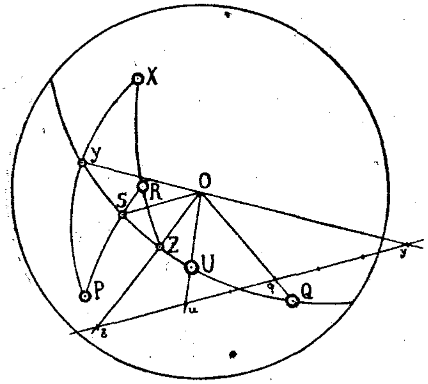
Соответственно с выбранным способом проведения прямой пояса, далее поступаем двояко.

Первый вариант. Прямая пояса проведена параллельно меридиану основной грани Q (фиг. 6). На проведенной прямой пояса определяем отрезки: su от меридиана грани с двумя единицами S до меридиана единичной грани U; sy от того же меридиана грани S до меридиана вспомогательной грани y; sz—от того же меридиана S до меридиана вспомогательной грани Z. Берем отношения полученных отрезков, причем считаем их положительными, если отрезки на прямой пояса перекрывают друг друга. В противном случае, когда отрезки не накладываются друг на друга, отношение следует считать отрицательным. Индексы грани X находим по формуле

$$p:q:r=(su:sz):1:(su:sy) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35).$$

Здесь p—индекс, отвечающий кристаллографической оси, пересекающей грань P (параллельной граням Q и R); q—индекс, отвечающий оси, пересекающей грань Q; r—индекс, отвечающей оси, пересекающей грань R.

Пример. Пусть P, Q, R и U (фиг. 6) имеют символы (100), (010), (001) и (111). Индексы символа грани X (pqr) по формуле (35) будут:



Фиг. 7.

$$p:q:r=(2:1):1:(-3:2)$$

или

$$p:q:r=-4:-2:3$$

Таким образом искомый символ X $(\bar{4}\,\bar{2}\,3)$.

Второй вариант. Прямая пояса проведена параллельно меридиану грани с двумя единицами S (фиг. 7).

На проведенной прямой пояса определяем отрезки: qu от меридиана основной грани Q до меридиана единичной грани U; qy от меридиана той же грани Q до меридиана вспомогательной грани Y; qz от того же меридиана Q до меридиана грани Z. Беря отношения полученных отрезков, находим индексы грани X по формуле:

[1]) Третьего варианта, когда прямая пояса проводится параллельно единичной грани U, мы не рассматриваем, как более сложного по сравнению с двумя первыми. Третий вариант требует определений четырех отрезков, тогда как в двух первых вариантах достаточно определить только по три отрезка. (См. конец § 2).

$$p:q:r=(qz:qu):1:(qy:qu) \quad \ldots\ldots \quad (36).$$

или

$$p:q:r=qz:qu:qy \quad \ldots\ldots \quad (37).$$

Обозначения p, q и r те же, что и в первом варианте.

Пример. Если положить, что P, Q, R и U имеют символы (100), (010), (001) и (111), то символ грани X определится, как $(\bar{4}\,\bar{2}\,3)$:

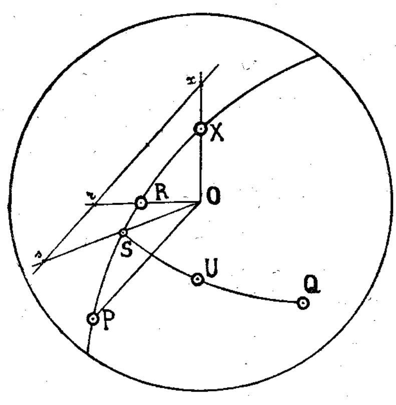
$$p:q:r=(2:1):1:(-3:2),$$

или

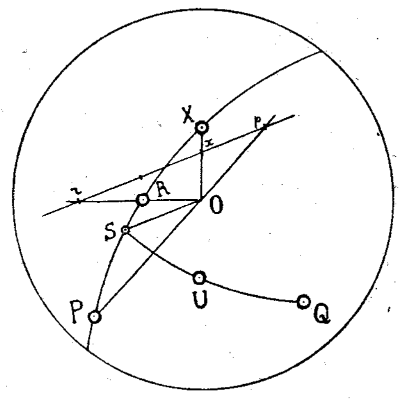
$$p:q:r=\bar{4}:\bar{2}:3.$$

Так как грани второго пояса не могут быть определены описанным способом, то для определения этих граней всегда можно перейти к другому способу проведения первого пояса: провести его через другую основную грань (напр. через P и U). При таком проведении второй пояс будет уже иным и грани, не определявшиеся ранее могут быть определены вышеописанным методом.

Грани второго пояса можно определять еще таким образом (фиг. 8 и 9). Проводим меридианы основных граней, лежащих в этом поясе (P и R), меридиан грани с двумя единицами (S) и меридиан определяемой грани X. Проводим прямую пояса или параллельно меридиану одной из основных граней (P или R) (первый и второй вариант) или параллельно меридиану грани S с двумя единицами в символе (третий вариант).



Фиг. 8.



Фиг. 9.

Первый и второй варианты. (Фиг. 8). Прямая пояса проведена параллельно меридиану одной из основных граней (напр. P). Определяем отрезки на этой прямой пояса: отрезок rs от меридиана другой основной грани (R) до меридиана грани (S) с двумя единицами в символе и отрезок rx от того же меридиана грани R до меридиана определяемой грани X. Беря отношения найденных отрезков, определяем индексы граней X по формуле:

$$p:q:r=(rx:rs):0:1 \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

или

$$p:q:r=rx:0:rs \quad \ldots\ldots \quad (39).$$

Правило знаков то же, что и в предыдущих случаях.

Пример. Дано: P (100), R (001), S (101) (фиг. 8). Для индексов грани X получим такие значения:

$$p:q:r=-2:0:1,$$

отсюда искомый символ $(\bar{2}01)$.

Третий вариант (фиг. 9). Прямая пояса проведена параллельно меридиану грани S с двумя единицами. Определяем отрезки xr и xp от меридиана определяемой грани X до меридианов основных граней R и P. Беря отношение полученных отрезков, определяем индексы по формуле

$$p:q:r=(xr:xp):0:1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

или

$$p:q:r=xr:0:xp \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (41).$$

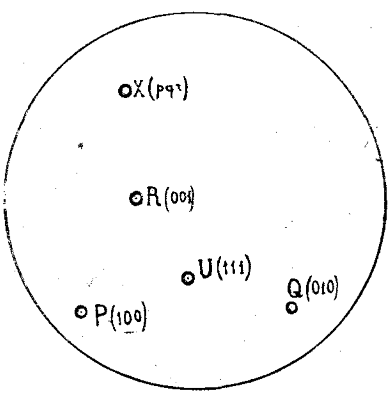
правило знаков то же, что и в предыдущих вариантах.

Пример. Дано P (100), R (001), S (101) (фиг. 9). Из чертежа видно, что

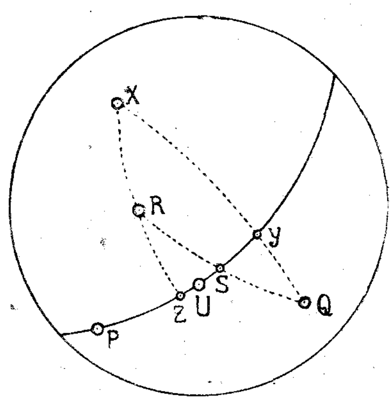
$$xr:xp=-(2:1),$$

отсюда подстановкой в формулу (40) найдем, что искомый символ $(\bar{2}01)$.

Рассмотрим частные случаи. Пусть P — первая основная грань (100); Q — вторая основная грань (010), R — грань (001) (фиг. 10). Символ определяемой грани X пусть будет (p q r), где p, q и r индексы, отвечающие соответственно первой, второй и третьей оси. Согласно изложенным выше общим правилам определения символа грани X (p q r), следует провести первый пояс через единичную грань U (111) и одну из основных. Основных граней три. Отсюда следует, что можно тремя различными способами проводить первый пояс.



Фиг. 10.

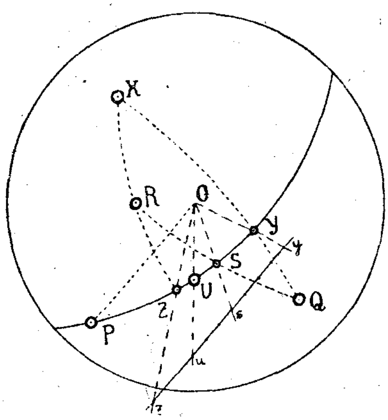


Фиг. 11.

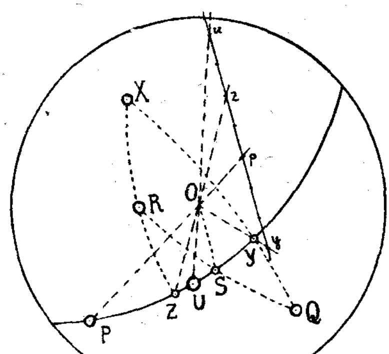
Первый способ (фиг. 11). Первый пояс проведен через грань U (111) и первую основную грань P (100). Второй пояс, следовательно, пройдет через грани Q (010) и R (001). В пересечении первого пояса и второго получим грань S (011). Третий проходит через X (pqr) и Q (010). Четвертый через X (p q r) и R (001).

Первый вариант (фиг. 12). Прямая пояса проведена параллельно меридиану основной грани P (100). Пересекаясь с меридианами граней U, S, Y и Z, прямая пояса разбивается на отрезки su, sy и sz. Индексы символа грани найдутся по формуле:

$$p:q;r=1:(su:sz):(su:sy) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (42)$$



Фиг. 12.



Фиг. 13.

Второй вариант (фиг. 13). Прямая пояса проведена параллельно меридиану грани с двумя единицами S (011). Пересекаясь с меридианами грани P, U, Y и Z, прямая пояса разбивается на отрезки pu, py и pz. Индексы символа грани X найдутся из формулы

$$p:q:r=1:(pz:pu):(py:pu) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (43)$$

или

$$p:q:r=pu:pz:py \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (44)$$

Частный случай. Для определения символов граней, лежащих во втором поясе (в поясе [100]) можно или воспользоваться вторым или третьим способом проведения первого пояса или поступать нижеописанным образом.

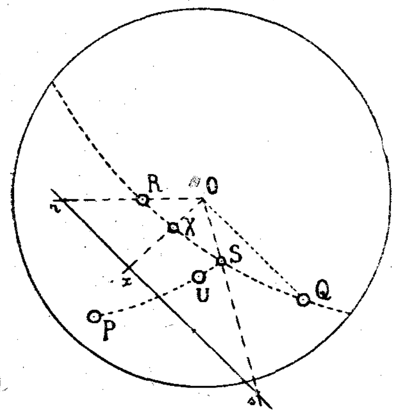
Проводим прямую пояса параллельно меридиану одной из основных граней этого пояса (первый и второй варианты), или же параллельно меридиану грани S (третий вариант). Пересекаем эту прямую меридианами остальных граней, лежащих в этом поясе: определяемой грани X (pqr), грани S (011) (в первых двух вариантах) и основной (Q (010) или R (001)) (в первых двух вариантах) или же обоих основных (и Q (010) и R (001), в третьем варианте).

Первый вариант (фиг. 14). Прямая пояса проведена параллельно меридиану грани Q (010). Пересекаясь с меридианами граней R (001), S (011) и определяемой грани X (pqr), прямая пояса разбивается на отрезки rs и rx. Индексы символа грани X найдутся по формуле

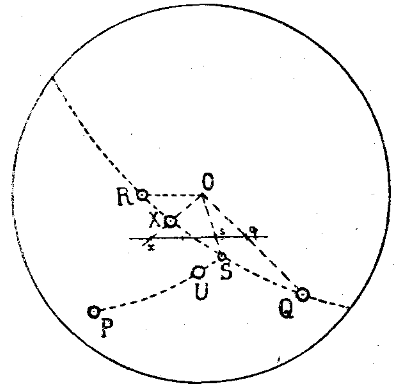
$$p:q:r=0:(rx:rs):1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (45)$$

или

$$p:q:r=0:rx:rs \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (46)$$



Фиг. 14.



Фиг. 15.

Второй вариант (фиг. 15). Прямая пояса проведена параллельно меридиану грани R (001). Пересекаясь с меридианами граней Q (010), S (011) и X (pqr), прямая пояса разбивается на отрезки qs и qx. Индексы символа грани X найдутся по формуле:

$$p:q:r=0:1:(qx:qs) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

или

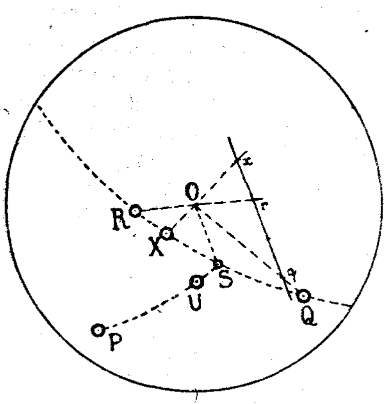
$$p:q:r=0:qs:qx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

Третий вариант (фиг. 16). Прямая пояса проведена параллельно меридиану грани S (011). Пересекаясь с меридианами Q (010), R (001) и X (pqr), прямая пояса разбивается на отрезки xq и xr. Индексы символа грани X найдутся по формуле:

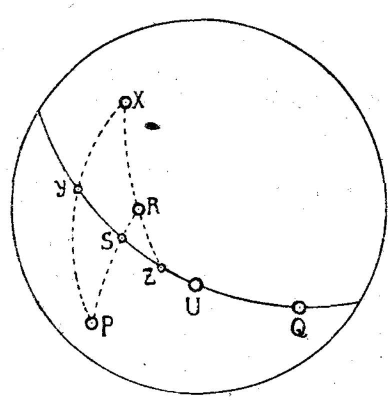
$$p:q:r=0:(xr:xq):1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

или

$$p:q:r=0:xr:xq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$



Фиг. 16.

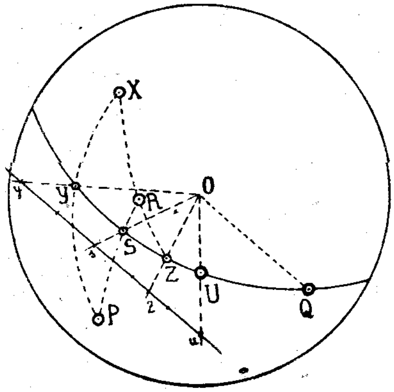


Фиг. 17.

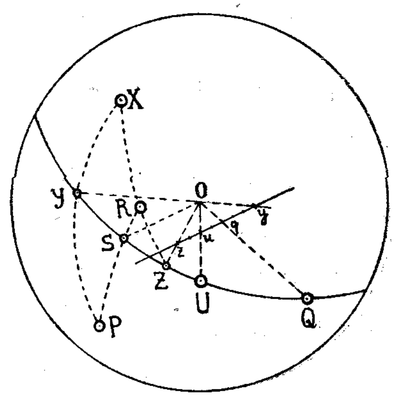
Второй способ (фиг. 17). Первый пояс проведен через единичную грань U (111) и вторую основную грань Q (010). Второй пояс пройдет, следовательно, через грани P (100) и R (001). В пересечении первого пояса со вторым получим грань S (101). Третий пояс проводим через X (pqr) и P (100); четвертый — через X (pqr) и R (001).

Первый вариант (фиг. 18). Прямая пояса проведена параллельно меридиану основной грани Q (010). Формула для нахождения символа будет

$$p:q:r=(su:sz):1:(su:sy) \quad \ldots \ldots \quad (51)$$



Фиг. 18.



Фиг. 19.

Второй вариант (фиг. 19). Прямая пояса проведена параллельно меридиану грани с двумя единицами S (101). Индексы символа грани X (pqr) найдутся из формулы

$$p:q:r=\frac{qz}{qu}:1:\frac{qy}{qu}, \quad \ldots \ldots \quad (52)$$

или

$$p:q:r=qz:qu:qy \quad \ldots \ldots \quad (53)$$

Частный случай. Для определения символов граней, лежащих во втором поясе (в поясе [010]), можно или перейти к первому или третьему способу проведения первого пояса, или же провести прямую определяемого второго пояса. Эту прямую пересекаем меридианами граней определяемого пояса.

Первый вариант (фиг. 20). Прямая пояса проведена параллельно меридиану грани P (100).

$$p:q:r=(rx:rs):0:1 \quad \ldots \ldots \quad (54)$$

или

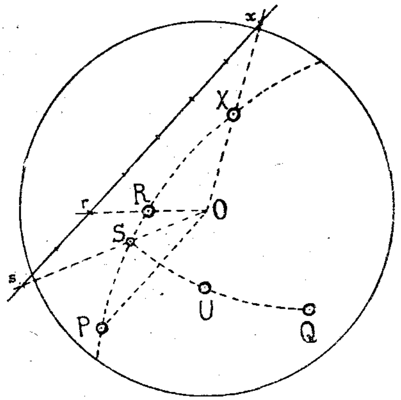
$$p:q:r=rx:0:rs \quad \ldots \ldots \quad (55)$$

Второй вариант (фиг. 21). Прямая пояса проведена параллельно меридиану грани R (001).

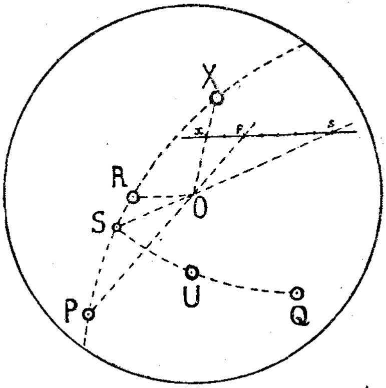
$$p:q:r=1:0:\frac{px}{ps} \quad \ldots \ldots \quad (56)$$

или

$$p:q:r=ps:0:px \quad \ldots \ldots \quad (57)$$



Фиг. 20.



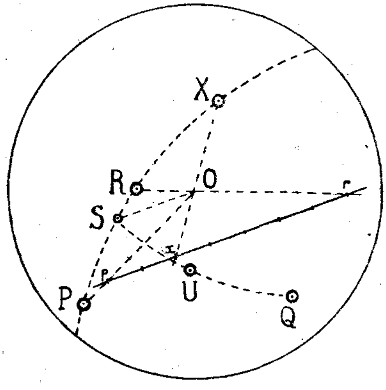
Фиг. 21.

Третий вариант (фиг. 22). Прямая пояса проведена параллельно меридиану грани S (101).

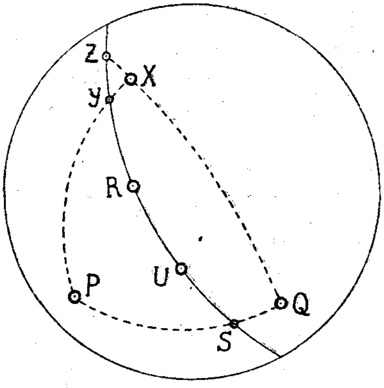
$$p:q:r=\frac{xr}{xp}:0:1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

или

$$p:q:r=xr:0:xp \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$



Фиг. 22.



Фиг. 23.

Третий способ. (фиг. 23). Первый пояс проведен через единичную грань U (111) и третью основную грань R (001).

Второй пояс пройдет, следовательно, через грани P (100) и Q (010). В пересечении первого пояса со вторым получим грань S (110). Третий пояс проводим через X (pqr) и P (100). Четвертый через X (pqr) и Q (010).

Первый вариант (фиг. 24). Прямая пояса проведена параллельно меридиану основной грани R (001).

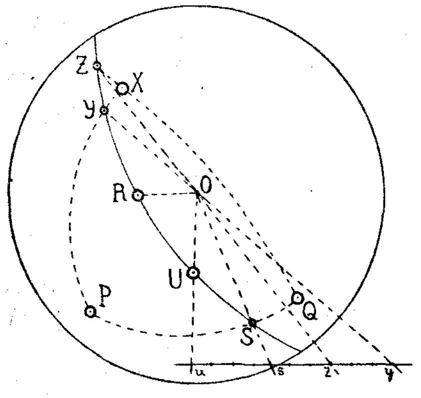
$$p:q:r=(su:sz):(su:sy):1 \quad \ldots\ldots \quad (60)$$

Второй вариант (фиг. 25). Прямая пояса проведена параллельно меридиану грани с двумя единицами S (110).

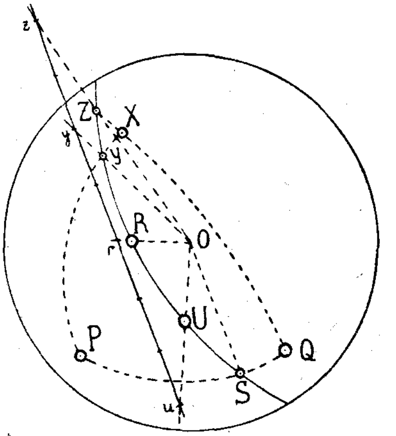
$$p:q:r = \frac{rz}{ru} : \frac{ry}{ru} : 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

или

$$p:q:r = rz : ry : ru \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62)$$



Фиг. 24.



Фиг. 25.

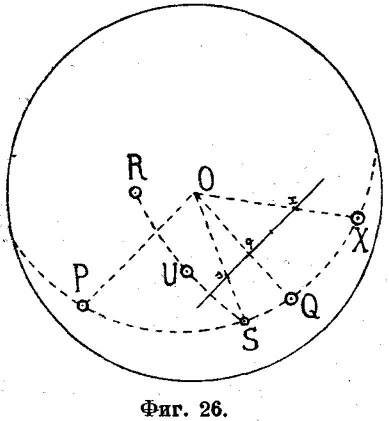
Частный случай. Для определения символов граней, лежащих во втором поясе (в поясе [001]) можно перейти к первому, или второму способу проведения первого пояса, или же провести прямую определяемого второго пояса. Эту прямую пересекаем меридианами граней определяемого пояса.

Первый вариант (фиг. 26). Прямая пояса проведена параллельно меридиану грани P (100).

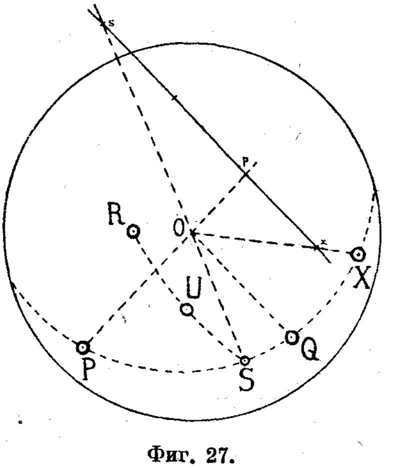
$$p:q:r = \frac{qx}{qs} : 1 : 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

или

$$p:q:r = qx : qs : 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (64)$$



Фиг. 26.



Фиг. 27.

Второй вариант (фиг. 27). Прямая пояса проведена параллельно меридиану грани Q (010).

$$p:q:r=1:\frac{px}{ps}:0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

$$p:q:r=ps:px:0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (66)$$

Третий вариант (фиг. 28). Прямая пояса проведена параллельно меридиану грани S (110).

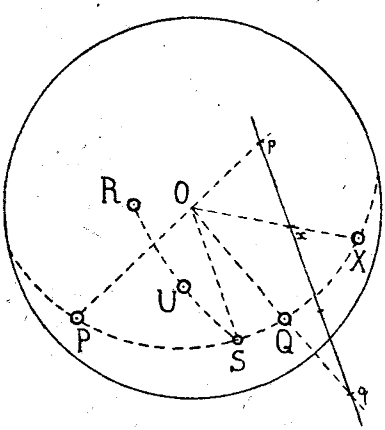
$$p:q:r=\frac{xq}{xp}:1:0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (67)$$

или

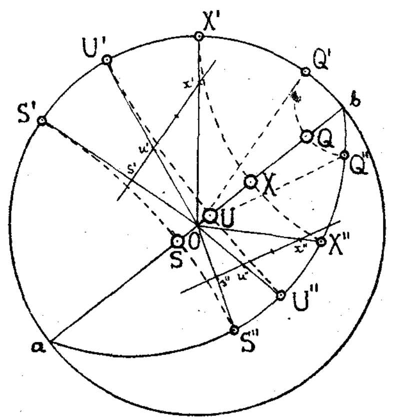
$$p:q:r=xq:xp:0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (68)$$

§ 7. Определение символов тригоналоидных кристаллов.

При выводе основной зависимости между гранями пояса в § 1 мы пересекаем грани нашего пояса некоторой плоскостью M (фиг. 1). Для этого, как указывалось, эта плоскость M не должна быть параллельна оси пояса.



Фиг. 28.



Фиг. 29.

Рассмотрим теперь случай, когда плоскость M, принимаемая за плоскость проекции, параллельно оси пояса. В таком случае гномостереографическая проекция оси пояса будет изображаться уже не дугой большого круга, но прямой линией ab, проходящей через центр проекции (фиг. 29). Меридианы всех граней, лежащих в таком поясе, будут сливаться друг с другом. Прямая пояса, каким бы мы способом ее ни проводили, не пересечет ни одного меридиана. Очевидно, что непосредственное определение символов в таком поясе указанным способом невозможно. Для того, чтобы определение стало возможным, необходимо, чтобы плоскость проекции M не была бы параллельна оси пояса. Для этого достаточно перейти к новой плоскости проекции. За новую плоскость проекции можно принять любую такую плоскость, по отношению к которой ось пояса будет не параллельна, но наклонена или даже, для достижения максимальной точности, вертикальна. Проще всего для этого прибегнуть к повороту (вращению) вокруг горизонтального диаметра ab, на который опирается проекция пояса (с которым проекция данного горизонтального пояса сливается). При таком вращении рассматриваемый пояс все время будет изображаться дугой большого круга, опирающейся на концы диаметра aƀ. Каждая грань пояса при вращении будет все время оставаться на одинаковом градусном расстоянии от концов диаметра aƀ, будет описывать малый круг. При работе на стереографической сетке Вульфа такое вращение осуществляется очень просто. Для этого, как известно, следует совместить данный пояс с меридианами сетки Вульфа. Параллели сетки Вульфа укажут пути, по которым будут при вращении перемещаться грани пояса. На чертеже фиг. 29 в горизонтальном поясе aƀ четыре грани Q, X, U и S. Пунктиром показаны те пути, по которым будут перемещаться проекции граней при вращении (параллели сетки Вульфа). Поворот может быть произведен или на некоторый произвольный угол, до совпадения проекции пояса с каким-нибудь произвольным меридианом сетки Вульфа (aS″U″X″Q″ƀ), или же поворот может быть произведен до совпадения пояса с окружностью проекции (a S′U′X′Q′ƀ). Как в первом, так и во втором случае, получаем пояс, для граней которого возможно определение символов с помощью прямой пояса.

Таким образом, определение символов в случае прохождения пояса через центр проекции, усложняется очень немногим. Указанный поворот можно рекомендовать не только при определении граней горизонтальных поясов, но и вообще поясов, близких к горизонтальности. Меридианы граней таких поясов, хотя и не будут сливаться друг с другом, как в случае горизонтальных поясов, но будут близки к совпадению, засечки на прямой пояса будут получаться либо очень острыми, либо близкими друг к другу и, таким образом, точность графических измерений будет значительно ниже.

На практике указанные случаи встречаются при определении символов граней тригональных и, вообще, тригоналоидных кристаллов. Тригональные кристаллы всегда так ориентируются, что единичная грань U (111) располагается у них в центре проекции. Поэтому при определении символов граней, первый пояс, каким бы из трех способов мы не воспользовались, как пояс проходящий через единичную грань, неминуемо пройдет через центр. Для определения точек Y и Z в этом поясе, будет необходимо прибегнуть к повороту, сделать первый пояс либо наклонным, либо сделать его даже вертикальным. Последнее не только увеличивает точность графической работы, но и просто несколько быстрее.

В тригоналоидных кристаллах, не тригональных, единичная грань U (111), хотя и не совпадает с центром, но располагается где-либо недалеко от центра, а потому первый пояс также должен будет пройти близь центра. Следовательно, и в этом случае для определений точек первого пояса лучше всего прибегать к вращению.

Во всех остальных случаях, когда единичная грань не располагается близь центра, лучше всего просто не проводить первого пояса так, чтобы он проходил бы близко от центра. Это всегда возможно, так как первый пояс можно проводить тремя способами (через (100), (010), или (001)). Согласно с этим, третий способ, способ проведения первого пояса через (001), не может быть рекомендован для тетрагоналоидных кристаллов. При их обычной установке грань (001) располагается или в центре или близ него (моноклинная и триклинная сингонии), а потому первый пояс окажется проходящим или через центр, или близ него.

---

§ 8. Определение символов при отсутствии основных и единичной граней.

До сих пор мы предполагали, что P, Q, R и U—три основные и единичная грани (фиг. 10). Как поступать в том случае, если P, Q, R и U просто четыре грани с некоторыми определенными символами, из которых никакие три не лежат в одном поясе? Как известно, такими гранями кристаллографический комплекс тоже вполне определяется. В этом случае для определения символов каких-нибудь граней X^1, X^2, X^3..... можно поступать двояко.

Можно по данным четырем граням (или большему или, при существовании определенной симметрии, меньшему их числу) найти положение трех основных и единичной грани. В простейших случаях, когда среди данных граней есть и основные грани и вообще символы данных четырех граней просты, этот путь является наиболее целесообразным. Однако в более сложных случаях определение положения основных и единичной грани становится затруднительным и тогда лучше прибегнуть к другому способу.

Можно данным четырем граням приписать временные символы (100), (010), (001) и (111). В этой временной установке определить символы граней X^1, X^2, X^3.... Зная первоначальные символы граней, временно принятых за основные и единичную, найти детерминант преобразования символов от временных к первоначальным. Пользуясь найденным детерминантом, найти по временным символам граней X^1, X^2 X^3..... их первоначальные символы.

Этим же путем можно итти, чтобы избежать неопределенности, когда первый пояс горизонтален. Так, в случае тригоналоидного кристалла, лежащей в центре или близь него грани (111) может быть приписан временный символ, не равный (111), и тогда первый пояс окажется уже не проходящим через центр, определение символов станет возможным и без усложнений, описанных в предыдущем параграфе. Однако проще все же прибегнуть к рекомендуемым в этом параграфе вращениям, чем к отысканию детерминанта и преобразованию символов.

Пусть символы данных четырех граней P, Q, R, U будут:

Буквенные обозначения	Первоначальные символы.	Временные символы.
P	$(p_1\, q_1\, r_1)$	(100)
Q	$(p_2\, q_2\, r_2)$	(010)
R	$(p_3\, q_3\, r_3)$	(001)
U	$(p_4\, q_4\, r_4)$	(111)

Ввиду того, что граням P, Q и R приписываются символы основных граней, искомый детерминант перехода от временных символов к постоянным, может быть представлен так:

$$\begin{vmatrix} xp_1 & yp_2 & zp_3 \\ xq_1 & yq_2 & zq_3 \\ xr_1 & yr_2 & zr_3 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (69)$$

где, x, y, и z — некоторые коэффициенты.

Преобразовывая с помощью приведенного детерминанта символы (100), (010) и (001), легко убедиться в его правильности. Коэффициенты x, y и z не трудно найти, зная, что единичная грань (111), после преобразования с помощью приведенного детерминанта, должна получить символ (p_4 q_4 r_4). Следовательно, должны быть верны следующие уравнения:

$$\left.\begin{array}{l} xp_1 + yp_2 + zp_3 = p_4 \\ xq_1 + yq_2 + zq_3 = q_4 \\ xr_1 + yr_2 + zr_3 = r_4 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

Из этих уравнений можно определить искомые коэффициенты x, y и z в детерминанте. Как известно, у системы неоднородных уравнений, подобной (70), каждое неизвестное равно дроби с общим знаменателем, равным определителю из коэффициентов при неизвестных. Числитель получается из знаменателя, если коэффициенты при определяемом неизвестном заменить соответственным известным. Например:

$$x = \begin{vmatrix} p_4 & p_2 & p_3 \\ q_4 & q_2 & q_3 \\ r_4 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}$$

Введем обозначения

$$(71) \ \ldots \ \begin{vmatrix} p_4 & p_2 & p_3 \\ q_4 & q_2 & q_3 \\ r_4 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = A \qquad \begin{vmatrix} p_1 & p_4 & p_3 \\ q_1 & q_4 & q_3 \\ r_1 & r_4 & r_3 \end{vmatrix} = B \ \ldots \ (72)$$

$$(73) \ \ldots \ \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_4 \\ r_1 & r_2 & r_4 \end{vmatrix} = C \qquad \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = D \ \ldots \ (74)$$

Тогда для неизвестных x, y, z получим значения

$$x = \frac{A}{D}, \qquad y = \frac{B}{D}, \qquad z = \frac{C}{D}.$$

Подставляя полученное в детерминант (69) и умножая каждый член этого детерминанта на D, окончательно находим

$$\begin{vmatrix} Ap_1 & Bp_2 & Cp_3 \\ Aq_1 & Bq_2 & Cq_3 \\ Ar_1 & Br_2 & Cr_3 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (75),$$

где A, B и C находятся из выражений (71), (72) и (73).

Выражение (75) является детерминантом, с помощью которого могут быть определены символы любых граней по найденным временным символам.

П р и м е р. Пусть даны 4 грани:

P (100), Q (131), R ($\bar{1}$02), U (112);

если приписать им временные символы

P (100), Q (010), R (001), U (111),

то детерминант преобразования символов от временных к первоначальным согласно формуле (75), будет:

$$\begin{vmatrix} A1 & B1 & C\bar{1} \\ A0 & B3 & C0 \\ A0 & B1 & C2 \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} A & B & \bar{C} \\ O & 3B & O \\ O & B & 2C \end{vmatrix} \quad \ldots \ldots (76)$$

Найдем A, B и C по формулам (71), (72) и (73):

$$A = \begin{vmatrix} p_4 & p_2 & p_3 \\ q_4 & q_2 & q_3 \\ r_4 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \bar{1} \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \bar{1} \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -(3-12) = 9,$$

$$B = \begin{vmatrix} p_1 & p_4 & p_3 \\ q_1 & q_4 & q_3 \\ r_1 & r_4 & r_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \bar{1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2,$$

$$C = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_4 \\ r_1 & r_2 & r_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5.$$

Подставляя найденные значения A, B, и C в выражение (76), получим

$$\begin{vmatrix} 9 & 2 & \bar{5} \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 10 \end{vmatrix}$$

Пользуясь найденным детерминантом, по любому временному символу легко найти первоначальный. Так для U (111) получим:

$$\begin{aligned} 9+2-5 &= 6 \\ 0+6+0 &= 6 \\ 0+2+10 &= 12. \end{aligned}$$

Отсюда искомый символ (6 : 6 : 12), или (112).

Для какой-либо грани (123) получим:

$$\begin{aligned} 1 \,.\, 9+2 \,.\, 2-3 \,.\, 5 &= -2 \\ 1 \,.\, 0+2 \,.\, 6+3 \,.\, 0 &= 12 \\ 1 \,.\, 0+2 \,.\, 2+3 \,.\, 10 &= 34, \end{aligned}$$

отсюда искомый символ ($\bar{2}$: 12 : 34) или ($\bar{1}$. 6 . 17).

§ 9. Техника применения метода.

В предыдущем были уже точно описаны приемы и правила определения символов. Здесь остается только дополнить предыдущее описание некоторыми практическими указаниями по технике применения метода.

Метод предполагает пользование стереографическими проекциями. Как и для всякой вообще кристаллографической работы и для применения настоящего метода безусловно наиболее удобно пользование сеткой Вульфа. В дальнейшем мы и будем предполагать, что работа ведется именно на этой сетке.

Приступая к определению символов, прежде всего необходимо выбрать первый, и этим самым, и второй пояса. В § 7 уже вскользь указывалось, что чем дальше отстоит поясной круг от центра, тем точнее проводятся меридианы граней на этом круге, тем, следовательно, точнее будут и результаты работы. Это следует иметь в виду при проведении первого пояса. Так в тетрагоналоидных кристаллах, где грань (001) располагается близ центра (или в центре), не следует проводить первый пояс через эту грань. [1])

Кроме приведенного соображения, при выборе способа проведения первого и второго пояса следует иметь в виду еще следующее. Грани второго пояса требуют для своего определения, если не особой прямой пояса, то во всяком случае особых меридианов. Отсюда следует, что, если среди других граней, подлежащих определению, будут присутствовать грани второго пояса, они потребуют проведения лишних линий. Поэтому, если возможно, во втором поясе следует не иметь граней, подлежащих определению. Если в одном из трех основных поясов нет граней, подлежащих определению, то при всех прочих равных условиях, этот пояс следует принимать за второй пояс, и сообразно с этим проводить первый. Проведение первого пояса должно быть произведено особенно тщательно, так как при всей дальнейшей работе этим поясом придется пользоваться. Остальные пояса можно вовсе не прочерчивать, отмечая только лишь точки их пересечений с первым поясом.

Следующей операцией является проведение прямой пояса. Выбор того, или иного способа проведения этой прямой (выбор варианта) должен опираться главным образом на следующее соображение. Если меридианы определяемых точек первого пояса расположены под небольшими (или близкими к 180°) углами к меридиану, параллельному прямой пояса, то засечки на прямой пояса будут получаться очень острыми, а потому мало точными (фиг. 25, 27). Обратно, если меридианы определяемых точек первого пояса расположены под большими (близкими к 90° и 270°) углами к прямой пояса, засечки получаются значительно точнее (фиг. 24, 26).

Отсюда следует, что прямую пояса следует выбирать таким образом, чтобы меридиан, параллельно которому проводится прямая, не образовывал бы, по возможности, малых углов с остальными меридианами.

Если во втором поясе есть грани, подлежащие определению, лучше всего прибегать ко второму варианту. При таком выборе, при определении граней второго пояса не придется проводить для них особой прямой пояса. Для этого следует только их определять по третьему варианту, пользуясь той же самой прямой.

Как известно, работа на сетке Вульфа совершенно избавляет от необходимости пользоваться какими бы то ни было чертежными инструментами.

Проведение прямой пояса, как прямой, параллельной некоторому фиксированному на чертеже направлению (меридиану), тоже просто осуществляется без всяких чертежных инструментов, но все же значительно проще и удобнее пользоваться линейкой. Линейка является настолько простым и распространенным инструментом, что применение ее в качестве вспомогательного прибора при работе на сетке можно только горячо рекомендовать.

---

[1]) Здесь имеется ввиду общепринятая установка. В федоровских установках близ центра может располагаться не обязательно грань (001).

Так как и прямая пояса может быть проведена на любом расстоянии от центра проекции, то для ее вычерчивания очень удобно пользоваться линейкой с параллельными между собою краями. Для этого, прикладывая один край линейки к меридиану, параллельно которому следует проводить нужную прямую пояса, прочерчиваем линию с помощью другого края линейки. Удобно иметь под рукою не одну, а две линейки, различной ширины, для того, чтобы была всегда возможность проводить прямую пояса на различном расстоянии от центра. Располагая прямую пояса достаточно близко к центру, мы всегда можем гарантировать себя от возможности получения засечек за пределами чертежа.

Следующую стадию работы—проведение меридианов граней фактически можно и не осуществлять. Действительно, меридианы нам необходимы только для того, чтобы получить точки их пересечений с прямой пояса. Эти точки можно наметить, не прочерчивая всего меридиана. Достаточно совместить проекцию грани и центр чертежа с основным меридианом сетки Вульфа (или с краем линейки) и сделать только лишь небольшую засечку на месте пересечения намеченного таким образом меридиана с прямой пояса. Когда засечки получены, измеряются полученные между ними отрезки. Можно, конечно, для этого пользоваться каким-нибудь масштабом и выражать определяемые длины цифрами взятого масштаба. Однако, проще определять только лишь относительные величины искомых отрезков. Действительно, во всех формулах, по которым определяются искомые индексы символов (см. формулы (42) — (68)) фигурируют лишь отношения отрезков, относительные их величины, а потому нет нужды измерять абсолютные длины. Для определения искомых отношений откладывается циркулем в большем отрезке меньший, определяется, сколько раз меньший отрезок заключается в большем. Если меньшим отрезком нельзя без остатка измерить больший, то полученным остатком измеряется меньший отрезок. Если и при этом измерении получим остаток, то этим последним остатком измеряем предыдущий. Так как отношение определяемых отрезков всегда рационально, то, продолжая измерения меньшим остатком большего, мы обязательно должны будем притти к делению без остатка. Последний остаток, целое число раз укладывающийся в предыдущем, будет общим наибольшим делителем взятых отрезков. Полученным таким образом общим делителем следует всегда для проверки измерить оба взятые первоначально отрезка: и меньший, и больший. Отношение полученных величин и должно будет послужить для определений индексов с помощью формул § 6. При этом можно пользоваться, как общими формулами (35) — (41), так и формулами, выписанными в этом параграфе для различных конкретных случаев. Пользование последними формулами проще, так как делает определение совершенно механическим. По чертежам (10 — 27) сравнением находится вариант, посредством которого ведется данное определение, после чего просто берется формула, отвечающая данному варианту. Три целые числа, полученные по той или иной формуле (42) — (68) и дадут искомый символ.

Определение символов всех последующих граней, когда одна из граней уже определена, значительно более просто. Определение каждой последующей грани сводится к получению только двух засечек на дуге первого пояса (точек пересечения его с третьим и четвертым поясом), двух засечек на проведенной раз-навсегда прямой пояса, измерению отрезков на этой прямой и применению раз-навсегда подобранной формулы (42—68). В частных случаях иногда бывает достаточным делать только одну засечку на дуге первого пояса и одну засечку на прямой пояса. Для граней первого пояса засечек на дуге этого пояса вовсе не приходится делать. Грани двух основных поясов, несовпадающих со вторым поясом, просто определяются общими методами. При этом также уменьшается число засечек, так как один из отрезков на прямой пояса получается или равным бесконечности (при первом варианте) или равным нулю (при втором варианте).

Грани основного пояса, совпадающего со вторым поясом, могут быть определены, как указывалось уже ранее, двояко: или применением проведения второго пояса или же с помощью особой прямой второго пояса. В тетрагоналоидных кристаллах вторыми поясами бывают пояса [100] и [010]. Они же в этих кристаллах горизонтальны или близки к горизонтальности. (Предполагается общепринятая установка). Согласно замечаниям § 7, для их определений необходимо будет пользоваться вращением. Это усложнит определение, а потому иногда выгоднее в этих случаях прибегать к изменению способа проведения второго пояса, избегая применять метод проведения особой прямой пояса.

§ 10. Решение обратной задачи.

Решение обратной задачи, т. е. задачи построения проекции грани X по ее символу, аналогично и в общем похоже на решение прямой задачи. Здесь также необходимо проведение первого и второго пояса и прямой пояса. При этом также можно пользоваться тремя различными способами проведения первых поясов и в каждом способе одним из двух вариантов проведения прямой пояса.

При решении прямой задачи, на прямой пояса измерялись отрезки sy и sz в первом варианте и qy и qz во втором (фиг. 6 и 7). При решении же обратной задачи эти отрезки необходимо построить, пользуясь данными индексами в символе p, q и r. Для этого необходимо, пользуясь формулой (35) для первого и (36) для второго варианта выразить искомые отрезки через символы.

Преобразовывая формулу (35), найдем:

(77) . . . . . $sz = (q:p) \cdot su$, $sy = (q:r) \cdot su$ . . . . . . (78)

эти выражения служат для построения отрезков на прямой пояса, проведенной по первому варианту.

Для второго варианта следует преобразовать формулу (36).

79) . . . . . . $qz = (p:q) \cdot qu$, $qy = (r:q) \cdot qu$ . . . . (80)

Далее, концы полученных отрезков sz и sy (или qz и qy во втором варианте), точки z и y, соединяем прямыми с центром проекции. Эти прямые, пересекаясь с первым поясным кругом, дадут вспомогательные точки Z и Y. Далее, лежащие во втором поясе основные грани соединяем дугами больших кругов с найденными Z и Y. Точка пересечения этих дуг X и будет гномостереографической проекцией грани X с данными индексами в символе p, q и r. При этом индекс q отвечает кристаллографической оси, пересекающей основную грань, через которую проходит первый пояс; индексы p и r отвечают осям, пересекающим основные грани, лежащие во втором поясе.

Перейдем к конкретным правилам построения грани по ее символу. Пусть P, Q и R гномостереографические проекции трех основных граней (100), (010) и (001) (фиг. 10); U — проекция единичной грани (111). Требуется построить проекцию грани X, символ которой (p q r), где p — индекс, отвечающий первой оси, q — второй, r — третьей. Проводим дугу большого круга через единичную грань U и одну из основных граней — P, Q или R. Это будет первый пояс. Через две другие основные грани проводим второй пояс. В пересечении первого и второго пояса получим вспомогательную грань S с двумя единицами в символе. Проводим прямую (прямую пояса), параллельную меридиану или основной грани, лежащей в первом поясе (первый вариант) или грани с двумя единицами S (второй вариант). Пересекаем проведенную прямую меридианами граней, лежащих в первом поясе. На прямой пояса, между точками пересечения этой прямой с двумя непараллельными этой прямой меридианами, получим отрезок su, в первом варианте или pu, qu или ru во втором. Пользуясь полученным отрезком и данными индексами символа определяемой грани X, строим на прямой пояса отрезки sy и sz (в первом варианте) или py, qy или ry и pz, qz или rz во втором варианте. В зависимости от выбранного способа проведения первого пояса и в зависимости от выбранного варианта для построений этих отрезков, получаются различные выражения.

Первый способ (фиг. 11). Первый пояс проведен через грань U (111) и P (100). Второй, следовательно, через Q (010) и R (001).

Первый вариант (фиг. 12). Прямая пояса параллельна меридиану P (100). На прямой пояса строим отрезки

(81) . . . $sy = \frac{p}{r} \cdot su = (p : r) \cdot su$, $sz = \frac{p}{q} \cdot su = (p : q) \cdot su$ . . (82)

Второй вариант (фиг. 13). Прямая пояса параллельна меридиану грани с двумя единицами S (011).

(83) . . . . . $py = (r : p) \cdot pu$ $pz = (q : p) \cdot pu$ . . . . . . (84)

Второй способ (фиг. 17). Первый пояс проведен через грани U (111) и Q (010).

Первый вариант (фиг. 18). Прямая пояса параллельна меридиану Q (010).

(85) . . . . $sy = (q : r) \cdot su$ $sz = (q : p) \cdot su$ . . . . (86)

Второй вариант (фиг. 19). Прямая пояса параллельна меридиану. S (101).

(87) . . . . . . $qy = (r : q) \cdot qu$, $qz = (p : q) \cdot qu$ . . . . . . (88).

Третий способ (фиг. 23). Первый пояс проведен через грани U (111) и R *(001)*.

Первый вариант (фиг. 24). Прямая пояса параллельна меридиану R (001).

(89) . . . . $sy = (r : q) \cdot su$, $sz = (r : p) \cdot su$ . . . . . . (90).

Второй вариант (фиг. 25). Прямая пояса параллельна меридиану S (110).

(91) . . . . $ry = (q : r) \cdot ru$, $rz = (p : r) \cdot ru$ . . . . (92).

Полученные отрезки откладываем на прямой пояса от меридиана грани S с двумя единицами в первом варианте и от меридиана основной грани во втором варианте. При этом положительные отрезки откладываем в ту же сторону, в какую расположен меридиан единичной грани. Отрицательные отрезки откладываем в обратном направлении. Концы построенных отрезков определяют положение точек y и z на прямой пояса. Найденные точки y и z соединяем прямыми с центром проекции. Эти прямые (меридианы), пересекаясь с первым поясом, дадут вспомогательные точки Y и Z. Соединяем эти точки Y и Z дугами больших кругов с основными гранями, лежащими во втором поясе. При этом точку Y соединяем всегда с низшей по наименованию основной гранью (с первой — P (100) или, если ее во втором поясе нет, то со второй — Q (010). Точку Z всегда соединяем с высшей по наименованию основной гранью (с третьей R (001) или, если ее во втором поясе нет, со второй Q (010).

Таким образом в первом способе соединяем:

Y с Q (010), Z с R (001).

Во втором способе соединяем

Y с P (100), Z с R (001).

В третьем способе соединяем

Y с P (100), Z с Q (010).

Точка пересечения проведенных дуг и будет гномостереографической проекцией определяемой грани X (p q r).

В частных случаях, при построениях граней второго пояса, или вообще граней с нулем в символе, построение может исполняться таким образом: проводим прямую пояса или параллельную меридиану одной из основных граней (первый и второй варианты) или же параллельно меридиану грани S с двумя единицами (третий вариант). Проводим меридианы граней определяемого пояса. Пересекаясь с двумя непараллельными прямой пояса меридианами, прямая пояса определит некоторый отрезок между ними (ps, qs или rs в первом и втором варианте или же qr, pr или pq в третьем варианте).

Пользуясь найденным отрезком и символом искомой грани X (p q r), на той же прямой пояса строим некоторый вспомогательный отрезок px, qx или rx, определяемый из следующего.

Первый случай (фиг. 11). Второй пояс проходит через грани Q (010) и R (001). (Определение граней пояса [100] с символами (0 q r).).

Первый вариант (фиг. 14). Прямая пояса параллельна меридиану Q (010). Искомый отрезок

$$rx = (q : r) \cdot rs \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (93).$$

Второй вариант (фиг. 15). Прямая пояса параллельна меридиану R (001)

$$qx = (r : q) \cdot qs \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (94).$$

Третий вариант (фиг. 16). Прямая пояса параллельна меридиану S (011). Из чертежа 16 видно, что

$$xq - xr = rq.$$

Принимая еще *во внимание, что*

$$xq = -qx \quad ; \quad xr = -rx \quad \text{и} \quad rq = -qr,$$

пользуясь формулой (50), находим:

$$(95) \ldots rx = -\frac{q}{q-r} \cdot rq \text{ и кроме того } qx = \frac{r}{r-q} \cdot qr \ldots (96).$$

Второй случай (фиг. 17). Второй пояс проходит через грани P (100) и R (001). (Определение граней пояса [010] с символами (p 0 r).

Первый вариант (фиг. 20). Прямая пояса параллельна меридиану P (100).

$$rx = (p : r) \cdot rs \ldots (97)$$

Второй вариант (фиг. 21). Прямая пояса параллельна меридиану R (001).

$$px = (r : p) \cdot ps \ldots (98)$$

Третий вариант (фиг. 22). Прямая пояса параллельна меридиану грани S (101). Принимая во внимание, что

$$xp - xr = rp,$$

находим, пользуясь формулой (59) и соблюдая правило знаков:

$$(99) \ldots rx = \frac{p}{p-r} \cdot rp \quad \text{и} \quad px = \frac{r}{r-p} \cdot pr \ldots (100).$$

Третий случай (фиг. 23). Второй пояс проходит через грани P (100) и Q (010). (Определение граней пояса [001] с символами (p q 0)).

Первый вариант (фиг. 26). Прямая пояса параллельна меридиану P (100).

$$qx = (p : q) \cdot qs \ldots (101).$$

Второй вариант (фиг. 27). Прямая пояса параллельна меридиану Q (010).

$$px = (q : p) \cdot ps \ldots (102).$$

Третий вариант (фиг. 28). Прямая пояса параллельна меридиану грани S (110). Ввиду того, что

$$xp - xq = qp \quad \text{или} \quad xq - xp = qp,$$

формулу (68) можно преобразовать таким образом:

$$(103) \ldots qx = \frac{p}{p-q} qp \quad \text{или} \quad px = \frac{q}{p-q} pq \ldots (104).$$

Полученный отрезок px, qx или rx откладываем на прямой пояса от меридиана основной грани. При этом положительные отрезки откладываем *в сторону* меридиана другой грани (S в первом и втором варианте, или P, Q, или R в третьем), а отрицательные в обратном направлении. Конец построенного отрезка определит на прямой пояса вспомогательную точку x, которую соединяем прямой линией с центром проекции. Точка пересечения этой прямой с дугой второго пояса и будет искомая гномостереографическая проекция грани X с нулем в символе.

§ 11. Построение грани по данному символу при отсутствии основных и единичной граней.

Пусть положение основных и единичной грани неизвестно. Вместо этих граней присутствуют четыре грани, не образующие параллельных ребер пересечения P, Q, R и U с символами:

$$P\ (p_1\ q_1\ r_1), \qquad Q\ (p_2\ q_2\ r_2), \qquad R\ (p_3\ q_3\ r_3), \qquad U\ (p_4\ q_4\ r_4).$$

Требуется найти гномостереографическую проекцию какой-либо грани X с символом $X\ (p\ q\ r)$.

Как и при решении прямой задачи (§ 8), решение может быть достигнуто двояким путем.

В простейших случаях по данным граням P, Q, R и U легко построить положение трех основных и единичной граней, после чего построение грани X (p q r) исполняется способами, указанными в предыдущем параграфе.

В более сложных случаях можно данным граням P, Q, R и U приписать временные символы (100), (010), (001) и (111). Определить детерминант перехода от первоначальных символов к временным. С помощью полученного детерминанта найти временные символы $(p^1\ q^1\ r^1)$ определяемой грани X (p q r). Пользуясь найденными временными символами построить методами, описанными в предыдущем, положение искомой грани X.

Пусть детерминант, необходимый для перехода от первоначальных символов (p q r) к временным символам $(p^1\ q^1\ r^1)$ будет выражаться таким образом

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (105)$$

Определим элементы этого детерминанта. Из того, что грань P $(p_1\ q_1\ r_1)$ получает временный символ (100), следует

$$y_1\ p_1 + y_2\ q_1 + y_3\ r_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (106)$$
$$z_1\ p_1 + z_2\ q_1 + z_3\ r_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (107)$$

Грань Q $(p_2\ q_2\ r_2)$ получает временный символ (010). Отсюда следует, что

$$x_1\ p_2 + x_2\ q_2 + x_3\ r_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (108),$$
$$z_1\ p_2 + z_2\ q_2 + z_3\ r_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (109).$$

Грань R $(p_3\ q_3\ r_3)$ получает временный символ (001). Для этого случая детерминант (105) дает

$$x_1\ p_3 + x_2\ q_3 + x_3\ r_3 = 0 \ldots\ldots\ldots (110),$$
$$y_1\ p_3 + y_2\ q_3 + y_3\ r_3 = 0 \ldots\ldots\ldots (111).$$

В виду того, что грань U $(p_4\ q_4\ r_4)$ во временной установке принимается за единичную, пользуясь детерминантом (105), находим

$$x_1\ p_4 + x_2\ q_4 + x_3\ r_4 = y_1\ p_4 + y_2\ q_4 + y_3\ r_4 = z_1\ p_4 + z_2\ q_4 + z_3\ r_4 \quad (112)$$

Решая совместно найденные уравнения, найдем неизвестные

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ z_1,\ z_2 \text{ и } z_3.$$

Введем обозначения. [1])

---

[1]) Эти обозначения те же, что и в § 8.

$$\begin{vmatrix} p_4 & p_2 & p_3 \\ q_4 & q_2 & q_3 \\ r_4 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (71),$$

$$(72) \ldots\ldots \begin{vmatrix} p_1 & p_4 & p_3 \\ q_1 & q_4 & q_3 \\ r_1 & r_4 & r_3 \end{vmatrix} = B, \qquad \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_4 \\ r_1 & r_2 & r_4 \end{vmatrix} = C \ldots\ldots (73).$$

Для определяемых элементов детерминанта получаются следующие выражения:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} q_2 & q_3 \\ r_2 & r_3 \end{vmatrix}}{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (113),$$

$$(114) \ldots\ldots x_2 = \frac{-\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ r_2 & r_3 \end{vmatrix}}{A}, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix}}{A} \ldots\ldots (115);$$

$$y_1 = \frac{-\begin{vmatrix} q_1 & q_3 \\ r_1 & r_3 \end{vmatrix}}{B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (116),$$

$$(117) \ldots\ldots y_2 = \frac{\begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ r_1 & r_3 \end{vmatrix}}{B}, \qquad y_3 = \frac{-\begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ q_1 & q_3 \end{vmatrix}}{B} \ldots\ldots (118);$$

$$z_1 = \frac{\begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}}{C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (119),$$

$$(120) \ldots\ldots z_2 = \frac{-\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}}{C}, \qquad z_3 = \frac{\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}}{C} \ldots\ldots (121).$$

Пример. Пусть даны четыре грани P (101), Q (021), R $(\bar{2}01)$ и U (012). Припишем им временные символы P (100), Q (010), R (001) и U (111) и найдем детерминант преобразования символов от первоначальных к новым. Прежде всего по формулам (56), (57) и (58) находим A, B и C.

$$A = \begin{vmatrix} p_4 & p_2 & p_3 \\ q_4 & q_2 & q_3 \\ r_4 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \bar{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\ (1-4) = 6,$$

$$B = \begin{vmatrix} p_1 & p_4 & p_3 \\ q_1 & q_4 & q_3 \\ r_1 & r_4 & r_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \bar{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \bar{2} & \bar{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (0+3) = 3,$$

$$C = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_4 \\ r_1 & r_2 & r_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3.$$

По формулам (92) — (100) определяем:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \qquad y_1 = \frac{-\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = 0,$$

$$x_2 = \frac{-\begin{vmatrix} 0 & \bar{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}, \qquad y_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \bar{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3}{3},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \bar{2} \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}; \qquad y_3 = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & \bar{2} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{3} = 0.$$

$$z_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-2}{3},$$

$$z_2 = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-1}{3}, \qquad z_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2}{3}.$$

Отсюда находим для детерминанта следующее выражение:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\bar{1}}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3}{3} & 0 \\ \frac{\bar{2}}{3} & \frac{\bar{1}}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

Избавляясь от дробей, окончательно получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & \bar{1} & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ \bar{2} & \bar{1} & 2 \end{vmatrix}$$

Пользуясь найденным детерминантом для построения любой грани данного символа, мы легко находим ее временный символ. Напр., грань X (323) получит временный символ ($7\ 6\ \bar{2}$):

$$\begin{aligned} 1 \cdot 3 + \bar{1} \cdot 2 + 2 \cdot 3 &= 7, \\ 0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 3 &= 6, \\ \bar{2} \cdot 3 + \bar{1} \cdot 2 + 2 \cdot 3 &= \bar{2}. \end{aligned}$$

Пользуясь временным, символом строим проекцию искомой грани, как указано в § 10.

§ 12. Сравнение с другими методами.

В настоящее время известно много отдельных методов определений символов. Если отбросить метод определения символов на данном кристалле, на модели или на рисунке, непосредственно на глаз, то все остальные можно разбить на две группы: методы вычислительные и методы графические. Здесь мы не будем сравнивать описанный графический метод с вычислительными методами, так как такое сравнение повело бы к сравнению графических и вычислительных методов вообще. Такое сравнение далеко выходило бы из рамок настоящей работы и не являлось бы в конце концов рациональным, поскольку графические и вычислительные методы применяются, вообще говоря, для различных целей. Соответственно с двумя основными способами проектирования кристаллов, все вообще графические методы кристаллографической работы распадаются на две группы. Одни методы употребляются в тех случаях, когда кристалл проектируется с помощью гномостереографических (или стереографических) проекций, другие—когда кристалл изображается в гномонических (или линейных) проекциях.

Соответственно с этим и графические методы определения символов тоже можно разбить на две группы. Одни служат для работы в стереографических проекциях, другие употребляются при наличии гномонической проекции.

Описанный выше метод принадлежит к первой группе, а потому мы совсем не будем его сравнивать с методами, приспособленными к гномоническим проекциям. Такое сравнение повело бы к оценке сравнительных достоинств и недостатков стереографической и гномонической проекций вообще, так сказать органически присущим этим проекциям, вне зависимости от тех или иных методов определения символов. Такое сравнение выходило бы за пределы поставленной нами задачи.

Таким образом остается рассмотреть только графические методы определения символов, употребляющиеся при работе с помощью стереографических проекций. Главнейшими такими методами являются: 1) способ поясов, 2) способ косинусов, 3) способ составляющих.

Ко всякому новому методу, новому способу научного исследования предъявляются всегда два типа требований: требования теоретического характера и практические требования. Основным требованием первого типа является простота теоретических предпосылок. Простота работы данным методом, простота практического применения часто не бывает связана с простотой теоретических предпосылок. Благодаря этому бывает, что те или иные методы, хотя и весьма просто применяемые на практике, но построенные на сложном теоретическом фундаменте, оказываются не получающими распространения [1]). Применение подобных методов является обычно роскошью, доступной только специалистам. Наоборот, методы, значительно более сложные на практике, но основанные на небольшом числе простых теоретических предпосылок, получают широкое распространение, несмотря на то, что узкие специалисты данной области ими и не пользуются. Отсюда видно, что очень трудно сравнивать различные методы в целом, говорить, что тот или иной метод в целом лучше, или хуже другого. Для одного круга исследователей данный метод может быть более удобен, чем какой-либо иной, для другого же круга исследователей этот метод может оказаться совершенно неприемлемым. Поэтому следует всегда отдельно сравнивать теоретические основы различных методов и совершенно особо приемы практической работы.

Способ поясов.

Как известно определение символов по способу поясов основано на законе Вейсса, по которому каждая грань может рассматриваться лежа-

[1]) Как пример, можно указать на кристаллохимический анализ Е. С. Федорова.

щей на пересечении двух каких-либо поясов. Проводя через данные грани те, или иные пояса, получаем в их пересечении возможные грани, которые также можно использовать для проведения новых поясов. Сеть поясов всегда можно так развить, что определяемая грань окажется лежащей одновременно в двух поясах. По символам этих двух поясов легко найти и символы определяемой грани. Символы же поясов находятся по символам граней, лежащих в данных поясах. Таким образом теоретическая база этого способа очень проста; способ опирается только лишь на одну несложную теорему о зависимости между символами грани и параллельного этой грани ребра.

Во всех простейших случаях способ поясов является безусловно самым простым и удобным и в практическом отношении. Особенно просто применение этого способа при наличии нескольких готовых стереографических проекций различных комплексов [1]) с расставленными раз-навсегда символами различных возможных граней, лежащих на пересечениях тех или иных поясов. Пользуясь такими шаблонами с проведенными поясами и надписанными символами, простым сравнением шаблона со стереографической проекцией определяемого кристалла, находим искомые символы. Однако, если для того, чтобы данная грань оказалась лежащей на пересечении двух поясов, приходится проводить сколько-нибудь значительное число различных поясов, метод чрезвычайно усложняется и делается исключительно кропотливым. В этих случаях, как известно, метод поясов становится значительно более сложным, чем все другие методы определения. В виду этой полной зависимости сложности метода от сложности символа определяемой грани, метод может с успехом применяться лишь на отдельных частных примерах, а потому в общем случае не может, конечно, конкурировать со всеми другими методами определений. Это избавляет от необходимости подробных сравнений предлагаемого метода с методом поясов, поскольку далее будет проведено сравнение предлагаемого метода с другими методами. Такое сравнение было бы к тому же чрезвычайно затруднено тем, что сложность метода поясов варьирует в зависимости от сложности символа неизвестной определяемой грани.

Для сравнения простоты практического применения предлагаемого метода с другими, разобьем работу с помощью того или иного метода на отдельные манипуляции, последовательное применение которых и приводит к решению задачи. Уже общее количество манипуляций, проделываемых при работе тем или иным методом, позволяют судить о простоте или сложности этого метода. Кроме того отдельные манипуляции того или иного метода легче сравнивать друг с другом, чем самые методы в целом. Перечислим отдельные моменты предлагаемого метода. (Работа ведется на сетке Вульфа, сообразно указаниям § 6 и § 9). Для примера будем пользоваться первым вариантом (фиг. 12).

1) Совмещение граней U и P с одним из меридианов сетки Вульфа. 2) Прочерчивание первого пояса UP. 3) Совмещение граней Q и R с меридианом. 4) Отметка точки S на пересечении этого меридиана с первым поясом UP. **5**) Совмещение граней Q и X с меридианом. **6**) Отметка точки Y на пересечении этого меридиана с первым поясом UP. **7**) Совмещение граней R и Q с меридианом. **8**) Отметка точки Z на пересечении этого меридиана с первым поясом. 9) Совмещение грани P и центра чер-

---

[1]) Тетрагоналоидный, тригоналоидный и гексагоналоидный.

тежа O с краем линейки. 10) Прочерчивание прямой пояса zy. 11) Совмещение грани U с основным меридианом (или экватором) сетки Вульфа. 12) Отметка точки U на пересечении этого меридиана с прямой пояса. 13) Совмещение грани S с основным меридианом (или экватором) сетки Вульфа. 14) Отметка точки s на пересечении этого меридиана с прямой пояса. **15**) Совмещение грани Y с основным меридианом. **16**) Отметка точки y. **17**) Совмещение грани Z с основным меридианом. **18**) Отметка точки z. **19**) Определение на прямой пояса с помощью циркуля отношения su : sy (в первом варианте или qy : qu во втором варианте). **20**) Определение на прямой пояса с помощью циркуля отношения su : sz (или qz : qu во втором варианте). **21**) Определение индексов символа с помощью формулы (35—68).

Итого для полного определения символа грани необходимо 21 манипуляция. Такое количество манипуляций необходимо, однако, только для нахождения символа первой грани; для определения следующих граней, когда один символ уже найден, количество манипуляций сокращается до 11. (Эти манипуляции помечены в списке жирным шрифтом).

Все манипуляции можно классифицировать на 6 групп:

1) 9 манипуляций совмещения (1, 3, **5**, **7**, 9, 11, 13, **15**, **17**);
2) 7 манипуляций отметок точек (4, **6**, **8**, 12, 14, **16**, **18**);
3) 1 манипуляция проведения прямой с помощью линейки (10);
4) 1 манипуляция проведения дуги (2);
5) 2 манипуляции определения отношения отрезков (**17**, **18**);
6) 1 манипуляция пользования формулой (**21**).

Способ косинусов.

Как известно, определение символов по способу косинусов основано на формуле:

$$p : q : r = \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_0} : \frac{\cos\beta}{\cos\beta_0} : \frac{\cos\gamma}{\cos\gamma_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (122)$$

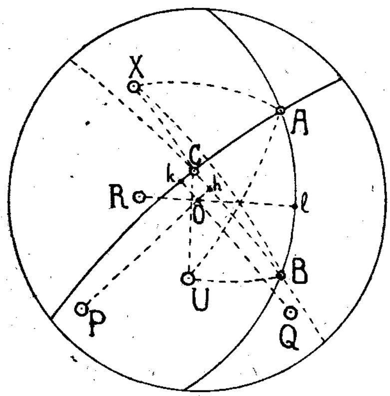
Здесь p, q и r — индексы определяемой грани, α_0, β_0 и γ_0 — углы между нормалью к единичной грани U и кристаллографическими осями [100], [010] и [001]; α, β и γ — углы между нормалью к определяемой грани X и теми же осями [100], [010], [001]. Вывод этой формулы чрезвычайно прост, базируется на законе Гаюи и, таким образом, теоретическая основа способа косинусов безусловно проще теоретических основ всех других методов, в том числе и предлагаемого метода. В этом неоспоримое преимущество способа косинусов, преимущество, благодаря которому этот способ приобрел очень большую популярность. Однако, применение этого способа для практической работы значительно сложнее и кропотливее.

При работе на стереографической сетке прежде всего возникает предварительная задача нахождения проекций кристаллографических осей, после чего следует довольно кропотливые операции измерений углов (α, β, γ, α_0, β_0, γ_0), определений косинусов найденных углов, вычислений отношений этих косинусов.

Разобьем все операции, необходимые для определения символа грани X по способу косинусов, на отдельные манипуляции (фиг. 30).

1) Совмещение грани R с экватором сетки Вульфа. 2) Отсчет по экватору 90° и отметка полученной точки *l*. 3) Прочерчивание экватора

грани R (дуги AlB). 4) Совмещение Q с экватором сетки Вульфа. 5) Отсчёт 90° и отметка точки k. 6) Прочерчивание экватора грани Q (дуги ACk). (В пересечении дуги AlB и ACk получим проекцию кристаллографической оси A). 7) Совмещение P с экватором сетки Вульфа. 8) Отсчет 90° и отметка точки h. 9) Отметка на экваторе грани P (на дуге ChB) точек B и C на пересечении с дугами AlB и ACk. (Полученные точки B и C—проекции кристаллографических осей). 10) Совмещение единичной грани U и оси A с одним из меридианов сетки Вульфа. 11) Измерение угла между U и A (α_0). 12) Совмещение единичной грани U и оси B с одним из меридианов. 13) Измерение угла между U и B (β_0). Совмещение U и C с одним из меридианов. 15) Измерение угла между U и C (γ_0). **16**) Совмещение определяемой грани X оси A с одним из меридианов сетки Вульфа. **17**) Измерение угла между X и A (α). **18**) Совмещение X и B. **19**) Измерение угла между X и B (β). **20**) Совмещение X и C. **21**) Измерение угла между X и C (γ). **22**) Взятие косинуса угла α_0. **23**) Взятие косинуса угла β_0. **24**) Взятие косинуса угла γ_0.**25**) Взятие косинуса угла α. **26**) Взятие косинуса угла β. **27**) Взятие косинуса угла γ. **28**) Определение отношения $\cos\alpha : \cos\alpha_0$. **29**) Определение отношения $\cos\beta : \cos\beta_0$. **30**) Определение отношения $\cos\gamma : \cos\gamma_0$. **31**) Определение индексов с помощью формулы (122).



Фиг. 30.

Итого 31 манипуляция для определения первой грани и по 13 манипуляций при последующих определениях. (Они помечены жирным шрифтом). Таким образом, общее количество манипуляций больше, чем в предлагаемом методе.

Все манипуляции можно разбить на 8 групп.

1) 9 манипуляций совмещения (1, 4, 7, 10, 12, 14, **16, 18, 20**);
2) 1 манипуляция отметки точки (9);
3) 3 манипуляции отсчетов углов по 90° (2, 5, 8);
4) 2 манипуляции проведения дуг (3, 6);
5) 3 манипуляции определеиия отношения косинусов (**28, 29, 30**);
6) 1 манипуляция пользования формулой (**31**);
7) 6 манипуляций измерений углов (11, 13, 15, **17, 19, 21**):
8) 6 манипуляций взятия косинусов (22, 23, 24, **25, 26, 27**).

Таким образом, манипуляции разнообразнее, чем в предлагаемом методе.

Сравним эти группы с группами манипуляций предлагаемого метода. Первые группы количественно одинаковы у обоих методов. Качественно манипуляции совмещения несколько сложнее у метода косинусов, так как в этом способе больше совмещений с дугами сетки Вульфа (шесть вместо четырех). Такие же совмещения несколько сложнее, чем совмещения с прямыми сетки (основным меридианом или экватором).

Группы 2 и 3 способа косинусов можно по сложности приравнять к группе 2 предлагаемого метода. Впрочем, строго говоря, манипуляция отсчета 90°, как заключающая в себе последующую отметку точки (l, k или h) безусловно сложнее отметок двух точек.

Группа 4 способа косинусов сложнее совокупности групп 3 и 4 предлагаемого метода, так как проведение дуги сложнее прочерчивания прямой.

Группа 5 способа косинусов и качественно, и количественно безусловно сложнее группы 5 предлагаемого метода.

Группа 6 способа косинусов сложнее аналогичной группы 6 предлагаемого метода, так как в последнем случае приходится иметь дело с отношениями простых целых чисел, тогда как в первом случае полученные в формуле цифры нужно еще подогнать под отношения целых чисел.

Таким образом, первые 6 групп способа косинусов оказываются в своей совокупности сложнее всех шести групп предлагаемого метода и группы 7 и 8 способа косинусов остаются уже совсем ничем не компенсироваными.

Таким образом, весьма сложные и кропотливые манипуляции измерений углов и определений их косинусов оказываются тем минимумом избытка сложности, которым метод косинусов обладает по сравнению с предлагаемым методом.

Из всех приведенных сопоставлений видно, что применение способа косинусов значительно сложнее применения предлагаемого способа.

Способ составляющих.

Способ составляющих опирается на следующую формулу:

$$p : q : r = (\xi : \xi_0) : (\eta : \eta_0) : (\zeta : \zeta_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (123)$$

Здесь

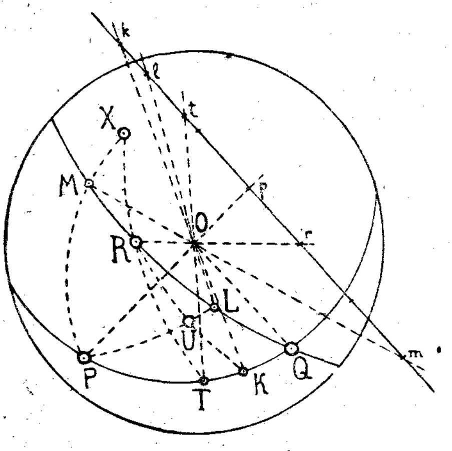
$$\xi, \eta \text{ и } \zeta$$

составляющие (координаты любой точки) нормали к определяемой грани, в полярной системе координат (т. е. такой, оси которой перпендикулярны координатным плоскостям основной системы). ξ_0, η_0 и ζ_0 — составляющие нормали к единичной грани в той же полярной системе координат. Вывод этой формулы сравнительно сложен, благодаря довольно запутанному чертежу и большому числу различных, фигурирующих в выводе величин. При этом для вывода необходимо пользоваться формулой косинусов (122). Таким образом теоретические предпосылки этого способа довольно сложны и это является его крупным недостатком. Как известно практическое применение этого способа очень просто и удобно при пользовании гномическими проекциями. В стереографических проекциях пользование формулой (123) для определений индексов значительно сложнее. Здесь мы рассмотрим только упрощенное применение этого способа, основанное на пользовании теоремой проф. О. Аншелеса.

Даны три основные грани P, Q и R (фиг. 31). U — единичная грань, X — определяемая. Определение можно разбить на следующие отдельные манипуляции:

1) Совмещение P и Q с одним из меридианов сетки Вульфа. 2) Прочерчивание этого меридиана. 3) Совмещение R и U с одним из меридианов. 4) Отметка точки K на пересечении этого меридиана с дугой PQ. 5) Совмещение R и X с одним из меридианов. 6) Отметка точки T на пересечении этого меридиана с дугой PQ. 7) Совмещение Q и центра с краем линейки. 8) Прочерчивание по линейке прямой пояса (mk), параллельной меридиану OQ. 9) Совмещение P (и центра) с основным мери-

дианом (или экватором) сетки Вульфа. 10) Отметка точки p на пересечении этого меридиана (или экватора) с прямой пояса. 11) Совмещение K с основным меридианом. 12) Отметка точки k на пересечении этого меридиана с прямой пояса. **13**) Совмещение T с основным меридианом. **14**) Отметка точки t на пересечении этого меридиана с прямой пояса. **15**) Определение циркулем на прямой пояса (mk) отношения:



Фиг. 31.

$$pk : pt = \xi : \xi_0; \quad (\eta : \eta_0 = 1).$$

16) Совмещение Q и R с одним из меридианов. 17) Прочерчивание этого меридиана. 18) Совмещение P и U с одним из меридианов. 19) Отметка точки L на пересечении этого меридиана с дугой QR. **20**) Совмещение P и X с одним из меридианов. **21**) Отметка точки M на пересечении этого меридиана с дугой QR. 22) Совмещение R (и центра) с основным меридианом (или экватором) сетки Вульфа. 23) Отметка точки r на пересечении этого меридиана (или экватора) с прямой пояса. 24) Совмещение L с основным меридианом (или экватором). 25) Отметка точки l на его пересечении с прямой пояса. **26**) Совмещение M с основным меридианом (или экватором). **27**) Отметка точки m на его пересечении с прямой пояса. **28**) Определение циркулем на прямой пояса mk отношения отрезков:

$$rl : rm = \zeta : \zeta_0; \quad (\eta : \eta_0 = 1).$$

29) Пользование формулой для окончательного определения индексов

$$p : q : r = \frac{\xi}{\xi_0} : \frac{\eta}{\eta_0} : \frac{\zeta}{\zeta_0} = \frac{pk}{pt} : 1 : \frac{rl}{rm}.$$

Итого 29 манипуляций, из которых 11 необходимы при всех последующих определениях (эти манипуляции отмечены жирным шрифтом). Таким образом общее число манипуляций больше, чем в предлагаемом методе. Кроме того, по техническим соображениям часто нельзя бывает ограничиваться одной прямой пояса mk. Обычно приходится проводить для каждого пояса (PQ и QR) отдельную прямую пояса (не обязательно параллельно OQ). Это еще более усложняет метод.

Все манипуляции разбиваются на 6 групп:

1) 13 манипуляций совмещения (1, 3, **5**, 7, 9, 11, **13**, 16, 18, **20**, 22, 24, **26**).

2) 10 манипуляций отметки точек (**4**, **6**, 10, 12, **14**, 19, **21**, 23, 25, **27**);

3) 1 манипуляция проведения прямой с помощью линейки (8);

4) 2 манипуляции проведения дуг (2, 17);

5) 2 манипуляции определений отношений отрезков (**15**, **28**);

6) 1 манипуляция пользования формулой (**29**).

Сравнивая эти группы с группами манипуляций предлагаемого метода, видим, что оба метода разбиваются на одинаковое число качественно одинаковых групп. Однако, только группы 3, 5 и 6 заключают одинаковое у обоих методов количество манипуляций. В остальных группах преимущество на стороне предлагаемого метода. Нужно заметить, что в вышеописанном упрощенном виде, когда сравниваемый метод становится в сущности вариацией предлагаемого метода, метод составляющих никогда и никем не применяется. Обычно производится значительно большее количество манипуляций, а сам метод применяется лишь для частного случая, когда две основные грани (P и Q) расположены на окружности проекции.

Zusammenfassung.

Wollen wir zulassen: P, Q und R sind gnomostereographische Projektionen der drei Grundflächen (100), (010) und (001) (Fig. 10); U—Projektion der Fläche (111). Für die Bestimmung des Symbols einer gewissen Fläche, die in der Projektion mit dem Punkte X bezeichnet ist, verfahren wir folgendermassen: wir ziehen den Bogen des grossen Kreises (die erste Zone) durch die Fläche U (111) und durch die eine der Grundflächen. Wir können drei Bestimmungsarten bekommen; es kommt darauf an, durch welche von diesen drei Grundflächen der Bogen gezogen wird. Die erste Art — der Bogen wird durch P (100) gezogen (Fig. 11); die zweite Art — durch Q (010) (Fig. 17); die dritte Art — durch R (001) (Fig. 23). Wir ziehen jetzt den Bogen (die zweite Zone) durch die zwei anderen Grundflächen, die in der ersten Zone nicht ligen (QR — Fig. 11, PR — Fig. 17; PQ — Fig. 23). Bei der Durchschneidung der ersten und der zweiten Zone bekommen wir die Hilfsfläche S mit zwei Einheiten im Symbol. (S (011) — Fig. 11, S (101) — Fig. 17, S (110) — Fig. 23). Ziehen wir jetzt die Bögen (die dritte und die vierte Zone) durch die Fläche X, die wir bestimmen, und durch dieselben Grundflächen, durch welche schon die zweite Zone gezogen worden ist. (XQ und XR, Fig. 11; XP und XR, Fig. 17; XP und XQ, Fig. 23). In den Stellen der Durchschneidungen der dritten und der vierten Zone durch die erste bekommen wir zwei Hilfsflächen, Y und Z. Wir ziehen eine Gerade (die Gerade der Zone) parallel dem Meridian oder der Grundfläche, die in der ersten Zone liegt (der erste Variant) oder der Fläche mit zwei Einheiten S (der zweite Variant). Der letzte ist gut anzuwenden, wenn sich unter den Flächen, die der Bestimmung unterworfen worden sind, Flächen befinden, welche in der zweiten Zone liegen. Wir ziehen die Meridiane aller Flächen, welche in der ersten Zone liegen. Diese Meridiane, die Gerade der Zone durchschneidend, werden dieselbe in eine Reihe von Abschnitten zerteilen. Indem wir die relativen Grössen dieser Abschnitte ausmessen, finden wir die gesuchten Indices der Flächen. Das Verhältnis der zwei Abschnitte halten wir für positiv, wenn diese Abschnitte aus der Geraden der Zone sich decken. Wenn aber die Abschnitte sich nicht decken, halten wir das Verhältnis für negativ.

Wollen wir alle Fälle apart betrachten.

Die erste Art (Fig. 11).

D e r e r s t e V a r i a n t (Fig. 12). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian der Grundfläche P (100) gezogen. Bei der Durchkreuzung der Meridiane der Flächen U, S, Y und Z zerteilt sich die Gerade der

Zone in die Abschnitte su, sy und sz. Die Indices des Symbols der Fläche X finden sich nach der Formel

$$p:q:r = 1:(su:sz):(su:sy) \quad \ldots \ldots \quad (42)$$

Der zweite Variant (fig. 13). Die Gerade der Zone wird parallel der Fläche mit zwei Einheiten S (011) gezogen. Bei der Durchkreuzung der Meridiane der Flächen P, U, Y und Z zerteilt sich die Gerade der Zone in die Abschnitte pu, py und pz. Die Indices des Symbols der Fläche X finden wir nach der Formel

$$p:q:r = pu:pz:py \quad \ldots \ldots \quad (44)$$

Der specielle Fall. Für die Bestimmung der Symbole der Flächen, die in der zweiten Zone (in der Zone [100]) liegen, kann man auf zweierlei Weise verfahren: entweder zu einer anderen Art des Ziehens der Geraden der Zone übergehen (nach der dritten oder nach der vierten Art, von denen unten gesprochen wird) oder eine besondere für diese Zone Zonengerade konstruieren. Diese Gerade ziehen wir entweder parallel dem Meridian einer der Grundflächen dieser Zone (der erste und der zweite Variant) oder parallel dem Meridian der Fläche S (011) (der dritte Variant).

Den letzten (den dritten) Variant muss man dann anwenden, wenn die Bestimmung der übrigen Flächen, die nicht in der zweiten Zone liegen, nach dem zweiten, oben beschriebenen, Variant ausgeführt wurde. Damit vermeiden wir die Notwendigkeit eine besondere Gerade für die Flächen der zweiten Zone zu ziehen. Wir ziehen die Meridiane aller Flächen, die in dieser Zone liegen. Diese Meridiane zerteilen die Gerade der Zone in die einzelnen Abschnitte.

Der erste Variant (Fig. 14). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian der Fläche Q (010) gezogen. Bei der Durchkreuzung der Meridiane der Flächen R (001), S (011) und X (pqr) zerteilt sich die Gerade der Zone in Abschnitte rs und rx. Die Indices des Symbols der Fläche X finden wir nach der Formel

$$p:q:r = 0:rx:rs \quad \ldots \ldots \quad (46)$$

Der zweite Variant (Fig. 15). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian der Fläche R (001) gezogen. Bei der Durchkreuzung der Meridiane der Flächen Q (010), S (011) und X (pqr) zerteilt sich die Gerade der Zone in die Abschnitte qs und qx. Die Indices des Symbols der Fläche X finden wir nach der Formel

$$p:q:r = 0:qs:qx \quad \ldots \ldots \quad (48)$$

Der dritte Variant (fig. 16). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian der Fläche S (011) gezogen, Bei der Durchkreuzung der Meridiane der Flächen Q (010), R (001) und X (pqr), zerteilt sich die Gerade der Zone in die Abschnitte xq und xr. Die Indices finden wir nach der Formel

$$p:q:r = 0:xr:xq \quad \ldots \ldots \quad (50).$$

Die zweite Art (Fig. 17).

Der erste Variant (Fig. 18). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian Q (010) gezogen

$$p:q:r = (su:sz):1:(su:sy) \quad \ldots \ldots \quad (51).$$

D e r z w e i t e V a r i a n t (Fig. 19). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian S (101) gezogen

$$p:q:r = qz:qu:qy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

Der specielle Fall. Für die Bestimmung der Symbole der Flächen, die in der zweiten Zone (in der Zone [010]) liegen, gebrauchen wir entweder die erste oder die dritte Art der Ziehung der ersten Zone, oder ziehen wir die Gerade der Zone parallel dem Meridian oder einer der Grundflächen, oder der Fläche S (101) und die Meridiane der Flächen disser Zone.

D e r e r s t e V a r i a n t (Fig. 20). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian P (100) gezogen

$$p:q:r = rx:0:rs \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

D e r z w e i t e V a r i a n t (Fig. 21). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridiane R (001) gezogen

$$p:q:r = ps:0:px \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

D e r d r i t t e V a r i a n t (fig. 22). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian S (101) gezogen

$$p:q:r = xr:0:xp \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

Die Anwendung des dritten Varianten: er wird in denselben Fällen gebraucht, in welchen er auch bei der ersten Art der Ziehung der ersten und der zweiten Zone angewandt wird.

Die dritte Art (Fig. 23).

D e r e r s t e V a r i a n t (fig. 24). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian R (001) gezogen

$$p:q:r = (su:sz):(su:sy):1 \quad \ldots\ldots \quad (60)$$

D e r z w e i t e V a r i a n t (Fig. 25). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian S (110) gezogen

$$p:q:r = rz:ry:ru \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

Der specielle Fall. Für die Bestimmung der Symbole der Flächen, die in der zweiten Zone (in der Zone [001]) liegen, gebrauchen wir entweder die erste oder die zweite Art der Ziehung der ersten Zone, oder ziehen die gerade der Zone parallel dem Meridian einer der Grundflächen dieser Zone, oder parallel dem Meridian der Fläche S (110).

D e r e r s t e V a r i a n t (Fig. 26). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian P (100) gezogen

$$p:q:r = qx:qs:0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 64).$$

D e r z w e i t e V a r i a n t (Fig. 27). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian Q (101) gezogen

$$p:q:r = ps:px:0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (66).$$

D e r d r i t t e V a r i a n t (Fig. 28). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian S (110) gezogen

$$p:q:r = xq:xp:0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (68).$$

Über die Anwendung des dritten Varianten siehe die Beschreibung der ersten Art.

Bei den Bestimmungen der Symbole trigonaloider Krystalle, oder überhaupt in den Fällen, wenn die Axe der ersten Zone den grossen Winkel mit der Projektionsaxe bildet, für die Vergrösserung der Genauigkeit ist es gut (und in dem Falle der horisontalen Lage—ganz notwendig) den Wechsel der Fläche der Projektion anzuwenden. Die Zone mit den Punkten, die bestimmt werden, muss man relativ der Projektionsfläche bis zu einem gewissen Winkel drehen. Es ist einfacher so lange zu drehen, bis die Zone vertikal wird (Fig. 29). Bei der Arbeit auf dem Wulfschen Netze wird diese Operation die Bestimmung sehr wenig komplizieren.

Es ist überhaupt zu erwähnen, dass die Anwendung des Wulfschen Netzes für die Arbeit nach der vorgeschlagenen Methode zweckentsprechend ist.

Wenn P, Q, R und U keine Grundflächen sind, sondern einfach vier Flächen (von welchen je drei nicht in einer Zone liegen) mit gewissen bestimmten Symbolen, so muss man bei der Bestimmung der Symbole der Fläche X folgendermassen verfahren: Wir schreiben den gegebenen vier Flächen P $(p_1\ q_1\ r_1)$, Q $(p_2\ q_2\ r_2)$, R $(p_3\ q_3\ r_3)$ und U $(p_4\ d_4\ r_4)$ provisorische Symbole zu (100), (010), (001) und (111). In dieser provisorischen Konstruktion bestimmen wir das provisorische Symbol der Fläche X nach den oben erwähnten Regeln. Für den Übergang von dem gefundenen provisorischen Symbol der ursprünglichen Konstruktion, benutzen wir den Determinanten

$$\begin{vmatrix} Ap_1 & Bp_2 & Cp_3 \\ Aq_1 & Bq_2 & Cq_3 \\ Ar_1 & Br_2 & Cr_3 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (75)$$

Mit Hilfe A, B und C sind hier folgende Determinanten bezeichnet

$$(71) \quad \ldots\ldots \quad A = \begin{vmatrix} p_4 & p_2 & p_3 \\ q_4 & q_2 & q_3 \\ r_4 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} p_1 & p_4 & p_3 \\ q_1 & q_4 & q_3 \\ r_1 & r_4 & r_3 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (72)$$

$$C = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_4 \\ r_1 & r_2 & r_4 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (73)$$

Bei der Lösung der entgegengesetzen Aufgabe, d. h. bei der Konstruktion der Projektionen der Fläche nach dem gegebenen Symbol, muss man folgendermassen verfahren. P, Q, R — die Projektion der drei Grundflächen (100), (010) und (001) (Fig. 10); U — Projektion der einzelnen Fläche (111). Man muss die Projektion der Fläche X konstruieren deren Symbol (pqr) ist.

Ziehen wir den Bogen des grossen Kreises durch U und durch eine der Grundflächen P, Q oder R; das wird die erste Zone sein. Durch die zwei anderen Grudflächen ziehen wir die zweite Zone. In der Durchkreuzung der ersten und der zweiten Zone bekommen wir eine Hilfsfläche S mit zwei Einheiten im Symbol. Wir ziehen die Gerade (die Gerade der Zone), parallel dem Meridian, oder der Grundfläche, die in der ersten Zone liegt (der erste Variant) oder der Fläche mit zwei Einheiten (der zweite Variant). Wir bemerken die Schnittpunkte der gezogenen Geraden mit den Meridianen der Flächen, die in der ersten Zone liegen. Auf der Geraden der Zone zwischen den Schnittpunkten dieser Geraden und der zwei Meridiane, die dieser Geraden nicht parallel sind, bekommen wir den Abschnitt entweder su oder pu, qu, oder ru. Mit Hilfe des bekommenen Abschnitts und der gegebenen Indices der Fläche X (p q r), die wir bestimmen, konstruieren wir auf der Geraden der Zone die Abschnitte sy und sz, in dem ersten Variant, oder py, qy, ry, und pz, pz oder rz in dem zweiten. Nach der gewählten Art der Ziehung der ersten Zone, wie auch nach dem gewählten Variant der Konstruktion dieser Abschnitte, bekommt man verschiedene Formeln.

Die erste Art (Fig. 11). Die erste Zone wird durch U (111) und P (100) gezogen.

Der erster Variant (Fig. 12). Die Gerade der Zone ist dem Meridian P (100) parallel

(81) . . . . . . $sy = (p:r) \cdot su, \qquad sz = (p:q) \cdot su$ . . . . . . (82)

Der zweite Variant (Fig. 13). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian S (011) gezogen

(83) . . . . . . $py = (r:p) \cdot pu, \qquad pz = (q:q) \cdot pu$ . . . . . . (84)

Die zweite Art (Fig. 17). Die erste Zone wird durch die Flächen U (111) und Q (010) gezogen.

Der erste Variant (Fig. 18). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian Q (010) gezogen.

(85) . . . . . . $sy = (q:r) \cdot su, \qquad sz = (q:p) \cdot su$ . . . . . . (86)

Der zweite Variant (Fig. 19). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian S (101) gezogen

(87) . . . . . . $qu = (r:q) \cdot qu, \qquad qz = (p:q) \cdot qu$ . . . . . . (88)

Die dritte Art (Fig. 23). Die erste Zone wird durch die Flächen U (111) und R (001) gezogen.

Der erste Variant (Fig. 24). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian R (001) gezogen

(89) . . . . . . $sy = (r:q) \cdot su, \qquad sz = (r:p) \cdot su$ . . . . . . (90).

Der zweite Variant (Fig. 25). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian S (110) gezogen

(91) . . . $ry = \frac{q}{r} ru = (q:r) \cdot ru, \qquad rz = \frac{p}{r} ru = (p:r) \cdot ru$ . . (92).

Die bekommenen Abschnitte legen wir auf der Geraden der Zone von dem Meridian der Fläche S mit zwei Einheiten in dem ersten Variant, von dem Meridian der Grundfläche in dem zweiten ab; die positiven Abschnitte legen wir in derselben Richtung ab, in welcher der Meridian der einzelnen Fläche sich befindet. Die negativen Abschnitte legen wir in der entgegengesetzten Richtung ab. Die Enden der konstruktierten Abschnitte bestimmen die Lage der Punkte *y* und *z* auf der Geraden der Zone. Die gefundenen Punkte *y* und *z* vereinigen wir durch die Geraden mit dem Zentrum der Projektion. Diese Geraden (Meridiane) bei der Durchkreuzung der ersten Zone geben die Hilfspunkte Y und Z.

Wir Ziehen durch diese Punkte Y, Z und durch jene Grundflächen. die in der zweiten Zone liegen. die Bogen der grossen Kreise.

In der ersten Art vereinigen wir

Y mit Q (010), Z mit R (001)

In der zweiten Art

Y mit P (100), Z mit R (001)

In der dritten Art

Y mit P (100), Z mit Q (010)

Der Schnittpunkt der gezogen Bögen ist also die gnomostereographische Projektion der Fläche X (pqr), die wir bestimmen.

In den speciellen Fällen, bei den Konstruktionen der Flächen der zweiten Zone, oder überhaupt, der Flächen mit einer Null im Symbol, kann die Konstruktion in folgender Weise durchgeführt werden.

Wir ziehen entweder die Gerade der Zone, oder die Parallele dem Meridian einer der Grundflächen (der erste und der zweite Variant), oder eine Parallele dem Meridian der Fläche S (der dritte Variant). Wir ziehen die Meridiane der Flächen der Zone, die wir bestimmen. Indem die Gerade der Zone die zwei ihr nicht parallelen Meridiane durchkreuzt, wird sie einen gewissen Abschnitt zwischen ihnen bestimmen (ps, qs oder rs in dem ersten und dem zweiten Variant, qr, pr oder qp in dem dritten Variant). Mit Hilfe des gefundenen Abschnitts und des Symbols der gesuchten Fläche X (pqr) konstruieren wir auf derselben Geraden der Zone einen gewissen Hilfsabschnitt px, qx oder rx, der Folgendem bestimmt wird.

Der erste Fall (Fig. 11). Die Bestimmung der Flächen der Zone [100] mit den Symbolen (0qr).

D e r e r s t e V a r i a n t (Fig. 14). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian *Q* (010) gezogen

$$rx = (q : r) \cdot rs \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (93).$$

D e r z w e i t e V a r i a n t (Fig. 15). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian R (001) gezogen

$$qx = (r : q) \cdot qs \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (94).$$

D e r d r i t t e V a r i a n t (Fig. 16). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian S (011) gezogen

$$(95) \quad \ldots\ldots \quad rx = \frac{q}{q-r} \cdot rq \text{ oder } qx = \frac{r}{r-q} \cdot qr \quad \ldots\ldots \quad (96).$$

Der zweite Fall (Fig. 17). Die Bestimmung der Flächen der Zone [010] mit den Symbolen (p0r).

D e r e r s t e V a r i a n t (Fig. 20). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian P (100) gezogen

$$rx = (p : r) \cdot rs \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (97).$$

D e r z w e i t e V a r i a n t (Fig. 21). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian R (001) gezogen.

$$px = (r : p) \cdot ps \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (98).$$

Der dritte Variant (Fig. 22). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian S (101) gezogen

$$(99) \quad \ldots\ldots \quad rx = \frac{p}{p-r} \cdot rp \quad \text{oder} \quad px = \frac{r}{r-p} \cdot pr \quad \ldots\ldots \quad (100).$$

Der dritte Fall (Fig. 23). Die Bestimmung der Flächen der Zone [001] mit den Symbolen (pq0).

Der erste Variant (Fig. 26). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian P (100) gezogen

$$qx = \frac{p}{q}\, qs = (p:q) \cdot qs \quad \ldots\ldots \quad (101).$$

Der zweite Variant (Fig. 27). Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian Q (010) gezogen

$$px = \frac{q}{p}\, ps = (q:p) \cdot ps \quad \ldots\ldots \quad (102).$$

Der dritte Variant (Fig. 28) Die Gerade der Zone wird parallel dem Meridian der Fläche S (110) gezogen

$$(103) \quad \ldots\ldots \quad qx = \frac{p}{p-q} \cdot qp \quad \text{oder} \quad px = \frac{p}{q-p} \cdot pq \quad \ldots\ldots \quad (104).$$

Den bekommenen Abschnitt px, qx oder rx legen wir auf der Geraden der Zone von dem Meridian der Grundfläche ab. Dabei legen wir die positiven Abschnitte in der Richtung des Meridians der anderen Fläche ab (S in dem ersten und dem zweiten Variant, P, Q oder R in dem dritten), die negativen in der entgegengesetzten Richtung. Das Ende des abgelegenen Abschnitts wird auf der Geraden der Zone den Hilfspunkt *x* bestimmen; diesen Punkt vereinigen wir durch eine gerade Linie mit dem Zentrum der Projektion. Der Durckreuzungspunkt dieser Geraden und des Bogens der Zone ist also die gesuchte gnomostereographische Projektion der Fläche X mit einer Null im Symbol.

Wenn man die Projektion der Fläche X (pqr) nach der Lage der vier Flächen P, Q, R und U, deren Symbole nicht (100), (010), (001) und (111) sind, zu konstruieren braucht, so verfährt man folgendermassen.

Wollen wir zulassen, dass die vier gegebenen Flächen (von denen je drei nicht in einer Zone liegen) folgende Symbole haben: P ($p_1\, q_1\, r_1$), Q ($p_2\, q_2\, r_2$), R ($p_3\, q_3\, r_3$), U ($p_4\, q_4\, r_4$). Schreiben wir diesen Flächen provisorische Symbole P (100), Q (010), R (001) und U (111) zu. Dann wird der Determinant der Umgestaltung der Symbole von den ursprünglichen in die provisorische folgender sein:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (105).$$

$$(113) \quad \ldots\ldots \quad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} q_2 & q_3 \\ r_2 & r_3 \end{vmatrix}}{A}, \qquad x_2 = \frac{-\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ r_2 & r_3 \end{vmatrix}}{A} \quad \ldots\ldots \quad (114),$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix}}{A} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (115);$$

$$(116) \quad y_1 = \frac{-\begin{vmatrix} q_1 & q_3 \\ r_1 & r_3 \end{vmatrix}}{B}, \qquad y_2 = \frac{\begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ r_1 & r_3 \end{vmatrix}}{B} \quad (117),$$

$$y_3 = \frac{-\begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ q_1 & q_3 \end{vmatrix}}{B} \quad (118);$$

$$(119) \quad z_1 = \frac{\begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}}{C}, \qquad z_2 = \frac{-\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}}{C} \quad (120),$$

$$z_3 = \frac{\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}}{C} \quad (121).$$

Durch A, B und C sind hier dieselben Determinanten, wie im Vorhergehenden (Sieh (71), (72), (73)), bezeichnet.

[Fedorow Institut, 1929].