Записки Горного Института Т. VII—3. 1929.
Annales de l'Institut des Mines à Leningrade VII—3. 1929.

Об определении положений равновесия плавающих тел.

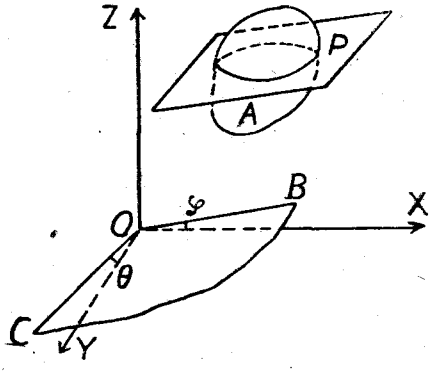
Н. П. Неронов.

Sur la détermination des positions d'équilibre des corps flottants.

N. Neronoff.

§ 1. Общие условия равновесия.

Тело A, плавающее в однородной жидкости, ограниченной горизонтальной поверхностью P, находится в состоянии равновесия (фиг. 1). Пусть будет G (x_g, y_g, z_g) центр тяжести тела A, при чем координаты (прямоугольные) точки G предполагаются данными. Проведем через начало координат плоскость BOC параллельную P и пересекающую координатные плоскости XOZ и YOZ по линиям OB и OC. Будем характеризовать положение плоскости P углами θ и φ.



Обозначим через C (x_c, y_c, z_c) центр водоизмещения, т. е. центр тяжести объема, вытесненного в жидкости плавающим телом.

Назовем геометрическое место точек C при различных положениях плоскости P, отсекающей от тела A один и тот же объем, поверхностью (C). Пусть будет

$$(1) \qquad x_c = f_1(\theta, \varphi), \quad y_c = f_2(\theta, \varphi), \quad z_c = f_3(\theta, \varphi)$$

параметрическое уравнение этой поверхности.

Как известно, для равновесия плавающего тела необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) вес тела должен быть равен весу вытесненной жидкости.

2) линия CG должна быть вертикальной, т. е. перпендикулярной плоскости P.

Второе условие дает систему уравнений

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\vartheta = -\frac{y_c - y_g}{z_c - z_g}, \quad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{x_c - x_g}{z_c - z_g},$$

определяющую углы ϑ и φ для положения равновесия тела A.

В общем случае задача допускает несколько решений. Некоторые из найденных положений равновесия могут оказаться неустойчивыми.

Если уравнения (2) применяются к судну с жидким грузом, то координаты центра тяжести x_g, y_g, z_g будут некоторыми функциями углов ϑ и φ.

§ 2. Случай цилиндрического плавающего тела.

Возьмем начало координат совпадающим с положением C_0 центра водоизмещения, когда соответствующая плоскость P_0 перпендикулярна образующим цилиндра. Ось OZ направим параллельно этим образующим, а оси OX и OУ параллельно главным центральным осям инерции прямого сечения цилиндра.

Уравнение поверхности (C) будет иметь вид

$$(3) \qquad x_c = R_0 \operatorname{tg}\varphi, \quad y_c = r_0 \operatorname{tg}\vartheta, \quad z_c = \frac{r_0}{2}\operatorname{tg}^2\vartheta + \frac{R_0}{2}\operatorname{tg}^2\varphi,$$

где через r_0 и R_0 обозначены главные метацентрические радиусы для точки C_0, т. е. радиусы кривизны главных нормальных сечений поверхности (C) в этой точке. Мы получили уравнение эллиптического параболоида [1]).

Подставляем значения x_c, y_c, z_c в уравнения (2), которые переписываем в виде

$$(4) \qquad \frac{x_c - x_g}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{y_c - y_g}{\operatorname{tg}\vartheta} = z_g - z_c = a.$$

Уравнения (4) определяют неизвестные углы ϑ и φ в функции вспомогательной величины a

$$(5) \qquad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{y_g}{r_0 - a}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{x_g}{R_0 - a}.$$

Для нахождения величины a, вносим полученные значения $\operatorname{tg}\vartheta$ и $\operatorname{tg}\varphi$ в последнее из уравнений (3)

$$(6) \qquad z_g - a = \frac{r_0}{2}\left(\frac{y_g}{r_0 - a}\right)^2 + \frac{R_0}{2}\left(\frac{x_g}{R_0 - a}\right)^2.$$

Таким образом величина a определяется, как корень выше написанного алгебраического уравнения 5-ой степени, и является одновременно функцией параметров x_g и y_g, т. е. поперечные и продольные наклонения плавающего тела перестают быть независимыми друг от друга, что имеет место для бесконечно малых наклонений.

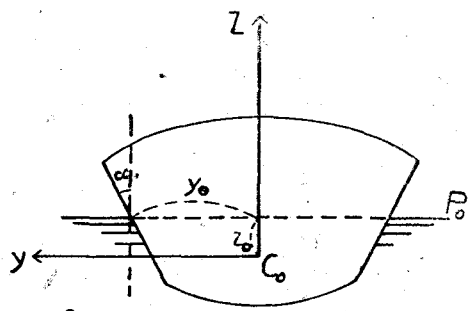
---

[1]) Pollard et Dudebout, Théorie du navire, t. , ch. XVIII, § 88.

§ 3. Случай плоских наклонений плавающего тела, имеющего плоскость симметрии и ограниченного линейчатой поверхностью.

Предположим, что поверхность плавающего тела имеет плоскость симметрии. Будем проводить плоскости P параллельно некоторой прямой (направление оси наклонений), лежащей в плоскости симметрии. Плоскость перпендикулярную этой прямой назовем плоскостью наклонений. Наконец, полагаем, что поверхность, ограничивающая тело, или, по крайней мере, часть ее вблизи начальной ватерлинии является линейчатой: именно, прямые линии получаются от пересечения этой поверхности плоскостями перпендикулярными оси наклонений [1]).

Возьмем (фиг. 2) начало координат в положении C_0 центра водоизмещения, когда соответствующая плоскость P_0 перпендикулярна плоскости симметрии плавающего тела, а центр водоизмещения, очевидно, находится в этой плоскости. Примем плоскость симметрии за координатную плоскость XOZ и проведем ось OX параллельно оси наклонений.



Фиг. 2.

Пусть уравнение линейчатой поверхности представляется в виде

$$y = (z - z_0)\, f_1(x) + f_2(x), \tag{7}$$

где z_0 обозначает отстояние точки C_0 от плоскости P_0. Пересечение этой поверхности плоскостями перпендикулярными оси OX дает прямую линию.

Полагаем

$$f_1(x) = \operatorname{tg}\alpha, \quad f_2(x) = y_0, \tag{8}$$

где α обозначает угол между осью OZ и прямой линией сечения поверхности плавающего тела плоскостью наклонений; через y_0 обозначена координата начальной ватерлинии (фиг. 2).

В разбираемом случае, когда ось наклонений сохраняет неизменное направление, центр водоизмещения опишет некоторую кривую, уравнение проэкции которой на плоскость наклонения YOZ представится в виде

$$y_c = r_0\theta + \frac{2F - r_0}{6}\theta^3 + \ldots\ldots, \quad z_c = \frac{r_0}{2}\theta^2 + \ldots\ldots \tag{9}$$

[1]) Поверхность значительного числа судов на некотором протяжении удовлетворяет этому условию.

Правые части последних уравнений суть целые ряды относительно θ.
В уравнениях (9) введены следующие сокращенные обозначения:

$$D = \int_{x_1}^{x_2} y_0^2 \operatorname{tg}\alpha \, dx, \quad E = \int_{x_1}^{x_2} y_0^3 \operatorname{tg}^2\alpha \, dx,$$

(10)

$$F = \frac{3 r_0}{2} + \frac{4 E}{V} - \frac{6 D^2}{SV}.$$

Здесь $r_0 = \frac{I}{V}$ обозначает начальную величину метацентрического радиуса, V — объем плавающего тела, отсекаемый плоскостями P, S — площадь сечения тела плоскостью P_0 и I — момент инерции площади этого сечения относительно оси, проходящей через его центр тяжести и параллельной оси наклонений.

Интегралы, обозначенные через D и E, распространены на длину начальной ватерлинии. Если поверхность плавающего тела задана не уравнением, а графически (случай судна), они могут быть вычислены с тем или иным приближением по одной из формул механических квадратур.

Подставляем из уравнений (9) значения y_c и z_c в первое из уравнений равновесия (2). При этом ограничиваемся случаем плоских наклонений ($\varphi = 0$), что будет иметь место, если $x_c = x_g$.

Разлагаем $\operatorname{tg}\theta$ в ряд и получаем для определения θ уравнение с левой частью в виде целого ряда

(11) $$3 y_g - 3 h \theta - (F + h)\theta^3 + \ldots = 0, \quad h = r_0 - z_g.$$

Отсюда

(12) $$\theta = \frac{y_g}{h} - \frac{F + h}{3h}\left(\frac{y_g}{h}\right)^3 + \ldots\ldots$$

или

(13) $$\operatorname{tg}\theta = \frac{y_g}{h} - \frac{F}{3h}\left(\frac{y_g}{h}\right)^3 + \ldots\ldots$$

Ограничиваясь в последнем ряде только первым членом, получим известную приближенную формулу Теории корабля [1]).

Действительно, положим, что первоначальное состояние равновесия плавающего тела веса P нарушено благодаря перемещению некоторого груза веса p. Считаем это перемещение происходящим настолько медленно, что в результате получается новое состояние равновесия, характеризуемое углом θ.

Пусть будут y и z проэкции перемещения центра тяжести груза p на соответствующие координатные оси, a — начальное расстояние между центром тяжести плавающего тела и центром водоизмещения.

Имеем

(14) $$y_g = \frac{py}{P}, \quad z_g = a + \frac{pz}{P}.$$

Подстановка дает вышеупомянутую приближенную формулу

(15) $$\operatorname{tg}\theta = \frac{y_g}{h} = \frac{py}{P(r_0 - a) - pz}.$$

---

[1]) Pollard et Dudebout, ibid., t. II, ch. XXII, § 109.

§ 4. Определение метацентрической высоты по углу наклонения плавающего тела.

Первое из уравнений (2), которым мы пользовались в случае плоских наклонений при определении угла θ по заданному положению центра тяжести плавающего тела, может служить для решения обратной задачи: по известному углу наклонения θ, соответствующему новому положению равновесия плавающего тела, найти положение его центра тяжести. Это положение мы будем определять метацентрической высотой $h = r_0 - z_g$. С подобной задачей приходится встречаться при опытном определении метацентрической высоты судов. Как известно, для этого судно из начального положения равновесия переводят в другое, характеризуемое углом наклонения θ, путем перемещения некоторого груза. Тогда из приближенной формулы (15) имеем

$$h = \frac{y_g}{\operatorname{tg}\theta} \tag{16}$$

С целью получить возможно более точный результат, производят ряд наблюдений для различных значений θ и y_g. Результаты этих наблюдений обрабатываются тем или другим способом [1]). При этом естественно возникает вопрос о точности самой формулы (16), из которой определяется h.

Найдем точное выражение для h. Первое из уравнений (2) дает

$$z_g = -\frac{y_g}{\operatorname{tg}\theta} + \frac{y_c + z_c \operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta} \tag{17}$$

Подставляем значение z_g в выражение для h

$$h = \frac{y_g}{\operatorname{tg}\theta} + \frac{(r_0 - z_c)\operatorname{tg}\theta - y_c}{\operatorname{tg}\theta}. \tag{18}$$

Второе слагаемое правой части последнего равенства дает представление о величине ошибки, делаемой при употреблении приближенной формулы (16).

Применяем формулу (18) к случаю цилиндрического плавающего тела. Подставляя соответствующие значения y_c и z_c (§ 2), находим известный результат

$$h = \frac{y_g}{\operatorname{tg}\theta} - \frac{r_0}{2}\operatorname{tg}^2\theta. \tag{19}$$

Случай симметричного плавающего тела (§ 3), ограниченного линейчатой поверхностью, дает выражение для h в виде бесконечного ряда

$$h = \frac{y_g}{\operatorname{tg}\theta} - \frac{F}{3}\operatorname{tg}^2\theta + \ldots\ldots \tag{20}$$

При достаточно малом угле θ можно ограничиться двумя первыми слагаемыми правой части и таким образом оценить погрешность приближенной формулы (16).

---

[1]) А. Н. Крылов, Теория корабля, 1907, ч. I, гл. II, § 21.

Résumé [1]).

Dans la Théorie du navire [2]) on emploie la formule approchée

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y_g}{h} = \frac{py}{P(r_0 - a) - pz}$$

pour l'angle θ d'inclinaison du navire dans le plan transversal, quand un poids p a un déplacement horizontal égal à y et vertical à z, le navire jusqu'au déplacement du poids p étant en équilibre. Dans cette formule P désigne le poids total du flotteur, r_0 — le rayon métacentrique initial transversal, a — la distance initiale du centre de gravité total au centre de carène.

Il existe une formule analogique pour l'angle φ d'inclinaison du flotteur dans le plan. longitudinal.

Ces deux formules n'ont lieu que pour les inclinaisons infiniment petites, où nous ne retenons dans les séries pour $\operatorname{tg}\theta$ et $\operatorname{tg}\varphi$ que les premiers termes.

Dans le cas général ont lieu en même temps les inclinaisons transversales et longitudinales.

En menant par l'origine de coordonnées le plan parallèle à une flottaison P (fig. 1) et coupant les plans de coordonnées XOZ et YOZ suivant les lignes OB et OC, caractérisons la position de cette flottaison par les angles θ et φ.

Le systéme des équations

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\theta = -\frac{y_c - y_g}{z_c - z_g}, \quad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{x_c - x_g}{z_c - z_g}$$

avec deux inconnues θ et φ, ou les coordonnées du centre de gravité total $G(x_g, y_g, z_g)$ sont données et les coordonnées du centre de carène $C(x_c, y_c, z_c)$ sont considérées comme les fonctions connues de θ et φ, donne la solution exacte du problème pour les valeurs finies de θ et φ.

Dans le cas du navire avec un chargement liquide les coordonnées du centre de gravité total x_g, y_g, z_g sont des fonctions de θ et φ.

Examinons dans § 2 le cas du flotteur cylindrique.

Considérons dans § 3 le cas des inclinaisons transversales du corps flottant, qui a un plan longitudinal de symétrie et est limité (tout entier ou sa portion près de la flottaison initiale) par une surface réglée. A cette dernière condition satisfait le grand nombre de navires.

L'angle cherché θ s'exprime par la série

$$(3) \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y_g}{h} - \frac{F}{3h}\left(\frac{y_g}{h}\right)^3 + \ldots\ldots,$$

---

[1]) Les résultats ici obtenus sont tirés du travail de diplôme qui a le même titre et qui fut présenté en même temps que le projet de diplôme à la Section du génie maritime de l'Institut Polytecnique au mois de janvier 1918.

[2]) Pollard et Dudebout, Théorie du navire, t. II, ch. XXII, § 109.

où sont introduites les indications abregées

$$h = r_0 - z_g, \quad D = \int_{x_1}^{x_2} y_0^2 \operatorname{tg}\alpha \, dx, \quad E = \int_{x_1}^{x_2} y_0^3 \operatorname{tg}^2\alpha \, dx,$$

(4)

$$F = \frac{3 r_0}{2} + \frac{4 E}{V} - \frac{6 D^2}{SV}.$$

Enfin V désigne le volume de carène, S — l'aire de la flottaison initiale, y_0 — son ordonnée, α — l'angle qui fait la muraille avec la verticale (fig. 2). En ne conservant que le premier terme de la série (3), on aura la formule approchée de la Théorie du navire (1).

Résolvons dans § 4 le problème inverse par rapport au précédent: connaissant l'angle d'inclinaison θ du flotteur, trouver la position de son centre de gravité total. Nous déterminons cette position par l'hauteur métacentrique h. Le problème posé se rencontre, quand on trouve la valeur h de l'expérience, en employant la formule approchée

(5) $$h = \frac{y_g}{\operatorname{tg}\theta}.$$

La formule

(6) $$h = \frac{y_g}{\operatorname{tg}\theta} + \frac{(r_0 - z_c)\operatorname{tg}\theta - y_c}{\operatorname{tg}\theta}$$

donne la valeur exacte de h.

En l'appliquant au cas de § 3, on aura la valeur de h par la série

(7) $$h = \frac{y_g}{\operatorname{tg}\theta} - \frac{F}{3}\operatorname{tg}^2\theta + \ldots\ldots.$$