

О функциях Bessel'я многих переменных и их приложениях в механике.

М. И. Акимов.

(Окончание).

Sur les fonctions de Bessel à plusieurs variables et leurs applications en mécanique.

Par Michel Akimoff.

ГЛАВА IV.

Некоторые разложения в ряды по обобщенным функциям Bessel'я.

26. Обобщение ряда Ломмел'я. Обратимся снова к разложению (10)

$$\begin{aligned} e^{\frac{x_1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) + \frac{x_2}{2} \left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) + \dots + \frac{x_m}{2} \left(t^m - \frac{1}{t^m}\right) + \dots} \\ = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) t^k \end{aligned}$$

и выведем из него новые разложения по функциям $J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$, аналогичные разложениям Lommel'я [41, p. 21].

$$(115) \quad \frac{x^r}{2^r \cdot 1 \cdot 2 \dots r} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{2^s \cdot 1 \cdot 2 \dots s} J_{r+s}(x)$$

и С. Neumann'a [43, p. 39]

Записки Горного Института.

$$(116') \quad x^{2s} = \sum_{p=1}^{\infty} p^2 (p^2 - 2^2) \dots (p^2 - (2s-2)^2) [J_p(x) + J_{-p}(x)],$$

$$(116'') \quad x^{2s+1} = \sum_{p=2}^{\infty} p (p^2 - 1) (p^2 - 3^2) \dots (p^2 - (2s-1)^2) [J_p(x) - J_{-p}(x)]$$

по обыкновенным функциям Bessel'я.

Перемножая почленно равенство (10) и следующее

$$(117) \quad e^{\frac{x_1}{2} \cdot \frac{1}{t} + \frac{x_2}{2} \cdot \frac{1}{t^2} + \dots + \frac{x_m}{2} \cdot \frac{1}{t^m} + \dots} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{V_s(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_s)}{2^s \cdot 1.2 \dots s} t^{-s}$$

и сравнивая коэффициенты одинаковых степеней t во вновь полученном разложении и в разложении

$$e^{\frac{x_1}{2} t + \frac{x_2}{2} t^2 + \dots + \frac{x_m}{2} t^m + \dots} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{V_r(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_r)}{2^r \cdot 1.2 \dots r} t^r,$$

найдем

$$(118) \quad \frac{V_r(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_r)}{2^r \cdot 1.2 \dots r} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{V_s(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_s)}{2^s \cdot 1.2 \dots s} J_{r+s}(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots).$$

Это разложение в случае одного переменного ($m=1$) приводится к разложению Lommel'я (115)¹⁾.

Для произвольного значения r имеем

$$(92) \quad \frac{V_r(x_1, x_2, \dots, x_n)}{2^r \cdot \Gamma(r+1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty, \alpha}^{\infty, \beta} e^{\frac{1}{2}(x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_n t^n)} \cdot t^{-r-1} dt,$$

а так как на основании (117)

$$\begin{aligned} & e^{\frac{1}{2}(x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_n t^n)} = \\ & = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{V_s(x_1, x_2, \dots, x_n)}{2^s \cdot 1.2 \dots s} \cdot e^{\frac{x_1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) + \frac{x_2}{2} \left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) + \dots + \frac{x_n}{2} \left(t^n - \frac{1}{t^n}\right)} \cdot t^{-s} \end{aligned}$$

¹⁾ Из равенства (118) вытекает ряд других разложений, аналогичных разложениям Lommel'я [41, р. 24—25], вытекающим из (115).

и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\infty \cdot \alpha}^{\infty \cdot \alpha} e^{\frac{x_1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) + \frac{x_2}{2} \left(t^2 - \frac{1}{t^2} \right) + \dots + \frac{x_n}{2} \left(t^n - \frac{1}{t^n} \right)} t^{-r-s-1} dt =$$

$$= J_{r+s}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

то разложение (118) сохраняет силу для функции

$$\frac{V_r(x_1, x_2, \dots, x_n)}{2^r \cdot \Gamma(r+1)}$$

при произвольном значении r ¹⁾.

27. Обобщение рядов С. Нейманна. Положим в разложении (10), $t = e^{i\varphi}$.

Считая $x_1, x_2, \dots$ и φ вещественными, из сравнения вещественной и мнимой частей обоих членов полученного равенства находим

$$(119) \cos(x_1 \sin \varphi + x_2 \sin 2\varphi + \dots + x_n \sin n\varphi)$$

$$= J_0(x_1, x_2, \dots, x_n) + [J_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + J_{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)] \cos \varphi + \dots$$

$$(120) \sin(x_1 \sin \varphi + x_2 \sin 2\varphi + \dots + x_n \sin n\varphi)$$

$$= [J_1(x_1, x_2, \dots, x_n) - J_{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)] \sin \varphi + \dots$$

Значит обобщенные функции Bessel'я позволяют разложить в периодические ряды выражения

$$\sin(x_1 \sin \varphi + x_2 \sin 2\varphi + \dots), \quad \cos(x_1 \sin \varphi + x_2 \sin 2\varphi + \dots).$$

Из этих разложений, как в случае одного переменного, полагая последовательно $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \dots$, получим различные разложения по обобщенным функциям Bessel'я для

$$1, \cos(x_1 - x_2 + \dots), \sin(x_1 - x_2 + \dots), \dots$$

Положим теперь в разложении (13)

$$e^{\frac{1}{2}(x_1' t + x_2' t^2 + \dots + x_m' t^m + \dots)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{V_r(x_1', x_2', \dots, x_r')}{2^r \cdot 1 \cdot 2 \dots r} t^r$$

¹⁾ Этот результат можно проверить также, заменяя в правой части равенства (118) $J_{r+k}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ разложением (91), собирая вместе члены с $V_{r+k}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и замечая, что сумма их приводится к нулю, так как в силу формулы сложения (43) коэффициент при V_{r+k} в этой сумме равен

$$\sum_{s=0}^k \frac{V_{k-s}(x_1, x_2, \dots, x_n) V_s(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)}{1 \cdot 2 \dots (k-s) \cdot 1 \cdot 2 \dots s} = 0.$$

$x'_2 = x'_4 = \dots = 0$ и заменим t через it , выйдет

$$\cos \frac{1}{2} (x'_1 t - x'_3 t^3 + \dots) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{V_{2s}(x'_1, 0, x'_3, \dots, x'_{2s-1}, 0)}{2^{2s} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2s} t^{2s}$$

и

$$\sin \frac{1}{2} (x'_1 t - x'_3 t^3 + \dots) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{V_{2s+1}(x'_1, 0, x'_3, \dots, x'_{2s+1})}{2^{2s+1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2s+1)} t^{2s+1}$$

С другой стороны имеем равенства

$$\cos m\varphi = 1 - \frac{m^2}{1 \cdot 2} \sin^2 \varphi + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^4 \varphi - \dots,$$

$$\sin m\varphi = \frac{m}{1} \sin \varphi - \frac{m(m^2-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 \varphi + \frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 \varphi - \dots,$$

представляющие непосредственное следствие тождеств Cauchy (§ 17) и сохраняющие силу при всяком вещественном значении m , лишь бы $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ [57, р. 294].

На этом основании, разлагая обе части равенств (119), (120) по степеням $\sin \varphi$, из сравнения в них коэффициентов у одинаковых степеней $\sin \varphi$ заключаем¹⁾

$$(121') \quad 1 = J_0(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{p=1}^{\infty} [J_p(x_1, x_2, \dots, x_n) + J_{-p}(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

$$(121'') \quad x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = \sum_{p=1}^{\infty} p [J_p(x_1, x_2, \dots, x_n) - J_{-p}(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

$$(121''') \quad U_{2s}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{p=1}^{\infty} p^2 (p^2 - 2^2) \dots [p^2 - (2s-2)^2] [J_p(x_1, x_2, \dots, x_n) + J_{-p}(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

$$(121''') \quad U_{2s+1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{p=2}^{\infty} p (p^2 - 1) (p^2 - 3^2) \dots [p^2 - (2s-1)^2] \times [J_p(x_1, x_2, \dots, x_n) - J_{-p}(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

¹⁾ Разложения (121') и (121'') встречаются у Jekhowsk'ого [26, с].

где

$$U_{2s} = \frac{1}{2^{2s}} V_{2s} \left(2 \sum_{m=1}^n m x_m, 0, \sum_{m=2}^n \frac{m(m^2-1)}{1 \cdot 3} x_m, 0, \dots \right. \\ \left. \dots, \sum_{m=2}^n \frac{m(m^2-1) \dots [m^2 - (2s-3)^2]}{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2s-1)} x_m, 0 \right),$$

$$U_{2s+1} = \frac{1}{2^{2s+1}} V_{2s+1} \left(2 \sum_{m=1}^n m x_m, 0, \sum_{m=2}^n \frac{m(m^2-1)}{1 \cdot 3} x_m, 0, \dots \right. \\ \left. \dots, \sum_{m=2}^n \frac{m(m^2-1) \dots [m^2 - (2s-1)^2]}{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2s+1)} x_m \right), \quad s = 1, 2, \dots,$$

полиномы соответственно степеней $2s$ и $2s+1$ в переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Исходя из возвратного соотношения для V_s (§ 10), легко установить следующее возвратное соотношение для U_s

$$U_s = \left(\sum_{m=1}^n m x_m \right) U_{s-1} + \frac{(s-1)(s-2)}{1 \cdot 2} \left(\sum_{m=2}^n m(m^2-1) x_m \right) U_{s-2} \\ + \frac{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\sum_{m=2}^n m(m^2-1)(m^2-3^2) x_m \right) U_{s-3} + \dots,$$

откуда последовательно выводим

$$U_0 = 1, \\ U_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n, \\ U_2 = (x_1 + 2x_2 + \dots)^2, \\ U_3 = (x_1 + 2x_2 + \dots)^3 + 6 \left(x_2 + 4x_3 + 10x_4 + \dots + \frac{n(n^2-1)}{6} x_n \right), \\ U_4 = (x_1 + 2x_2 + \dots)^4 + 24(x_1 + 2x_2 + \dots)(x_2 + 4x_3 + \dots), \\ U_5 = (x_1 + 2x_2 + \dots)^5 + 60(x_1 + 2x_2 + \dots)^2(x_2 + 4x_3 + \dots) + \\ + 30 \left(-x_2 + 14x_4 + 64x_5 + \dots + \frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{30} x_n \right), \\ U_6 = (x_1 + 2x_2 + \dots)^6 + 120(x_1 + 2x_2 + \dots)^3(x_2 + 4x_3 + \dots) + \\ + 180(-x_2 + 14x_4 + \dots)(x_1 + 2x_2 + \dots) + 360(x_2 + 4x_3 + \dots)^2, \\ \dots \dots \dots$$

Полиномы $U_s(x_1, x_2, \dots, x_n)$, как и полиномы $V_s(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяют, очевидно, соотношению

$$\frac{\partial U_s}{\partial x_1} = s U_{s-1}.$$

Как и сами функции $J_s(x_1, x_2, \dots, x_n)$, независимо от указателя s , они удовлетворяют системе уравнений с частными производными (А) и (74), (75).

При $n = 1$ эти полиномы приводятся к степеням x , а равенства (121) к разложениям С. Neumann'a (116).

Пользуясь равенством

$$J_p(x_1, -x_2, \dots, (-1)^{n-1} x_n) = (-1)^p J_{-p}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

нетрудно заключить, что ряды подобные (121), но из функций $J_p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ только с четным или нечетным указателем p , также выражают полиномы

$$\frac{U_{2s}(x_1, x_2, \dots) + U_{2s}(x_1, -x_2, \dots)}{2} \quad \text{или} \quad \frac{U_{2s+1}(x_1, x_2, \dots) + U_{2s+1}(x_1, -x_2, \dots)}{2}.$$

28. Обобщение рядов Картеун'а. Рассмотрим следующие ряды

$$(122') \quad 2 \sum_{m=2s}^{\infty} \frac{(2s)^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\dots(m^2-(2s-2)^2)}{m^{2s}} J_m(mx_1, mx_2, \dots), \quad (m \text{ четное}),$$

$$(122'') \quad 2 \sum_{m=2s+1}^{\infty} \frac{(2s+1)^2(m^2-1^2)(m^2-3^2)\dots(m^2-(2s-1)^2)}{m^{2s+2}} J_m(mx_1, mx_2, \dots), \quad (m \text{ нечетное}),$$

в случае одного переменного x^1) данные Картеун'ом [29, р. 103] для x^{2s} и x^{2s+1} .

Эти ряды можно получить из следующих

$$2 \sum_{m=2s}^{\infty} \frac{(2s)^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\dots[m^2-(2s-2)^2]}{m^{2s}} \cos m\varphi, \quad (m \text{ четное}),$$

$$2 \sum_{m=2s+1}^{\infty} \frac{(2s+1)^2(m^2-1^2)(m^2-3^2)\dots[m^2-(2s-1)^2]}{m^{2s+2}} \cos m\varphi, \quad (m \text{ нечетное}),$$

если заменить в них φ через $\varphi - x_1 \sin \varphi - x_2 \sin 2\varphi - \dots$ и произвести интегрирование по φ от 0 до π .

Но последние ряды, представляя линейную комбинацию из

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\cos m\varphi}{m^{2k}} \quad (m \text{ четное}), \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m\varphi}{m^{2k}} \quad (m \text{ нечетное}), \quad k = 1, 2, \dots, s,$$

1) В случае одного переменного x полиномы $T_{2s}(x)$ и $T_{2s+1}(x)$ не могут содержать членов степени относительно x соответственно ниже $2s$ и $2s+1$, как это видно из разложения в степенной ряд функции $J_k(x)$. Простое вычисление первых членов разложений (122'), (122'') показывает, что коэффициенты в $T_{2s}(x)$, $T_{2s+1}(x)$ равны единице.

как и эти ряды, выражают полиномы в ϕ соответственно степеней $2s$ и $2s+1$. Поэтому ряды (122'), (122'') выражают полиномы $T_{2s}(x_1, x_2, \dots)$, $T_{2s+1}(x_1, x_2, \dots)$ в переменных $x_1, x_2, \dots$ соответственно степеней $2s$ и $2s+1$.

Как еще пример разложения по функциям $J_m(mx_1, mx_2, \dots)$ можно указать равенство

$$\frac{1}{1-x_1-2x_2-3x_3-\dots} = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(mx_1, mx_2, \dots),$$

которое получается из (58), если в этом последнем положить $v = \zeta = 0$ и $e_1 = x_1, e_2 = x_2, \dots$

Нетрудно доказать¹⁾, что ряд

$$1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(mx_1, mx_2, \dots)$$

представляет сумму рядов (122'), (122''), $s=0, 1, 2, \dots$ Поэтому, как в случае одного переменного,

$$\sum_{r=0}^{\infty} T_r(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{1-x_1-2x_2-3x_3-\dots}$$

Заметим еще, что всякая функция, разлагающаяся в ряд по $J_m(mx_1, mx_2, \dots)$, как и сами эти функции, удовлетворяет, очевидно, системе уравнений с частными производными (A) §^a 14.

29. Обобщение рядов Schlömilch'a. Чтобы дать следующий пример разложений по обобщенным функциям Bessel'я, рассмотрим равенства

¹⁾ Это следует из тождеств [Картезн, р. 118]:

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{m}{2}} \frac{(2s)^2 (m^2-2^2) (m^2-4^2) \dots [m^2-(2s-2)^2]}{m^{2s}} = 1, \quad (m \text{ четное}),$$

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{m+1}{2}} \frac{(2s-1)^2 (m^2-1^2) (m^2-3^2) \dots [m^2-(2s-3)^2]}{m^{2s}} = 1, \quad (m \text{ нечетное}).$$

$$(123') \quad x^{2s} = \frac{A_0^{(2s)}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(2s)} \cos mx, \quad A_m^{(2s)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^{2s} \cos mx \, dx,$$

$$(123'') \quad x^{2s+1} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(2s+1)} \sin mx, \quad A_m^{(2s+1)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^{2s+1} \sin mx \, dx,$$

$$-\pi < x < \pi.$$

В силу разложений (§ 11)

$$(x_1 \sin \varphi + x_2 \sin 2\varphi + \dots)^{2s} = \frac{1}{2} W_{2s}^{(0)}(x_1, x_2, \dots) + \sum_{p=1}^{\infty} W_{2s}^{(p)}(x_1, x_2, \dots) \cos p\varphi,$$

$$(x_1 \sin \varphi + x_2 \sin 2\varphi + \dots)^{2s+1} = \sum_{p=1}^{\infty} W_{2s+1}^{(p)}(x_1, x_2, \dots) \sin p\varphi,$$

где W_{2s} и W_{2s+1} полиномы соответственно степеней $2s$ и $2s+1$ в переменных $x_1, x_2, \dots$, и (§ 27)

$$\cos(mx_1 \sin \varphi + mx_2 \sin 2\varphi + \dots) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(mx_1, mx_2, \dots) \cos p\varphi,$$

$$\sin(mx_1 \sin \varphi + mx_2 \sin 2\varphi + \dots) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(mx_1, mx_2, \dots) \sin p\varphi,$$

полагая в (123) $x = x_1 \sin \varphi + x_2 \sin 2\varphi + \dots$, имеем

$$W_{2s}^{(p)}(x_1, x_2, \dots) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(2s)} [J_p(mx_1, mx_2, \dots) + J_{-p}(mx_1, mx_2, \dots)], \quad p \neq 0,$$

или

$$(124') \quad W_{2s}^{(p)}(x_1, x_2, \dots) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^{(2s)} J_p(mx_1, mx_2, \dots), \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

и

$$(124'') \quad W_{2s+1}^{(p)}(x_1, x_2, \dots) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^{(2s+1)} J_p(mx_1, mx_2, \dots), \quad p = 1, 2, \dots,$$

так как

$$J_{-p}(mx_1, mx_2, \dots) = J_p(-mx_1, -mx_2, \dots)$$

и

$$A_{-m}^{(2s)} = A_m^{(2s)}, \quad A_{-m}^{(2s+1)} = -A_m^{(2s+1)}.$$

Ряды правых частей равенств (124) при достаточно малых¹⁾ значениях переменных $x_1, x_2, \dots$ сходятся равномерно: они получаются от почленного интегрирования равномерно сходящихся рядов (123), если в этих рядах положить $x = x_1 \sin \varphi + x_2 \sin 2\varphi + \dots$ и умножить их соответственно на $\frac{2}{\pi} \cos p\varphi, \frac{2}{\pi} \sin p\varphi$.

В случае одного переменного равенства (124) представляют разложение Schlömilch'a для $W_r^{(p)}(x) = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}}{2^{r-1}} N_{-p,r} x^r$ (§ 11).

При произвольном числе переменных полином $W_r^{(p)}(x_1, x_2, \dots)$, как и сами функции $J_p(mx_1, mx_2, \dots)$, независимо от указателей p и r , удовлетворяет уравнениям с частными производными (A) § 14.

Исходя из тригонометрических рядов, отличных от (123)²⁾, можно составить другие примеры обобщенных рядов Schlömilch'a.

30. Разложение нуля (Nullentwicklung) в ряд Schlömilch'a. Пусть число переменных $x_1, x_2, \dots$ конечно и равно n . Тогда тригонометрический ряд для $(x_1 \sin \varphi + x_2 \sin 2\varphi + \dots + x_n \sin n\varphi)^r$ будет конечным и $W_r^{(p)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ при $p > nr$. Поэтому разложения (124) приводятся к следующему:

$$0 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^{(r)} \cdot J_p(mx_1, mx_2, \dots, mx_n).$$

Отсюда заключаем:

Равномерно сходящийся обобщенный ряд Schlömilch'a

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^{(r)} J_p(mx_1, mx_2, \dots, mx_n)$$

при $p > nr$ выражает функцию, принимающую в определенной области только одно значение — нуль.

Для обыкновенных функций Bessel'я подобные разложения изучал Niels Nielsen [44, b и c (p. 337)].

Эти ряды представляют известную аналогию с интегралами, выражающими прерывные функции параметра, простейшим примером которых является прерывный множитель Dirichlet.

¹⁾ Достаточно, чтоб $x_1, x_2, \dots$ удовлетворяли условию $0 \leq |x_1| + |x_2| + \dots < \pi$.

²⁾ Например для функции Jac. Berhoulli, для $\cos \alpha x$ и т. д. Cp. Niels Nielsen [44, c], §§ 127—130.

31. Обобщение рядов Neumann'a, Картеун'a и Schlömilch'a 2-го рода.

Из разложения (10) выводим

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k \left[x_1 \left(s + \frac{1}{s} \right), x_2 \left(s^2 + \frac{1}{s^2} \right), \dots \right] t^k = e^{\frac{x_1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right) \left(t - \frac{1}{t} \right) + \frac{x_2}{2} \left(s^2 + \frac{1}{s^2} \right) \left(t^2 - \frac{1}{t^2} \right) + \dots}$$

С другой стороны

$$e^{\frac{x_1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right) \left(t - \frac{1}{t} \right) + \frac{x_2}{2} \left(s^2 + \frac{1}{s^2} \right) \left(t^2 - \frac{1}{t^2} \right) + \dots} = e^{\frac{x_1}{2} \left(ts - \frac{1}{ts} \right) + \frac{x_2}{2} \left(t^2 s^2 - \frac{1}{t^2 s^2} \right) + \dots} \times e^{\frac{x_1}{2} \left(\frac{t}{s} - \frac{s}{t} \right) + \frac{x_2}{2} \left(\frac{t^2}{s^2} - \frac{s^2}{t^2} \right) + \dots}$$

Поэтому

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k \left[x_1 \left(s + \frac{1}{s} \right), x_2 \left(s^2 + \frac{1}{s^2} \right), \dots \right] t^k = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(x_1, x_2, \dots) t^p \cdot s^p \times \sum_{p'=-\infty}^{+\infty} J_{p'}(x_1, x_2, \dots) t^{p'} \cdot s^{-p'}.$$

Сравнивая в обеих частях последнего равенства коэффициенты при одинаковых степенях t , заключаем

$$p' = -p + k$$

и

$$J_k \left[x_1 \left(s + \frac{1}{s} \right), x_2 \left(s^2 + \frac{1}{s^2} \right), \dots \right] = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(x_1, x_2, \dots) \cdot J_{-p+k}(x_1, x_2, \dots) s^{2p-k}$$

Полагая здесь $s = e^{i\alpha}$ и заменяя соответственно k и p сперва через $2k$ и $p+k$, а затем через $2k+1$ и $p+k+1$, приходим к следующим разложениям

$$J_{2k}(2x_1 \cos \alpha, 2x_2 \cos 2\alpha, \dots) = [J_k(x_1, x_2, \dots)]^2 + + 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{k+p}(x_1, x_2, \dots) J_{k-p}(x_1, x_2, \dots) \cos 2p\alpha,$$

$$J_{2k+1}(2x_1 \cos \alpha, 2x_2 \cos 2\alpha, \dots) = = 2 \sum_{p=0}^{\infty} J_{k+p+1}(x_1, x_2, \dots) J_{k-p}(x_1, x_2, \dots) \cos (2p+1)\alpha,$$

для случая одного переменного указанным Schläfli [55, b, p. 142].

Отсюда

$$(125') \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} J_{2k} (2x_1 \cos \alpha, 2x_2 \cos 2\alpha, \dots) \cos 2p\alpha \, d\alpha = J_{k+p} (x_1, x_2, \dots) \cdot J_{k-p} (x_1, x_2, \dots),$$

$$(125'') \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} J_{2k+1} (2x_1 \cos \alpha, 2x_2 \cos 2\alpha, \dots) \cos (2p+1)\alpha \, d\alpha = J_{k+p+1} (x_1, x_2, \dots) \cdot J_{k-p} (x_1, x_2, \dots).$$

При $p=0$ из (125') получаем интересную формулу

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} J_{2k} (2x_1 \cos \alpha, 2x_2 \cos 2\alpha, \dots) \, d\alpha = [J_k (x_1, x_2, \dots)]^2,$$

для обыкновенных функций Bessel'я данную C. Neumann'ом [43, p. 70].

В силу формул (125) из разложений (121), (122) и (124), заменяя в них $x_1, x_2, \dots$ соответственно через $2x_1 \cos \alpha, 2x_2 \cos 2\alpha, \dots$, умножая обе части их на $\cos 2q\alpha$ или $\cos (2q+1)\alpha$ и производя интегрирование по α в промежутке от 0 до π , получим ряды из произведений обобщенных функций Bessel'я

$$J_{k+q} (x_1, x_2, \dots) \cdot J_{k-q} (x_1, x_2, \dots) \text{ или } J_{k+q+1} (x_1, x_2, \dots) \cdot J_{k-q} (x_1, x_2, \dots),$$

$$k=1, 2, \dots,$$

$$J_{m+q} (2mx_1, 2mx_2, \dots) \cdot J_{m-q} (2mx_1, 2mx_2, \dots)$$

или

$$J_{m+q+1} [(2m+1)x_1, (2m+1)x_2, \dots] \cdot J_{m-q} [(2m+1)x_1, (2m+1)x_2, \dots],$$

$$m=0, 1, 2, \dots,$$

$$J_{k+q} (mx_1, mx_2, \dots) \cdot J_{k-q} (mx_1, mx_2, \dots)$$

или

$$J_{k+q+1} (mx_1, mx_2, \dots) \cdot J_{k-q} (mx_1, mx_2, \dots), \quad m=0, 1, 2, \dots,$$

также представляющие полиномы.

Это обобщенные ряды C. Neumann'а, Kapteyn'а и Schlömilch'а 2-го рода. Для одного переменного они изучены Niels Nielsen'ом [44, с. p. 292 — 308, 345].

Отметим следующее разложение этого рода

$$1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k^2(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots),$$

для $m=1$ данное Hansen'ом [20, а, р.107]. Можно получить его из (121'), заменяя $x_1, x_2, \dots$ соответственно через $2x_1 \cos \alpha, 2x_2 \cos 2\alpha, \dots$ и пользуясь равенствами

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi J_{2k}(2x_1 \cos \alpha, 2x_2 \cos 2\alpha, \dots) d\alpha = J_k^2(x_1, x_2, \dots),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi J_{2k+1}(2x_1 \cos \alpha, 2x_2 \cos 2\alpha, \dots) d\alpha = 0.$$

32. Обобщение формулы сложения Bessel'я. Не останавливаясь на других примерах подобных разложений, представляющих обобщение на случай многих переменных классических разложений по обыкновенным функциям Bessel'я, ограничимся здесь выводом еще следующей формулы, служащей обобщением формулы сложения Bessel'я.

Имеем разложения

$$(126) \quad e^{\frac{px_1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) + \frac{p^2 x_2}{2} \left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) + \dots} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(px_1, p^2 x_2, \dots) t^k$$

и

$$(127) \quad e^{\frac{x_1}{2} \left(pt - \frac{1}{pt}\right) + \frac{x_2}{2} \left(p^2 t^2 - \frac{1}{p^2 t^2}\right) + \dots} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x_1, x_2, \dots) p^k t^k.$$

Но

$$e^{\frac{x_m}{2} \left(p^m t^m - \frac{1}{p^m t^m}\right)} = e^{\frac{p^m x_m}{2} \left(t^m - \frac{1}{t^m}\right)} \cdot e^{\frac{x_m}{2} \left(p^m - \frac{1}{p^m}\right) \frac{1}{t^m}}, \quad m=1, 2, \dots$$

Следовательно, правая часть разложения (126) равна произведению правой части разложения (127) на

$$e^{-\frac{x_1}{2} \left(p - \frac{1}{p}\right) \frac{1}{t} - \frac{x_2}{2} \left(p^2 - \frac{1}{p^2}\right) \frac{1}{t^2} - \dots},$$

т. е.

$$(128) \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(px_1, p^2 x_2, \dots) t^k = e^{-\frac{x_1}{2} \left(p - \frac{1}{p}\right) \cdot \frac{1}{t} - \frac{x_2}{2} \left(p^2 - \frac{1}{p^2}\right) \cdot \frac{1}{t^2} - \dots} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x_1, x_2, \dots) p^k t^k.$$

Но

$$e^{-\frac{x_1}{2} \left(p - \frac{1}{p}\right) \cdot \frac{1}{t} - \frac{x_2}{2} \left(p^2 - \frac{1}{p^2}\right) \cdot \frac{1}{t^2} - \dots} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_k \left[-x_1 \left(p - \frac{1}{p}\right), -x_2 \left(p^2 - \frac{1}{p^2}\right), \dots \right]}{2^k \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \frac{1}{t^k},$$

поэтому, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в обеих частях разложения (128), имеем:

$$(129) \quad J_k(px_1, p^2x_2, \dots) = \\ = p^k J_k(x_1, x_2, \dots) + p^{k+1} \frac{V_1 \left[-x_1 \left(p - \frac{1}{p}\right), -x_2 \left(p^2 - \frac{1}{p^2}\right), \dots \right]}{2} J_{k+1}(x_1, x_2, \dots) + \\ + p^{k+2} \frac{V_2 \left[-x_1 \left(p - \frac{1}{p}\right), -x_2 \left(p^2 - \frac{1}{p^2}\right), \dots \right]}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} J_{k+2}(x_1, x_2, \dots) + \dots$$

Для случая одного переменного эта формула приводится у Lommel'я [41, p. 21], но в виде формулы сложения

$$J_k(x+y) = \left(1 + \frac{y}{x}\right)^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m y^m}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} \left(1 + \frac{y}{2x}\right)^m J_{k+m}(x)$$

ею пользовался еще Bessel [6, p. 35] при вычислении таблицы функций $J_k(x)$.

ГЛАВА V.

Приложение обобщенных функций Bessel'я к задачам механики.

33. Уравнение центра. Из разложения [63, b, t. 1, p. 222]

$$v = u - \varepsilon_1 \sin u - \varepsilon_2 \sin 2u - \dots - \varepsilon_m \sin mu - \dots,$$

$$\varepsilon_m = -\frac{2}{m} \beta^m, \quad \beta = \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}},$$

где u средняя и v истинная аномалии планеты, а ε эксцентриситет ее орбиты, имеем

$$u = v + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(k\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \dots) \sin kv$$

и

$$\sin u = \sum_{k=1}^{\infty} [J_{k-1}(k\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \dots) + J_{k+1}(k\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \dots)] \frac{\sin kv}{k}.$$

В силу равенства (10), принимающего в случае аргументов $p\epsilon_1, p\epsilon_2, \dots$ (p целое число) вид ¹⁾

¹⁾ Другой интересный случай, где левая часть равенства (10) приводится к алгебраической функции, представляет пример Jacobi [25, p. 6]:

Если

$$y - x = \frac{1}{2} z \sin x + \frac{1.3}{2.4} \frac{z^2}{2} \sin 2x + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{z^3}{3} \sin 3x + \dots,$$

то

$$\cos x = \cos y + \frac{z}{2} \sin^2 y, \quad \text{т. е.} \quad \cos x = \frac{z}{4} + \cos y - \frac{z}{4} \cos 2y.$$

В самом деле, так как здесь

$$e_1 = -\frac{1}{2} z, \quad e_2 = -\frac{1.3}{2.4} \frac{z^2}{2}, \dots$$

и

$$\frac{h}{2} + \frac{1.3}{2.4} \frac{h^2}{2} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{h^3}{3} + \dots = \log \frac{2}{(1 + \sqrt{1-h})^2},$$

то

$$e^{-k \frac{1}{2} z \frac{1}{2} (t-t^{-1}) - k \frac{1.3}{2.4} \frac{z^2}{2} \frac{1}{2} (t^2-t^{-2}) - \dots} = \left(\frac{1 + \sqrt{1-zt}}{1 + \sqrt{1-\frac{z}{t}}} \right)^k.$$

А разложения

$$e^{\frac{1}{2} k (e_1 t + e_2 t^2 + \dots)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{V_r(k e_1, k e_2, \dots)}{2^r 1.2 \dots r} t^r,$$

$$e^{-\frac{1}{2} k (e_1 t^{-1} + e_2 t^{-2} + \dots)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{V_s(-k e_1, -k e_2, \dots)}{2^s 1.2 \dots s} t^{-s}$$

приводятся к следующим (Bertrand, Calcul différentiel, p. 320)

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1-zt}} \right)^{-k} &= 1 + \frac{k}{1} \frac{(-zt)}{4} + \frac{k(k-3)}{1.2} \frac{(-zt)^2}{4^2} + \frac{k(k-4)(k-5)}{1.2.3} \frac{(-zt)^3}{4^3} + \dots + \\ &+ \frac{k(k-k)[k-(k+1)] \dots [k-(k+k-3)]}{1.2 \dots k-1} \frac{(-zt)^{k-1}}{4^{k-1}} + \\ &+ \frac{k[k-(k+1)][k-(k+2)] \dots [k-(k+k-1)]}{1.2 \dots k} \frac{(-zt)^k}{4^k} + \\ &+ \frac{k[k-(k+2)][k-(k+3)] \dots [k-(k+k+1)]}{1.2 \dots (k+1)} \frac{(-zt)^{k+1}}{4^{k+1}} + \\ &+ \frac{k[k-(k+3)][k-(k+4)] \dots [k-(k+k+3)]}{1.2 \dots (k+2)} \frac{(-zt)^{k+2}}{4^{k+2}} + \dots, \end{aligned}$$

$$(1 - \beta t)^p \left(1 - \frac{\beta}{t}\right)^{-p} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(p\varepsilon_1, p\varepsilon_2, \dots) t^k,$$

будет

$$J_k(k\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \dots) = (-1)^k \beta^k,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon J_{k-1}(k\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \dots) &= \varepsilon [(-1)^{k-1} k \beta^{k-1} + (-1)^k k \beta^{k+1}] \\ &= (-1)^{k-1} \cdot 2k \sqrt{1 - \varepsilon^2} \beta^k, \end{aligned}$$

$$J_{k+1}(k\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \dots) = 0.$$

Поэтому, из уравнения Кеплер'а

$$\zeta = u - \varepsilon \sin u,$$

$$\left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{z}{t}}} \right)^k = 1 + \frac{k}{1} \frac{\frac{z}{t}}{4} + \frac{k(k+3)}{1 \cdot 2} \frac{\left(\frac{z}{t}\right)^2}{4^2} + \frac{k(k+4)(k+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\left(\frac{z}{t}\right)^3}{4^3} + \dots$$

Здесь

$$\begin{aligned} V_0(-k\varepsilon_1, -k\varepsilon_2, \dots) &= 1, \\ \frac{V_1(-k\varepsilon_1, -k\varepsilon_2, \dots)}{2 \cdot 1} &= k \frac{z}{4}, \end{aligned}$$

$$\frac{V_2(-k\varepsilon_1, -k\varepsilon_2, \dots)}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{k(k+3)}{1 \cdot 2} \left(\frac{z}{4}\right)^2,$$

$$\frac{V_3(-k\varepsilon_1, -k\varepsilon_2, \dots)}{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{k(k+4)(k+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{z}{4}\right)^3,$$

.....

и

$$\frac{V_{k-1}(k\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \dots)}{2^{k-1} \cdot 1 \cdot 2 \dots (k-1)} = 0, \quad k > 2,$$

$$\frac{V_k(k\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \dots)}{2^k \cdot 1 \cdot 2 \dots k} = -\left(\frac{z}{4}\right)^k,$$

$$\frac{V_{k+1}(k\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \dots)}{2^{k+1} \cdot 1 \cdot 2 \dots (k+1)} = -k \left(\frac{z}{4}\right)^{k+1},$$

$$\frac{V_{k+2}(k\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \dots)}{2^{k+2} \cdot 1 \cdot 2 \dots (k+2)} = -\frac{k(k+3)}{1 \cdot 2} \left(\frac{z}{4}\right)^{k+2},$$

$$\frac{V_{k+3}(k\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \dots)}{2^{k+3} \cdot 1 \cdot 2 \dots (k+3)} = -\frac{k(k+4)(k+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{z}{4}\right)^{k+3},$$

.....

(Окончание — см. подробное примечание на обороте).

где ζ средняя аномалия планеты, получаем разложение уравнения центра

$$\zeta = v - e_1 \sin v - e_2 \sin 2v - \dots - e_m \sin mv - \dots,$$

причем [35, а, р. 173, 174]

$$e_m = (-1)^{m-1} \frac{2}{m} \frac{1 + m \sqrt{1 - e^2}}{(1 + \sqrt{1 - e^2})^m} e^m$$

34. Формула Laplace'a—Leverrier. Разложение уравнения центра по $\sin$ сам кратных ζ на основании формулы (26) можно представить в виде

$$(2) \quad v - \zeta = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke_1, ke_2, \dots, ke_m, \dots) \sin k\zeta,$$

где

$$(12) \quad J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{V_{k+s}(x_1, x_2, \dots, x_{k+s}) \cdot V_s(-x_1, -x_2, \dots, -x_s)}{2^{k+2s} \cdot 1 \cdot 2 \dots (k+s) \cdot 1 \cdot 2 \dots s}$$

и полиномы $V_r(x_1, x_2, \dots, x_r)$, $r=0, 1, 2, \dots$, вычисляются последовательно согласно формуле (14), указаний в § 10.

Следовательно,

$$\frac{V_{k-1+s}(ke_1, ke_2, \dots)}{2^{k-1+s} \cdot 1 \cdot 2 \dots (k-1+s)} \cdot \frac{V_s(-ke_1, -ke_2, \dots)}{2^s \cdot 1 \cdot 2 \dots s} -$$

$$- \frac{V_{k+1+s-1}(ke_1, ke_2, \dots)}{2^{k+s} \cdot 1 \cdot 2 \dots (k+s)} \cdot \frac{V_{s-1}(-ke_1, -ke_2, \dots)}{2^{s-1} \cdot 1 \cdot 2 \dots (s-1)} = 0, \quad s = 1, 2, \dots$$

Поэтому, в силу равенства

$$J_p(kx_1, kx_2, \dots) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{V_{p+s}(kx_1, kx_2, \dots) \cdot V_s(-kx_1, -kx_2, \dots)}{2^{p+2s} \cdot 1 \cdot 2 \dots (p+s) \cdot 1 \cdot 2 \dots s},$$

разложение

$$\cos x = -\frac{e_1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [J_{k-1}(ke_1, ke_2, \dots) - J_{k+1}(ke_1, ke_2, \dots)] \frac{\cos ky}{k}$$

приводится к следующему

$$\cos x = \frac{z}{4} + \cos y - \frac{z}{4} \cos 2y.$$

Разлагая e_m , $m=1, 2, \dots$, в ряды по степеням эксцентриситета ε (§ 1), имеем

$$\begin{aligned} e_1 &= 2\varepsilon, \\ e_2 &= -\frac{3}{4}\varepsilon^2 - \frac{1}{8}\varepsilon^4 - \frac{3}{64}\varepsilon^6 - \dots, \\ e_3 &= \frac{1}{3}\varepsilon^3 + \frac{1}{8}\varepsilon^5 + \frac{1}{16}\varepsilon^7 + \dots, \\ e_4 &= -\frac{5}{32}\varepsilon^4 - \frac{3}{32}\varepsilon^6 - \dots, \\ e_5 &= \frac{3}{40}\varepsilon^5 + \frac{1}{16}\varepsilon^7 + \dots, \\ e_6 &= -\frac{7}{192}\varepsilon^6 - \dots, \\ e_7 &= \frac{1}{56}\varepsilon^7 + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

и на основании вышеприведенной формулы для $J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$ после легких вычислений найдем

$$\begin{aligned} (130) \quad v - \zeta &= \left[4 \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) - 2 \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^3 + \frac{5}{3} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^5 + \frac{107}{36} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^7 - \dots \right] \sin \zeta \\ &+ \left[5 \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^2 - \frac{22}{3} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^4 + \frac{17}{3} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^6 - \dots \right] \sin 2 \zeta \\ &+ \left[\frac{26}{3} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^3 - \frac{43}{2} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^5 + \frac{95}{4} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^7 - \dots \right] \sin 3 \zeta \\ &+ \left[\frac{103}{6} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^4 - \frac{902}{15} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^6 + \dots \right] \sin 4 \zeta \\ &+ \left[\frac{1097}{30} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^5 - \frac{5957}{36} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^7 + \dots \right] \sin 5 \zeta \\ &+ \left[\frac{1223}{15} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^6 - \dots \right] \sin 6 \zeta + \left[\frac{47273}{252} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^7 - \dots \right] \sin 7 \zeta + \dots \end{aligned}$$

Это разложение уравнения центра методом совершенно отличным получено Laplace'ом [35, а, р. 200]. Оно составляет основу для разложения пертурбационной функции у Leverrier [37, р. 198—204].

Заметим, пользуясь этим примером, что данные выше разложения (10) и (51) для рассматриваемых здесь частных значений аргументов

$$e_m = (-1)^{m-1} \frac{2}{m} \frac{1 + m \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2})^m} \varepsilon^m$$

уже издавна встречаются в небесной механике.

Действительно, Leverrier [37, p. 346] выводит на основании разложения (130) следующее

$$e^{ip(v-\zeta)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^{(p)}(\varepsilon) e^{ik\zeta}.$$

В единственно важном в приложениях случае целого значения p наши формулы ¹⁾ дают

$$(131) \quad X_k^{(p)}(\varepsilon) = \frac{p}{k+p} J_k[(k+p)e_1, (k+p)e_2, \dots, (k+p)e_m, \dots].$$

С другой стороны Gylden [18, b, p. 99] пользуется следующим разложением

$$e^{iq(\zeta-v)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k^{(q)}(\varepsilon) e^{ikv}.$$

В силу наших формул ²⁾ будет

$$(132) \quad Y_k^{(q)}(\varepsilon) = J_k(-qe_1, -qe_2, \dots, -qe_m, \dots),$$

т. е. $Y_k(\varepsilon)$ выражается через ту же трансцендентную $J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$, как и $X_k(\varepsilon)$. Из сравнения (131) и (132) очевидно [18, b, p. 103]

$$Y_k^{(q)}(\varepsilon) = \frac{q}{k+q} X_k^{(-k-q)}(\varepsilon).$$

35. Формула Hansen'a. Из формул

$$(12) \quad J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{V_{k+s}(x_1, x_2, \dots, x_{k+s}) \cdot V_s(-x_1, -x_2, \dots, -x_s)}{2^{k+2s} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k+s) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot s}$$

и

$$(13) \quad e^{\frac{1}{2}(x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_m t^m + \dots)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{V_r(x_1, x_2, \dots, x_r)}{2^r \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r} t^r$$

непосредственно получается другая форма коэффициентов разложения уравнения центра по sinus'ам кратных средней аномалии ζ , указанная Hansen'ом [20, b, p. 276].

¹⁾ Равенство (51) можно представить в виде

$$e^{ipv} = -\frac{pe_p}{2} + p \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k[(k+p)e_1, (k+p)e_2, \dots, (k+p)e_m, \dots] \frac{e^{i(k+p)\zeta}}{k+p}.$$

²⁾ Равенство (10) при $t = e^{iv}$ обращается в следующее.

$$e^{i(x_1 \sin v + x_2 \sin 2v + \dots)} = e^{i(v-\zeta)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x_1, x_2, \dots) e^{ikv}.$$

Действительно, разложение (13) для рассматриваемых значений переменных

$$x_m = k e_m = (-1)^{m-1} \frac{2}{m} (k + m\nu) \beta^m, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где

$$\beta = \frac{\epsilon}{1 + \sqrt{1 - \epsilon^2}}, \quad \nu = k \sqrt{1 - \epsilon^2},$$

преобразуется в следующее ¹⁾

$$(133) \quad (1 + \beta t)^k \cdot e^{\nu \frac{\beta t}{1 + \beta t}} = \sum_{r=0}^{\infty} P_r \beta^r \cdot t^r.$$

Так как здесь

$$\frac{V_r(k e_1, k e_2, \dots, k e_r)}{2^r \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r} = P_r \cdot \beta^r,$$

то из возвратного соотношения (14) для V_r имеем следующее для P_r

$$P_r = \frac{1}{r} [(k + \nu) P_{r-1} - (k + 2\nu) P_{r-2} + (k + 3\nu) P_{r-3} - \dots],$$

откуда, или непосредственно из разложения (133), последовательно находим

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, \\ P_1 &= \frac{k}{1} + \frac{\nu}{1}, \\ P_2 &= \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} + \frac{k-1}{1} \cdot \frac{\nu}{1} + \frac{\nu^2}{1 \cdot 2}, \\ P_3 &= \frac{k(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\nu}{1} + \frac{k-2}{1} \cdot \frac{\nu^2}{1 \cdot 2} + \frac{\nu^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Заменяя в равенстве (2) коэффициенты при $\sin k \zeta$, $k = 1, 2, \dots$, разложением

$$\begin{aligned} \frac{2}{k} J_k(k e_1, k e_2, \dots, k e_m, \dots) &= \frac{2}{k} \beta^k (P_k + P_{k+1} \cdot Q_1 \beta^2 \\ &\quad + P_{k+2} \cdot Q_2 \beta^4 + \dots + P_{k+s} Q_s \beta^{2s} + \dots), \end{aligned}$$

где

$$Q_s \beta^s = \frac{V_s(-k e_1, -k e_2, \dots, -k e_s)}{2^s \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot s},$$

¹⁾ Полиномы $P_r(\nu)$ представляют обобщенные полиномы Laguerre'a [34]. См. об этих полиномах [59, p. 41—42] и [14].

т. е. Q отличается от P знаком k (и ν), получаем формулу Hansen'a. Hansen [20, b, p. 270] рассматривает более общее разложение

$$r^n e^{inv} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^{n,m} \cdot e^{ik\zeta},$$

где

$$r = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon \cos \nu}$$

и

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

указанное позднее с другой формой для коэффициентов $X_k^{n,m}$ Hill'ем [23, a, p. 176].

Обобщенная теорема Cauchy (§ 12) непосредственно приводит к следующей формуле Hansen'a для коэффициентов $X_k^{n,m}$ [63, b, t, 1, p. 253, формула (A')]

$$\frac{(1 - \beta^2)^{2n+3}}{(1 + \beta^2)^{n+1}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t^{m-k} (1 + \beta t)^{k-n-2} \left(1 + \frac{\beta}{t}\right)^{-k-n-2} e^{k\beta \nu \sqrt{1 - \varepsilon^2} \left(\frac{t}{1 + \beta t} - \frac{t^{-1}}{1 + \beta t^{-1}}\right)} d\nu,$$

$$t = e^{i\nu},$$

а формула (53) представляет новый способ для вычисления этих коэффициентов, аналогичный указанному Hill'ем, если обозначить чрез C_r коэффициент разложения r^n по степеням e^{iv} .

36. Приближенное выражение коэффициентов разложения (130) при больших значениях k . Формула Carlini—Jacobi. Интеграл (28), т. е. для рассматриваемого случая

$$(134) \quad J_k(ke_1, ke_2, ke_3, \dots) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(t)^k \frac{dt}{t},$$

$$\varphi(t) = te^{-\frac{e_1}{2}(t - \frac{1}{t}) - \frac{e_2}{2}(t^2 - \frac{1}{t^2}) - \frac{e_3}{3}(t^3 - \frac{1}{t^3}) - \dots} = \frac{t + \beta}{1 + \beta t} e^{-\beta \nu \sqrt{1 - \varepsilon^2} \left(\frac{t}{1 + \beta t} - \frac{1}{t + \beta}\right)}$$

весьма просто приводит к приближенному, асимптотическому выражению коэффициентов разложения (130) для больших значений k [3, e].

Действительно, можно взять здесь за путь интегрирования C , вместо окружности радиуса единицы с центром $t=0$, любую замкнутую кривую без узлов, обходящую пару точек $0, -\beta$ и вместе с тем пару точек $-\frac{1}{\beta}, \infty$, и, выбирая эту кривую надлежащим образом, применить к вычислению интеграла (134) метод Laplace [35, b]—Riemann'a [52].

Метод этот для определения приближенного значения интеграла формы

$$\int f(x) \varphi(x)^k dx$$

при больших значениях k основан на том замечании, что отношение величины этого интеграла, (по предположению не равной нулю), на участке пути интегрирования в окрестности максимума модуля функции $\varphi(x)$ к величине его на всем остальном участке пути неограниченно растет с возрастанием k (как показательная функция с показателем k), так что именно только окрестность этого максимума дает интегралу значение, принимаемое в расчет.

Заметим для нашей цели, что корни уравнения $\varphi'(t)=0$, т. е.

$$\frac{(1-\beta^2)^3}{(t+\beta)(1+\beta t)^3} e^{-\beta \sqrt{1-\varepsilon^2} \left(\frac{t}{1+\beta t} - \frac{1}{t+\beta} \right)} \cdot t = 0,$$

будут

$$t=0 \text{ и } t=\infty.$$

В окрестности точки $t=0$ имеем

$$\varphi(t) = \varphi(0) e^{\alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \dots},$$

где

$$\varphi(0) = \beta e^{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

и

$$\alpha_q = (-1)^q \left[\sqrt{1-\varepsilon^2} \left(\beta^q + \frac{1}{\beta^q} \right) + \frac{1}{q} \left(\beta^q - \frac{1}{\beta^q} \right) \right], \quad q=2, 3, \dots$$

На вещественной оси t в точке $t=0$ величина $\varphi(t)$ будет поэтому минимум и, значит, модуль этой функции будет максимум в той же точке на всякой кривой, встречающей в этой точке вещественную ось t под прямым углом.

Пусть

$$t = x + iy,$$

тогда

$$|\varphi(t)| = \frac{|t+\beta|}{|1+\beta t|} e^{\beta \sqrt{1-\varepsilon^2} \left(\frac{x+\beta}{|t+\beta|^2} + \frac{1+x\beta}{\beta |1+\beta t|^2} - \frac{1}{\beta} \right)}.$$

Рассмотрим окружность

$$x^2 + y^2 + \varepsilon x = 0$$

радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$ с центром в точке $t = -\frac{\varepsilon}{2}$. На этой окружности имеем

$$\left| \frac{t+\beta}{1+\beta t} \right| = \beta, \quad |t+\beta|^2 = \beta^2 + x(2\beta - \varepsilon)$$

и

$$|\varphi(t)| = \beta e^{\sqrt{1-\varepsilon^2} \left[\beta(1+\beta^2) \frac{x + \frac{2\beta}{1+\beta^2}}{x(2\beta-\varepsilon) + \beta^2} - 1 \right]},$$

и, следовательно, модуль функции $\varphi(t)$ при изменении x от $-\varepsilon$ до 0 достигает максимума в единственной точке $t=0$ ¹⁾.

Можно принять за путь интегрирования C эту окружность, отклоняя ее слегка от точки $t=0$.

Так как только окрестность максимума модуля функции $\varphi(t)$ дает интегралу (134) значение, принимаемое в расчет, то, положив в нем

$$\varphi(t)^k = \varphi(0)^k e^{ka_2 t^2} (1 + ka_3 t^3 + \dots)$$

и выполнив интегрирование почленно в интервале от точки $-ih$ до точки $+ih$, где h вещественное малое число, найдем приближенное значение

$$(135) \quad J_k(ka_1, ka_2, \dots) \sim \varphi(0)^k (b_1 + b_2 + \dots),$$

где

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-ih}^{+ih} e^{ka_2 t^2} \frac{dt}{t}, \quad b_2 = -\frac{ka_3}{2\pi i} \int_{-ih}^{+ih} e^{ka_2 t^2} t^2 dt, \dots$$

Первый интеграл, взятый по дуге полуокружности радиуса h с началом в точке $t=0$, равен

$$b_1 = \frac{1}{2}.$$

В остальных интегралах с ошибкой порядка $\frac{e^{-h^2 ka_2}}{k}$ можно заменить пределы $(-ih, +ih)$ через $(-i\infty, +i\infty)$. Таким образом находим²⁾

$$b_2 = -\frac{1}{4} \frac{a_3}{\sqrt{k\pi} a_2^2}$$

¹⁾ Не трудно составить представление о форме кривой равного модуля $|\varphi(t)| = \varphi(0)$ и убедиться, что рассматриваемая окружность лежит в области между двумя ветвями этой кривой, где $|\varphi(t)| < \varphi(0)$. Подобное исследование делает в своем мемуаре [45] о том же вопросе академик Я. В. Успенский. Интеграл, рассматриваемый этим автором, может быть приведен к виду (134) при помощи подстановки $e^{iu} = \frac{t+\beta}{1+\beta t}$. См. также Burkhardt [9, b] и Perron [47].

²⁾ См., например, Goursat [16, t. 1, № 176].

и для коэффициентов разложения уравнения центра по $\sin$ 'ам кратных средней аномалии получаем приближенное асимптотическое равенство

$$\frac{2}{k} J_k(k e_1, k e_2, \dots) \sim \frac{\varphi(0)^k}{k} \left(1 - \frac{a_3}{2 \sqrt{a_2^3} \sqrt{k \pi}} + \dots \right),$$

представляющее формулу Carlini [10] — Jacobi.

Для составления любого члена правой части приближенного равенства (135) рассмотрим разложение

$$e^{k a_2 t^2 + k a_4 t^4 + \dots} = \sum_{m_3, m_4, \dots = 0}^{\infty} M_{m_3, m_4, \dots} a_3^{m_3} a_4^{m_4} \dots k^{m_3 + m_4 + \dots} t^n,$$

где

$$M_{m_3, m_4, \dots} = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots m_3} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \dots m_4} \dots$$

и

$$n = 3m_3 + 4m_4 + \dots$$

Так как ¹⁾

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{k a_2 t^2} t^{n-1} dt = \begin{cases} \frac{A_n}{(k a_2)^{\frac{n}{2}}} & (n \text{ нечетное}), \\ 0 & (n \text{ четное}), \end{cases}$$

где

$$A_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-2)}{2^{\frac{n-1}{2}}} \sqrt{\pi},$$

то коэффициент при k^{-m} в асимптотическом разложении (135) равен

$$\sum \frac{M_{m_3, m_4, \dots} a_3^{m_3} a_4^{m_4} \dots A_n}{a_2^{\frac{n}{2}}},$$

где $2m$ должно быть нечетным числом

$$2m = n - 2(m_3 + m_4 + \dots)$$

и при заданном m суммирование распространено на все системы значений $m_3, m_4, \dots$, удовлетворяющие уравнению

$$m_3 + 2m_4 + 3m_5 + \dots = 2m.$$

¹⁾ См. предыдущую сноску.

Изложенный прием легко дает, очевидно, также приближенное выражение для коэффициентов

$$C_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(t) \varphi(t)^k \frac{dt}{t},$$

где $\varphi(t)$ имеет прежнее значение, а

$$f(t) = \left(\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} \right)^n (1-\beta^2)^{n+2} t^{l+n+2} (t+\beta)^{m-n-2} (1+\beta t)^{-m-n-2},$$

весьма далеких членов тригонометрического разложения в функции ζ общего выражения

$$r^n e^{i(l\nu + m\eta)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{ik\zeta},$$

где r радиус вектор, η средняя аномалия орбиты и n, l, m целые числа, рассмотренного Scheibner'ом [54] и Flamme'ом [15]. См. Tisserand [63, b, t. 1, p. 253, 269].

37. Математический маятник. Для определения движения математического маятника надо выразить координаты движущейся точки, т. е. $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$, в виде однозначных функций времени t .

Для колебательного движения имеем (§ 2)

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \sin \frac{\nu}{2}$$

и ν связано с t уравнением

$$(3) \quad \nu - e_1 \sin \nu - e_2 \sin 2\nu - \dots - e_m \sin m\nu - \dots = \zeta,$$

$$\zeta = 2 \frac{1}{a} \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t.$$

Так как

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1 - k^2 + k^2 \cos \nu,$$

то в силу формул § 12 заключаем

$$\cos \varphi = 1 - k^2 - \frac{e_1}{2} k^2 + k^2 \sum_{m=1}^{\infty} [J_{m-1}(me_1, me_2, \dots) - J_{m+1}(me_1, me_2, \dots)] \frac{\cos m\zeta}{m}.$$

Представим затем уравнение (3) в виде

$$\frac{\nu}{2} - \frac{e_1}{2} \sin 2 \frac{\nu}{2} - \frac{e_2}{2} \sin 4 \frac{\nu}{2} - \dots - \frac{e_m}{2} \sin 2m \frac{\nu}{2} - \dots = \frac{\zeta}{2}.$$

Так как

$$\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \sin \frac{\varphi}{2} = k \sin \frac{\nu}{2},$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\nu}{2}} = \frac{1}{a} \frac{d\nu}{d\zeta},$$

то в силу тех же формул § 12 имеем

$$\sin \varphi = -\frac{2k}{a} \frac{d \cos \frac{\nu}{2}}{d \frac{\zeta}{2}} =$$

$$= \frac{2k}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \left[J_{m-1} \left(0, m \frac{e_1}{2}, 0, m \frac{e_2}{2}, \dots \right) - J_{m+1} \left(0, m \frac{e_1}{2}, 0, m \frac{e_2}{2}, \dots \right) \right] \sin m \frac{\zeta}{2},$$

где на основании замечания конца § 10 содержатся только sinus'ы нечетных кратных $\frac{\zeta}{2}$.

Для случая непрерывного вращения в одном направлении имеем уравнение

$$\varphi - e_1 \sin \varphi - e_2 \sin 2\varphi - \dots - e_m \sin m\varphi - \dots = \zeta, \quad \zeta = 2 \frac{1}{a} \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot kt,$$

откуда

$$(2') \quad \varphi = \zeta + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_m(m e_1, m e_2, \dots) \sin m \zeta,$$

$$\sin \varphi = \sum_{m=1}^{\infty} [J_{m-1}(m e_1, m e_2, \dots) + J_{m+1}(m e_1, m e_2, \dots)] \frac{\sin m \zeta}{m},$$

$$\cos \varphi = -\frac{e_1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [J_{m-1}(m e_1, m e_2, \dots) - J_{m+1}(m e_1, m e_2, \dots)] \frac{\cos m \zeta}{m}.$$

Если в разложении (2') представить коэффициенты при $\sin m \zeta$ в виде рядов по степеням $\frac{1}{k^2}$, это разложение будет тождественно с тем, к которому приводит классический прием, основанный на применении эллиптических функций.

Кроме разложения (2') Tisserand [63, b, t. IV, p. 424] выводит другое, которое он рассматривает как отличное от (2').

Этот результат Tisserand'a нетрудно получить однако, исходя из первоначального разложения (2').

Положим для этой цели

$$\frac{g}{l} = p, \quad 2k \frac{1}{a} \sqrt{p} = \sigma \quad \text{и} \quad \frac{2\sqrt{p}}{\sigma} = \alpha,$$

откуда

$$\frac{1}{k} - \alpha \frac{1}{a} = 0,$$

при чем

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{k^2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \frac{1}{k^4} + \dots} = \\ &= 1 - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{k^2} - \frac{5}{2^6} \cdot \frac{1}{k^4} - \frac{11}{2^8} \cdot \frac{1}{k^6} - \frac{67.7}{2^{14}} \cdot \frac{1}{k^8} - \dots = f\left(\frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$

Если $z - \alpha f(z) = 0$, то по формуле Lagrange'a

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} \left| \frac{d^n [f(x)]^{n+1}}{dx^n} \right|_{x=0},$$

поэтому

$$\frac{1}{k} = \alpha - \frac{\alpha^3}{2^2} + \frac{3\alpha^5}{2^6} - \dots$$

Введем на основании этого равенства вместо $\frac{1}{k}$ постоянную α , тогда из разложений (§ 2)

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 &= \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{k^2} + \frac{3}{2^4} \cdot \frac{1}{k^4} + \frac{3.5^2}{2^9} \cdot \frac{1}{k^6} + \frac{5.7^2}{2^{11}} \cdot \frac{1}{k^8} + \dots, \\ -2\alpha_2 &= \frac{3}{2^7} \cdot \frac{1}{k^4} + \frac{3.5}{2^9} \cdot \frac{1}{k^6} + \frac{5.7^2}{2^{11}} \cdot \frac{1}{k^8} + \dots, \\ 2\alpha_3 &= \frac{5}{2^9.3} \cdot \frac{1}{k^6} + \frac{5.7}{2^{11}.3} \cdot \frac{1}{k^8} + \dots, \\ -2\alpha_4 &= \frac{5.7}{2^{16}} \cdot \frac{1}{k^8} + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

получим следующие

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{k^4} + \frac{41}{2^9} \cdot \frac{1}{k^6} + \dots = \frac{1}{2^2} \alpha^2 - \frac{5}{2^{10}} \alpha^5 + \dots, \\ e_2 &= \frac{3}{2^7} \cdot \frac{1}{k^4} + \frac{3.5}{2^{10}} \cdot \frac{1}{k^6} + \dots = \frac{3}{2^7} \alpha^4 - \frac{3^2}{2^{10}} \alpha^6 + \dots, \\ e_3 &= \frac{5}{2^9.3} \cdot \frac{1}{k^6} + \dots = \frac{5}{2^9.3} \alpha^6 - \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

и на основании формул (2), (12) и (14)

$$2J_1(e_1, e_2, \dots) = \frac{p}{c^2} - \frac{5}{16} \frac{p^3}{c^6} + \dots,$$

$$J_2(2e_1, 2e_2, \dots) = \frac{1}{8} \frac{p^2}{c^4} - \frac{1}{16} \frac{p^4}{c^8} + \dots$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} J_3(3e_1, 3e_2, \dots) &= \frac{1}{48} \frac{p^3}{\sigma^6} - \dots, \\ \frac{1}{2} J_4(4e_1, 4e_2, \dots) &= \frac{1}{256} \frac{p^4}{\sigma^8} - \dots, \\ &\dots\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\varphi = \zeta + \left(\frac{p}{\sigma^2} - \frac{5}{16} \cdot \frac{p^3}{\sigma^6} + \dots \right) \sin \zeta + \left(\frac{1}{8} \frac{p^2}{\sigma^4} - \frac{1}{16} \frac{p^4}{\sigma^8} + \dots \right) \sin 2\zeta \\ + \left(\frac{1}{48} \frac{p^3}{\sigma^6} - \dots \right) \sin 3\zeta + \left(\frac{1}{256} \frac{p^4}{\sigma^8} - \dots \right) \sin 4\zeta + \dots\end{aligned}$$

Этот результат тождественен с приведенным у Tisserand'a.

38. Уравнение теории продольного изгиба. Для изогнутой оси сжатого стержня имели уравнения (§3)

$$y = e \cos \frac{v}{2},$$

$$v = e_1 \sin v - e_2 \sin 2v - \dots - e_m \sin mv - \dots = \zeta,$$

$$\zeta = \frac{2x}{c \cdot \alpha}.$$

В силу формул §12 имеем поэтому

$$(136) y = e \sum_{k=1}^{\infty} \left[J_{k-1} \left(0, k \frac{e_1}{2}, 0, k \frac{e_2}{2}, \dots \right) - J_{k+1} \left(0, k \frac{e_1}{2}, 0, k \frac{e_2}{2}, \dots \right) \right] \frac{\cos k \frac{\zeta}{2}}{k},$$

где правая часть на основании замечания конца §10 содержит только cosinus'ы нечетных кратных $\frac{\zeta}{2}$.

Если e бесконечно мало, порядок величины e_m будет $2m$ (формулы 20). Согласно сказанному в §10 порядок величины $J_q \left(k \frac{e_1}{2}, k \frac{e_2}{2}, \dots \right)$ равен тогда $2q$.

Если, например, ограничиться третьим порядком величины e , в разложении (136) следует удержать два первые члена. Получим результат

$$y = \left(e + \frac{3}{64} \cdot \frac{e^3}{c^2} \right) \cos \left(1 + \frac{3}{16} \cdot \frac{e^2}{c^2} \right) \frac{x}{c} - \frac{3}{64c^2} e^3 \cos 3 \left(1 + \frac{3e^2}{16c^2} \right) \frac{x}{c},$$

приведенный Routh'ом [53, a] и Lord Kelvin—Tait'ом [30].

Некоторые авторы [62] применяют разложение (136), не учитывая порядка величины коэффициентов его. Определяя, например, критическую сжимающую силу по формуле

$$P = \text{Minim.} \frac{K \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx},$$

числитель и знаменатель которой выражают приближенно изменение потенциальной энергии стержня и работу сжимающей силы при изгибе, полученные отбрасыванием высших (выше второй) степеней y и $\frac{dy}{dx}$, пользуются несколькими членами разложения (136), между тем при выбранном приближении ряд (136) сводится к своему первому члену.

39. Уравнение малых колебаний в пустоте. Уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

при условиях $x = a$, $\frac{dx}{dt} = 0$ при $t = 0$, приведено (§ 4) подстановкой

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos v$$

к следующему

$$v = e_1 \sin v + e_2 \sin 2v + \dots + e_m \sin mv + \dots = \zeta,$$

$$\text{где } \zeta = \frac{t}{\alpha}, \quad e_1 = \frac{a_1}{\alpha}, \quad e_2 = \frac{a_2}{\alpha}, \quad \dots \text{ и}$$

$$\alpha = 1 + \left(\frac{5}{12} a_2^2 + \frac{3}{8} a_3 \right) a^2 - \left(\frac{5}{18} a_2^3 + \frac{1}{4} a_2 a_3 \right) a^3 + \dots,$$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{3} a_2 a + \frac{1}{9} a_2^2 a^2 + \dots,$$

$$\alpha_2 = -\left(\frac{1}{24} a_2^2 + \frac{1}{16} a_3 \right) a^2 + \dots$$

В силу формул § 12 имеем поэтому

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \left\{ -\frac{e_1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [J_{k-1}(ke_1, ke_2, \dots) - J_{k+1}(ke_1, ke_2, \dots)] \frac{\cos k \zeta}{k} \right\},$$

т. е.

$$x = \frac{1}{3} a_2 a^2 - \frac{1}{9} a_2^2 a^3 + \dots + \left(a - \frac{1}{3} a_2 a^2 + \dots \right) \left[\frac{1}{6} a_2 a - \frac{1}{18} a_2^2 a^2 + \dots \right. \\ \left. + \left\{ 1 + \left(\frac{1}{32} a_3 - \frac{1}{48} a_2^2 \right) a^2 + \dots \right\} \cos \zeta + \left(-\frac{1}{6} a_2 a + \frac{1}{18} a_2^2 a^2 + \dots \right) \cos 2\zeta + \dots \right]$$

Этот результат принадлежит Понн'у [24, d, p. 262].

40. Уравнение малых колебаний при сопротивлении среды, пропорциональном квадрату скорости. Формулы §§ 5, 10 и 12 дают в этом случае

$$x = -\frac{2}{3} k^2 \gamma a^2 + \dots - \left(a - \frac{2}{3} k^2 \gamma a^2 + \dots \right) \\ \times \left\{ -\frac{e_1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [J_{k-1}(ke_1, ke_2, \dots) - J_{k+1}(ke_1, ke_2, \dots)] \frac{\cos k \zeta}{k} \right\}, \\ e_1 = \frac{1}{3} k^2 \gamma \left(a - \frac{2}{3} k^2 \gamma a^2 + \dots \right), \dots$$

и

$$J_q(x_1, x_2, \dots) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{V_{q+s}(x_1, x_2, \dots, x_{q+s}) V_s(-x_1, -x_2, \dots, -x_s)}{2^{q+2s} \cdot 1.2 \dots (q+s) \cdot 1.2 \dots s},$$

$$V_0 = 1, V_1(x_1) = x_1, \dots$$

Следовательно

$$J_0(e_1, \dots) = 1 - \dots,$$

$$J_1(2e_1, \dots) = e_1 - \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

и

$$x = -\frac{2}{3} k^2 \gamma a^2 + \dots - \left(a - \frac{2}{3} k^2 \gamma a^2 + \dots \right) \left\{ -\frac{e_1}{2} + (1 - \dots) \cos \zeta \right. \\ \left. + (e_1 - \dots) \frac{\cos 2\zeta}{2} + \dots \right\},$$

или

$$x = -\frac{2}{3} k^2 \gamma a^2 + \dots - \left(a - \frac{2}{3} k^2 \gamma a^2 + \dots \right) \left\{ -\frac{1}{6} k^2 \gamma a + (1 - \dots) \cos \zeta \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{3} k^2 \gamma a - \dots \right) \frac{\cos 2\zeta}{2} + \dots \right\},$$

или, наконец,

$$x = -\frac{1}{2} k^2 \gamma a^2 - \left(a - \frac{2}{3} k^2 \gamma a^2 \right) \cos \zeta - \frac{1}{6} k^2 \gamma a^2 \cos 2\zeta, \\ \zeta = \frac{kt}{1 - \frac{2}{9} k^4 \gamma^2 a^2 + \dots},$$

1) Poisson [50, p. 358]. — Resal [51, p. 172]. — А. Н. Крылов [32, а, p. 41–42].

если отбросить члены с a степени выше второй.

В этом последнем случае вместо обобщенного достаточно рассматривать обыкновенное уравнение Кеплера

$$v - e_1 \sin v = \zeta$$

41. Приложения обобщенных функций Bessel'я к разложениям пертурбационной функции. Укажем теперь новые важные приложения обобщенных функций Bessel'я в небесной механике.

В дифференциальных уравнениях, интегрированием коих определяются координаты планет, как функции времени, дают по примеру Lagrange'a составляющим возмущающих сил форму частных производных одной и той же функции, носящей название пертурбационной.

Эта функция симметрична относительно координат различных планет и не зависит явно ни от времени, ни от производных от координат.

Можно принять за независимое переменное одну из трех аномалий планеты: среднюю, эксцентрическую или истинную аномалию. И соответственно этому существует три главных разложения пертурбационной функции F в тригонометрические ряды:

Разложение в функции средних аномалий ζ, ζ' двух планет

$$(137) \quad F = \sum_{m, m' = -\infty}^{+\infty} A_{m m'} e^{i(m\zeta + m'\zeta')},$$

разработанное Laplace'ом и Leverrier.

Разложение Hansen'a в функции эксцентрических аномалий u, u'

$$F = \sum_{p, p' = -\infty}^{+\infty} B_{p p'} e^{i(pu + p'u')}.$$

И разложение в функции истинных аномалий планет v, v' Gylden'a

$$(138) \quad F = \sum_{q, q' = -\infty}^{+\infty} C_{q q'} e^{i(qv + q'v')}.$$

Между тремя аномалиями планеты ζ, u и v существуют следующие связывающие их уравнения

$$\begin{aligned} \zeta &= u - \epsilon \sin u, \\ \zeta &= v - e_1 \sin v - e_2 \sin 2v - \dots - e_n \sin nv - \dots, \end{aligned}$$

где ϵ эксцентриситет и $e_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2}{n} \frac{1 + n\sqrt{1-\epsilon^2}}{(1+\sqrt{1-\epsilon^2})^n} \epsilon^n$, $n = 1, 2, \dots$

Подобным же образом для другой планеты

$$\zeta' = u' - \varepsilon' \sin u',$$

$$-\zeta' = v' - e'_1 \sin v' - e'_2 \sin 2v' - \dots - e'_n \sin nv' - \dots,$$

$$e'_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2}{n} \frac{1 + n \sqrt{1 - \varepsilon'^2}}{(1 + \sqrt{1 - \varepsilon'^2})^n} \cdot \varepsilon'^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Предложим себе разыскать связь между коэффициентами

$$A_{mm'}, B_{pp'} \text{ и } C_{qq'},$$

$$m, m', p, p', q, q' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Известна формула ¹⁾

$$(139) \quad A_{mm'} = \sum_{p, p' = -\infty}^{+\infty} \frac{pp'}{mm'} B_{pp'} J_{m-p}(m\varepsilon) J_{m'-p'}(m'\varepsilon').$$

По аналогии найдем

$$(140) \quad A_{mm'} = \sum_{q, q' = -\infty}^{+\infty} \frac{qq'}{mm'} C_{qq'} J_{m-q}(me_1, me_2, \dots, me_n, \dots) J_{m'-q'}(m'e'_1, m'e'_2, \dots, m'e'_n, \dots).$$

Это обобщение формулы (53) на случай двукратных рядов (137) и (138).

Средние аномалии ζ и ζ' линейно зависят от одного независимого переменного—времени. Поэтому можно положить

$$\zeta' = k\zeta + \alpha,$$

где k и α постоянные. Из (137) непосредственно получается разложение пертурбационной функции в зависимости от средней аномалии ζ одной из планет.

В своей теории малых планет Hansen [20, с. р. 169, 180] ¹⁾ принимает за независимое переменное эксцентрическую аномалию u возмущаемой планеты.

Полагая $u_1 = ku + \alpha$ и, следовательно,

$$u_1 = u' - \varepsilon' \sin u' + k\varepsilon \sin u$$

он находит

$$F = \sum_{m, m' = -\infty}^{+\infty} B'_{mm'} e^{i(mu + m'u_1)},$$

¹⁾ Эту формулу Poincaré [49, b, p. 40] приписывает Baillaud, но она встречается у Cauchy [11, c].

где

$$(141) \quad B'_{mm'} = \sum_{p, p'=-\infty}^{+\infty} \frac{p'}{m'} B_{pp'} J_{m-p}(-km' \varepsilon) J_{m'-p'}(m' \varepsilon'), \quad m' \neq 0$$

и

$$B'_{m0} = B_{m0} - \frac{\varepsilon'}{2} (B_{m,-1} + B_{m,+1}).$$

Gylden ищет разложение пертурбационной функции в зависимости от истинной аномалии v

$$F = \sum_{m, m'=-\infty}^{+\infty} C'_{mm'} e^{i(mv + m'v_1)},$$

где $v_1 = kv + \alpha$

и $v_1 = v' - e_1' \sin v' - e_2' \sin 2v' - \dots + ke_1 \sin v + ke_2 \sin 2v + \dots$

По аналогии с предыдущим случаем получим формулы

$$(142) \quad C'_{mm'} = \sum_{q, q'=-\infty}^{+\infty} \frac{q'}{m'} C_{qq'} J_{m-q}(-km' e_1, -km' e_2, \dots) J_{m'-q'}(m' e_1', m' e_2', \dots)$$

и

$$C'_{m0} = C_{m0} - \frac{e_1'}{2} (C_{m,-1} + C_{m,+1}) - 2 \frac{e_2'}{2} (C_{m,-2} + C_{m,+2}) - \dots \\ \dots - \frac{ne'_n}{2} (C_{m,-n} + C_{m,+n}) - \dots$$

Равенства (140) и (142) представляют частные случаи одной более общей формулы, которую мы установим дальше (§ 42).

Можно вывести их непосредственно, повторяя рассуждения, приводящие к (139)¹⁾ или (141)²⁾.

Исходя из следующего равенства, определяющего $A_{mm'}$,

$$(143) \quad 4\pi^2 \cdot A_{mm'} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F \cdot e^{-i(m\zeta + m'\zeta')} d\zeta d\zeta',$$

положим

$$e^{-i(m\zeta + m'\zeta')} = \frac{d^2 f}{d\zeta d\zeta'},$$

где

$$f = -\frac{1}{mm'} e^{-i(m\zeta + m'\zeta')}.$$

¹⁾ Cauchy [11, c]. Poincaré, [49, b, p. 40].

²⁾ Poincaré [49, b, p. 47].

Интегрируя два раза по частям, сперва по v и ζ , а затем по v' и ζ' , преобразуем интеграл правой части равенства (143) в следующий

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F \frac{d^2 f}{d\zeta d\zeta'} d\zeta d\zeta' = - \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dF}{dv} \cdot \frac{df}{d\zeta'} dv d\zeta' = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d^2 F}{dv dv'} f dv dv'.$$

Поэтому

$$-4\pi^2 A_{mm'} \cdot mm' = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d^2 F}{dv dv'} e^{-i(m\zeta + m'\zeta')} dv dv',$$

или в силу равенства (138) и уравнений между ζ , v и ζ' , v'

$$\begin{aligned} 4\pi^2 \cdot mm' \cdot A_{mm'} &= \sum_{q, q'=-\infty}^{+\infty} qq' C_{qq'} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(qv + q'v')} \cdot e^{-i(m\zeta + m'\zeta')} dv dv' = \\ &= \sum_{q, q'=-\infty}^{+\infty} qq' C_{qq'} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i[(q-m)v + me_1 \sin v + me_2 \sin 2v + \dots] + i[(q'-m')v' + m'e'_1 \sin v' + m'e'_2 \sin 2v' + \dots]} dv dv', \end{aligned}$$

или, наконец, (§ 7, форм. (27))

$$A_{mm'} = \sum_{q, q'=-\infty}^{+\infty} \frac{qq'}{mm'}, C_{qq'} J_{m-q}(me_1, me_2, \dots) \cdot J_{m'-q'}(m'e'_1, m'e'_2, \dots).$$

Выведенная формула теряет, однако, силу, если m или m' нуль. Ее можно преобразовать тогда в другую, аналогичную формуле (52).

Мы имели разложение (§ 12)

$$e^{iqv} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{q}{m} J_{m-q}(me_1, me_2, \dots) e^{im\zeta},$$

где для $m=0$ надо заменить произведение $\frac{q \cdot J_{m-q}}{m}$ через 1 при $q=0$ и через $-\frac{qe_q}{2}$ при всяком другом значении $\pm q$.

Подобным же образом имеем:

$$e^{iq'v'} = \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \frac{q'}{m'} J_{m'-q'}(m'e'_1, m'e'_2, \dots) e^{im'\zeta'}$$

при том же условии для случая $m'=0$.

В силу этих равенств из разложения

$$F(v, v') = \sum_{q, q'=-\infty}^{+\infty} C_{qq'} e^{i(qv+q'v')}$$

получим следующее

$$F(v, v') = \sum_{m, m', q, q'=-\infty}^{+\infty} \frac{qq'}{mm'} C_{qq'} J_{m-q}(me_1, me_2, \dots) J_{m'-q'}(m'e'_1, m'e'_2, \dots) e^{i(m\zeta+m'\zeta')},$$

которое при m и m' отличных от нуля вновь приводит к формуле (140).

Можно представить эту формулу таким символическим произведением

$$A_{mm'} = \left[\sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{q}{m} J_{m-q}(me_1, me_2, \dots) C_q \right] \left[\sum_{q'=-\infty}^{+\infty} \frac{q'}{m'} J_{m'-q'}(m'e'_1, m'e'_2, \dots) C'_{q'} \right],$$

где после перемножения надо заменить произведение $C_q \cdot C'_{q'}$ через $C_{qq'}$.

Подобным же образом имеем следующие символические произведения

$$A_{0m'} = \left[C_0 - \frac{e_1}{2} (C_1 + C_{-1}) - 2 \frac{e_2}{2} (C_2 + C_{-2}) - \dots \right] \times \left(\sum_{q'=-\infty}^{+\infty} \frac{q'}{m'} J_{m'-q'}(m'e'_1, m'e'_2, \dots) C'_{q'} \right),$$

$$A_{m0} = \left[\sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{q}{m} J_{m-q}(me_1, me_2, \dots) \cdot C_q \right] \times \left[C'_0 - \frac{e'_1}{2} (C'_1 + C'_{-1}) - 2 \frac{e'_2}{2} (C'_2 + C'_{-2}) - \dots \right],$$

$$A_{00} = \left[C_0 - \frac{e_1}{2} (C_1 + C_{-1}) - 2 \frac{e_2}{2} (C_2 + C_{-2}) - \dots \right] \times \left[(C'_0 - \frac{e'_1}{2} (C'_1 + C'_{-1}) - 2 \frac{e'_2}{2} (C'_2 + C'_{-2}) - \dots) \right].$$

Эти равенства аналогичны формуле (52).

Обратимся к выводу формулы (142). Имеем:

$$\zeta' = k\zeta + \alpha,$$

где k и α при рассматриваемом преобразовании считаются постоянными¹⁾.

Далее из уравнений, связывающих ζ и v , ζ' и v'

$$\zeta' = kv + \alpha - ke_1 \sin v - ke_2 \sin 2v - \dots$$

и

$$(144) \quad v_1 = v' - e'_1 \sin v' - e'_2 \sin 2v' - \dots + ke_1 \sin v + ke_2 \sin 2v + \dots,$$

если положить

$$v_1 = kv + \alpha.$$

Мы ищем разложение функции F вида

$$F = \sum_{m, m' = -\infty}^{+\infty} C'_{mm'} e^{i(mv + m'v_1)},$$

где

$$4\pi^2 \cdot C'_{mm'} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F \cdot e^{-i(mv + m'v_1)} dv dv_1.$$

Интегрируя по частям относительно v_1 и v' , т. е. рассматривая v как постоянное, находим

$$-4\pi^2 \cdot C'_{mm'} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{i}{m'} \frac{dF}{dv'} e^{-i(mv + m'v_1)} \cdot dv dv'.$$

¹⁾ В своей теории орбит планет Gylden [18, b] пользуется вместо эллипса Kepler'a так называемой „абсолютной орбитой“, кривой с подвижными апсидами, мало отклоняющейся с течением времени от истинной орбиты планеты. Вместо аномалий ζ , u , v он вводит другие аргументы G , E , F , связанные, однако, друг с другом теми же уравнениями, как и ζ , u , v в теории Kepler'a, именно [p. 83, 85]

$$G = E - \eta \sin E, \quad G = F - B_1 \sin F - B_2 \sin 2F - \dots, \quad B_n = (-1)^n \cdot \frac{2}{n} \frac{1 + n\sqrt{1 - \eta^2}}{(1 + \sqrt{1 - \eta^2})^n} \cdot \eta^n$$

Подобными же уравнениями связаны аргументы G' , E' , F' другой планеты (p. 134, 135), причем $G' = kG + \alpha$, а потому

$$F_1 = F' - B'_1 \sin F' - B'_2 \sin 2F' - \dots + kB_1 \sin F + kB_2 \sin 2F + \dots,$$

где

$$F_1 = kF + \alpha$$

и в обозначениях Gylden'a [p. 135, (5')]

$$k = \varphi, \quad \alpha = U + \Lambda' - \pi' - \varphi(\Lambda - \pi),$$

так что при переходе от F' к F_1 величины k и α можно считать постоянными.

А так как

$$\frac{dF}{dv'} = i \sum_{q, q'=-\infty}^{+\infty} q' C_{qq'} e^{i(qv + q'v')},$$

то •

$$4\pi^2 C'_{mm'} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{q, q'=-\infty}^{+\infty} \frac{q'}{m'} C_{qq'} e^{i(qv + q'v')} \cdot e^{-i(mv + m'v_1)} dv dv'.$$

Отсюда в силу уравнения (144) и интегрального представления функции $J_k(x_1, x_2, \dots)$ (§ 7) имеем окончательно

$$C'_{mm'} = \sum_{q, q'=-\infty}^{+\infty} \frac{q'}{m'} C_{qq'} J_{m-q}(-km'e_1, -km'e_2, \dots) J_{m'-q'}(m'e_1, m'e_2, \dots).$$

Эта формула выведена в предположении $m' \neq 0$. Для случая $m' = 0$ имеем

$$4\pi^2 C'_{m0} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F \cdot e^{-imv} dv dv_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{q, q'=-\infty}^{+\infty} C_{qq'} e^{i[(q-m)v + q'v_1]} dv dv_1.$$

Введем вместо v_1 переменное v' на основании уравнения (144), рассматривая v как постоянное, тогда

$$dv_1 = dv' - e_1' \cos v' dv' - 2e_2' \cos 2v' dv' - \dots$$

и

$$4\pi^2 C'_{m0} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{q, q'=-\infty}^{+\infty} C_{qq'} e^{i[(q-m)v + q'v']} \left(1 - e_1' \frac{e^{iv'} + e^{-iv'}}{2} - 2e_2' \frac{e^{2iv'} + e^{-2iv'}}{2} - \dots \right) dv dv'.$$

т. е.

$$(145) \quad C'_{m0} = C_{m0} - \frac{e_1'}{2} (C_{m,1} + C_{m,-1}) - 2 \frac{e_2'}{2} (C_{m,2} + C_{m,-2}) - 3 \frac{e_3'}{2} (C_{m,3} + C_{m,-3}) - \dots$$

Это равенство можно рассматривать как предельный случай (142) при стремлении m' к нулю.

Формулы (142) и (145) обнимают все различные равенства, данные Gylden'ом на стр. 140 и следующ. его *Traité* [18, b].

42. Условно периодические функции. Как последний пример на приложение функций Bessel'я многих переменных, рассмотрим такую систему обобщенных уравнений Кеплер'a¹⁾.

$$\begin{aligned}\zeta &= v - e_1 \sin v - e_2 \sin 2v - \dots - e'_1 \sin v' - e'_2 \sin 2v' - \dots, \\ \zeta' &= v' - \varepsilon_1 \sin v - \varepsilon_2 \sin 2v - \dots - \varepsilon'_1 \sin v' - \varepsilon'_2 \sin 2v' - \dots,\end{aligned}$$

к которой приводит обширный класс задач механики, где интегрирование уравнений движения выполняется способом Jacobi-Liouville'я и задачи приводятся к квадратурам

$$(146) \quad \begin{cases} t = \int_a^x \frac{f(x) dx}{\sqrt{(x-a)(b-x) \cdot F(x)}} + \int_c^y \frac{f_1(y) dy}{\sqrt{(y-c)(d-y) \cdot F_1(y)}}, \\ 0 = \int_a^x \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{(x-a)(b-x) \Phi(x)}} + \int_c^y \frac{\varphi_1(y) dy}{\sqrt{(y-c)(d-y) \Phi_1(y)}}, \end{cases}$$

где

$$f(x), f_1(y), \varphi(x), \varphi_1(y); F(x), F_1(y), \Phi(x), \Phi_1(y)$$

в промежутках

$$(147) \quad a < x < b, \quad c < y < d$$

конечные, однозначные и непрерывные вещественные функции вещественных координат x, y и t новое переменное — время.

Система (146) представляет обобщение на случай двух переменных уравнения (4), исследованного Weierstrass'ом. Из уравнений этой системы можно определить координаты x, y , как однозначные функции времени, вводя по примеру O. Staudé [60] следующие условия:

1) функции

$$f(x), f_1(y), \varphi(x), \varphi_1(y)$$

для всех рассматриваемых значений (147) переменных x, y сохраняют знак;

2) для тех же значений переменных x, y , как остающиеся положительными функциями

$$F(x), F_1(y), \Phi(x), \Phi_1(y),$$

¹⁾ Мы ограничиваемся для краткости системой двух уравнений, связывающих 4 переменных v, v', ζ, ζ' , но те же рассуждения можно повторить для системы n обобщенных уравнений Кеплер'a, связывающих $2n$ переменных $v, v', \dots, v^{(n-1)}, \zeta, \zeta', \dots, \zeta^{(n-1)}$.

так и определитель

$$\frac{f(x)}{\sqrt{F(x)}} \frac{\varphi_1(y)}{\sqrt{F_1(y)}} - \frac{\varphi(x)}{\sqrt{F(x)}} \frac{f_1(y)}{\sqrt{F_1(y)}}$$

ни разу не обращаются в нуль.

Полагая

$$(148) \quad x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos v, \quad y = \frac{c+d}{2} + \frac{c-d}{2} \cos v',$$

разлагая под интегральные выражения в тригонометрические ряды и производя интегрирование, получим систему уравнений

$$t = a_0 v + a_1 \sin v + a_2 \sin 2v + \dots + a'_0 v' + a'_1 \sin v' + a'_2 \sin 2v' + \dots,$$

$$0 = b_0 v + b_1 \sin v + b_2 \sin 2v + \dots + b'_0 v' + b'_1 \sin v' + b'_2 \sin 2v' + \dots,$$

из которой, в силу введенных условий, v и v' определяются как однозначные функции t .

Эта система легко преобразуется в равносильную следующую

$$(149) \quad \begin{cases} \zeta = v - e_1 \sin v - e_2 \sin 2v - \dots - e'_1 \sin v' - e'_2 \sin 2v' - \dots, \\ \zeta' = v' - \varepsilon_1 \sin v - \varepsilon_2 \sin 2v - \dots - \varepsilon'_1 \sin v' - \varepsilon'_2 \sin 2v' - \dots, \end{cases}$$

где

$$\zeta = \rho t, \quad \zeta' = \rho' t; \quad \rho = \frac{b'_0}{a_0 b'_0 - b_0 a'_0}, \quad \rho' = \frac{-b_0}{a_0 b'_0 - b_0 a'_0},$$

$$e_k = -\frac{a_k b'_0 - b_k a'_0}{a_0 b'_0 - b_0 a'_0}, \quad e'_k = -\frac{a'_k b'_0 - b'_k a'_0}{a_0 b'_0 - b_0 a'_0},$$

$$\varepsilon_k = -\frac{a_0 b_k - b_0 a_k}{a_0 b'_0 - b_0 a'_0}, \quad \varepsilon'_k = -\frac{a_0 b'_k - b_0 a'_k}{a_0 b'_0 - b_0 a'_0},$$

и, как предполагается,

$$a_0 b'_0 - b_0 a'_0 \neq 0.$$

В силу уравнений последней системы всякую периодическую функцию

$$f(v, v') = \sum_{q, q'=-\infty}^{+\infty} C_{qq'} e^{i(qv + q'v')}$$

от аргументов v, v' можно рассматривать как периодическую функцию

$$\sum_{m, m'=-\infty}^{+\infty} A_{mm'} e^{i(m\zeta + m'\zeta')}$$

от аргументов ζ, ζ' .

Вообще $f(v, v')$ не будет периодической функцией одного переменного t , для этого необходимо условие, чтобы ρ и ρ' были соизмеримы, т. е.

$$\frac{\rho}{n} = \frac{\rho'}{n'} = \tau,$$

или

$$nb_0 + n'b'_0 = 0 \quad \text{и} \quad \rho = n\tau, \quad \rho' = n'\tau,$$

где n и n' целые числа.

Период равен тогда

$$T = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi(a_0b'_0 - b_0a'_0)}{\frac{b_0}{n}} = 2\pi(a_0n + a'_0n').$$

На этом основании функцию

$$f(v, v') = \sum_{q, q'=-\infty}^{+\infty} C_{qq'} e^{i(qv+q'v')} = \sum_{m, m'=-\infty}^{+\infty} A_{mm'} e^{i(m\zeta+m'\zeta')}$$

называют условно периодической функцией переменного t .

Согласно этому определению, в силу формул (148), координаты x, y выражаются условно периодическими функциями времени.

Разыщем связь между коэффициентами $C_{qq'}$ и $A_{mm'}$.

Имеем

$$A_{mm'} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(v, v') e^{-i(m\zeta+m'\zeta')} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial v} \cdot \frac{\partial \zeta'}{\partial v'} - \frac{\partial \zeta}{\partial v'} \cdot \frac{\partial \zeta'}{\partial v} \right) dv \cdot dv'.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A_{mm'} &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{q, q'=-\infty}^{+\infty} C_{qq'} \int_0^{2\pi} e^{i(qv-mv+m \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \sin kv + m' \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon'_k \sin kv)} \frac{\partial \zeta}{\partial v} dv \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} e^{i(q'v'-m'v'+m \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon'_k \sin kv' + m' \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \sin kv')} \frac{\partial \zeta'}{\partial v'} dv' \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{q, q'=-\infty}^{+\infty} C_{qq'} \int_0^{2\pi} e^{i(qv-mv+m \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \sin kv + m' \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon'_k \sin kv)} \frac{\partial \zeta}{\partial v} dv \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} e^{i(q'v'-m'v'+m \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon'_k \sin kv' + m' \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \sin kv')} \frac{\partial \zeta'}{\partial v'} dv'. \end{aligned}$$

В силу разложения

$$(10) \quad e^{\frac{x_1}{2}(t-t^{-1}) + \frac{x_2}{2}(t^2-t^{-2}) + \dots} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(x_1, x_2, \dots) t^p,$$

или

$$e^{i(x_1 \sin \varphi + x_2 \sin 2\varphi + \dots)} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(x_1, x_2, \dots) e^{ip\varphi}$$

в первом произведении двух интегралов можно положить

$$e^{im' \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \sin kv} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} J_r(m' \varepsilon_1, m' \varepsilon_2, \dots) e^{irv},$$

$$e^{im \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k' \sin kv'} = \sum_{r'=-\infty}^{+\infty} J_{r'}(me_1', me_2', \dots) e^{ir'v'},$$

а во втором

$$e^{im \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \sin kv} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_s(me_1, me_2, \dots) e^{isv},$$

$$e^{im' \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k' \sin kv'} = \sum_{s'=-\infty}^{+\infty} J_{s'}(m' \varepsilon_1', m' \varepsilon_2', \dots) e^{is'v'}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} A_{mm'} = & \sum_{q, q', r, r'=-\infty}^{+\infty} C_{qq'} J_r(m' \varepsilon_1, m' \varepsilon_2, \dots) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i[(q+r)v - mv + m \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \sin kv]} \frac{\partial \zeta}{\partial v} dv \right\} \\ & \times J_{r'}(me_1', me_2', \dots) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i[(q'+r')v' - m'v' + m' \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k' \sin kv']} \frac{\partial \zeta'}{\partial v'} dv' \right\} \\ & - \sum_{q, q', s, s'=-\infty}^{+\infty} C_{qq'} J_s(me_1, me_2, \dots) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i[(q-m+s)v + m' \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \sin kv]} \frac{\partial \zeta'}{\partial v} dv \right\} \\ & \times J_{s'}(m' \varepsilon_1', m' \varepsilon_2', \dots) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i[(q'-m'+s')v' + m \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k' \sin kv']} \frac{\partial \zeta}{\partial v'} dv' \right\}, \end{aligned}$$

откуда, интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned}
 A_{mm'} = & \sum_{q, q', r, r' = -\infty}^{+\infty} \frac{q+r}{m} \cdot \frac{q'+r'}{m'} C_{qq'} J_r(m' \varepsilon_1, m' \varepsilon_2, \dots) \cdot J_{m-q-r}(m \varepsilon_1, m \varepsilon_2, \dots) \\
 & \times J_{r'}(m \varepsilon_1', m \varepsilon_2', \dots) \cdot J_{m'-q'-r'}(m' \varepsilon_1', m' \varepsilon_2', \dots) \\
 & - \sum_{q, q', s, s' = -\infty}^{+\infty} \frac{q-m+s}{m'} \cdot \frac{q'-m'+s'}{m} C_{qq'} J_s(m \varepsilon_1, m \varepsilon_2, \dots) J_{m-q-s}(m' \varepsilon_1, m' \varepsilon_2, \dots) \\
 & \times J_{s'}(m' \varepsilon_1', m' \varepsilon_2', \dots) J_{m'-q'-s'}(m \varepsilon_1', m \varepsilon_2', \dots)
 \end{aligned}$$

Так как указатель $m-q-s$ одновременно с s и указатель $m'-q'-s'$ одновременно с s' принимают все различные целые значения от $-\infty$ до $+\infty$, то можно положить $m-q-s=r$ и $m'-q'-s'=r'$, откуда $s=m-q-r$ и $s'=m'-q'-r'$.

Таким образом имеем окончательно

$$\begin{aligned}
 (150) \quad A_{mm'} = & \sum_{q, q', r, r' = -\infty}^{+\infty} \frac{qq'+qr'+q'r}{mm'} C_{qq'} J_r(m' \varepsilon_1, m' \varepsilon_2, \dots) J_{m-q-r}(m \varepsilon_1, m \varepsilon_2, \dots) \\
 & \times J_{r'}(m \varepsilon_1', m \varepsilon_2', \dots) \cdot J_{m'-q'-r'}(m' \varepsilon_1', m' \varepsilon_2', \dots).
 \end{aligned}$$

В случаях часто встречающихся в задачах механики переменные $e_1, e_2, \dots, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ и $e_1', e_2', \dots, \varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots$ представляют ряды, расположенные по степеням малых величин ε и ε' , и $e_1, e_2, \dots, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ содержат множителем ε , а $e_1', e_2', \dots, \varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots$ множителем ε' соответственно в степенях 1, 2, ... Коэффициент $C_{qq'}$ представляет подобный же ряд, содержащий множителями ε и ε' соответственно в степенях $|q|$ и $|q'|$. Из формулы (150) и рассуждений § 10 следует, что коэффициент $A_{mm'}$ представляет тогда подобный же ряд, содержащий множителями ε и ε' соответственно в степенях $|m|$ и $|m'|$.

Этот результат выводит Норт [24, е, р. 204—208] путем довольно продолжительных вычислений.

Отметим следующие наиболее важные в приложениях частные случаи, где формула (150) значительно упрощается.

1. Система (§ 41)

$$\zeta = v - e_1 \sin v - e_2 \sin 2v - \dots,$$

$$\zeta' = v' - e_1' \sin v' - e_2' \sin 2v' - \dots$$

представляет частный случай системы (149), если в этой последней принять

$$e_1' = e_2' = \dots = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = 0$$

и вместо $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots$, изменяя обозначения, положить $e_1', e_2', \dots$.

Тогда из формулы (150), замечая, что неравными нулю остаются только члены, где $r=r'=0$, получаем, как частный случай, формулу (140).

II. Уравнение (§ 41)

$$v_1 = v' - e_1' \sin v' - e_2' \sin 2v' - \dots + ke_1 \sin v + ke_2 \sin 2v + \dots$$

представляет частный случай системы (149), если в этой системе положить

$$\zeta = v, \zeta' = v_1, e_1 = e_2 = \dots = e_1' = e_2' = \dots = 0$$

и ввести обозначения

$$\varepsilon_1' = e_1', \varepsilon_2' = e_2', \dots, \varepsilon_1 = -ke_1, \varepsilon_2 = -ke_2, \dots$$

Тогда из формулы (150), замечая, что в ней следует считать

$$m - q - r = 0, r' = 0,$$

получим, как частный случай, формулу (142).

III. Если функция $f(v, v') = \sum_{q, q'=-\infty}^{+\infty} C_{q, q'} e^{i(qv + q'v')}$ выражает координаты (148) x, y , то все коэффициенты $C_{q, q'}$ обращаются в ноль, кроме

$$C_{00} \text{ и } C_{\pm 10} \text{ или } C_{0\pm 1}.$$

Ряд правой части формулы (150) приводится поэтому к двукратному ряду, где суммирование распространяется на r и r' .

Этот двукратный ряд можно привести к простому, пользуясь формулой сложения (§ 22).

$$\begin{aligned} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} J_r(m' \varepsilon_1, m' \varepsilon_2, \dots) J_{m \mp 1 - r}(me_1, me_2, \dots) = \\ = J_{m \mp 1}(me_1 + m' \varepsilon_1, me_2 + m' \varepsilon_2, \dots) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sum_{r'=-\infty}^{+\infty} J_{r'}(me_1', me_2', \dots) J_{m \mp 1 - r'}(m' \varepsilon_1', m' \varepsilon_2', \dots) = \\ = J_{m \mp 1}(me_1' + m' \varepsilon_1', me_2' + m' \varepsilon_2', \dots). \end{aligned}$$

IV. Наиболее часто в задачах механики система (146) приводится к следующей ¹⁾

$$t = \int_c^y \frac{f_1(y) dy}{\sqrt{(y-c)(d-y) F_1(y)}},$$

$$0 = - \int_0^x \frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)}} + \int_c^y \frac{\varphi_1(y) dy}{\sqrt{(y-c)(d-y) \Phi_1(y)}},$$

которая равносильна такой

$$(151) \quad \begin{cases} t = a'_0 v' + a'_1 \sin v' + a'_2 \sin 2v' + \dots, \\ 0 = v + b'_0 v' + b'_1 \sin v' + b'_2 \sin 2v' + \dots, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \xi = v - e'_1 \sin v' - e'_2 \sin 2v' - \dots, \\ \xi' = v' - \varepsilon'_1 \sin v' - \varepsilon'_2 \sin 2v' - \dots \end{cases}$$

Кроме того функция $f(v, v')$ выражается обычно простым тригонометрическим рядом ²⁾

$$\left(\sum_{q'=-\infty}^{+\infty} C_{1q'} e^{iq'v'} \right) e^{iv} + \left(\sum_{q'=-\infty}^{+\infty} C_{-1q'} e^{iq'v'} \right) e^{-iv}.$$

Полагая поэтому в формуле (150)

$$e_1 = e_2 = \dots = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = 0 \text{ и } C_{qq'} = 0 \text{ при } q \neq \pm 1,$$

следует удерживать в ней, как не равные нулю, лишь те члены с $C_{1q'}$ и $C_{-1q'}$, где

$$r=0, \quad m-q-r=0, \quad \text{т. е. } m=q=\pm 1.$$

Значит в этом случае двукратный тригонометрический ряд

$$\sum_{m, m'=-\infty}^{+\infty} A_{mm'} e^{i(m\xi + m'\xi')}$$

сводится к такому простому ³⁾

$$\left(\sum_{m'=-\infty}^{+\infty} A_{1m'} e^{im'\xi'} \right) e^{i\xi} + \left(\sum_{m'=-\infty}^{+\infty} A_{-1m'} e^{im'\xi'} \right) e^{-i\xi},$$

¹⁾ Staudé [60, § 11].

²⁾ См. предыдущую сноску.

³⁾ Этот результат выводит О. Staudé [60, § 11] путем продолжительных вычислений.

выражающему $f(v, v')$, по прежнему, как условно периодическую функцию t . Здесь

$$A_{\pm 1m'} = \sum_{q', r' = -\infty}^{+\infty} \frac{q' + r'}{m'} C_{\pm 1q'} J_r(\pm e_1', \pm e_2', \dots) J_{m'-q'-r'}(m' \varepsilon_1', m' \varepsilon_2', \dots).$$

43. Малые колебания сферического маятника. Как пример на применение результатов предыдущего §^а рассмотрим движение сферического маятника.

Уравнения движения сферического маятника были приведены к системе (151) еще Lagrange'ем [33] и с помощью подобной же системы исследованы Tisserand'ом [63, а] малые колебания сферического маятника около наинизшего положения равновесия¹⁾.

Применим предыдущие выводы к этому последнему случаю движения маятника.

Пусть l длина маятника, g ускорение силы тяжести, θ угол маятника с вертикальным направлением, положительным вниз, θ_1 maximum, θ_2 minimum θ , φ угол вертикальной плоскости маятника с начальным положением этой плоскости.

Координаты маятника можно выразить так

$$x = l \sin \theta \cdot \cos \varphi, \quad y = l \sin \theta \cdot \sin \varphi, \quad z = l \cos \theta.$$

Вводя начальные условия

$$t = 0, \quad \theta = \theta_1 \quad \text{и} \quad \varphi = 0$$

и полагая

$$\sin \theta_1 = k_1, \quad \sin \theta_2 = k_2, \quad \sin^2 \theta = k_1^2 \cos^2 \psi + k_2^2 \sin^2 \psi,$$

где ψ вспомогательный угол, равный нулю при $t = 0$, Tisserand приводит уравнения движения сферического маятника к следующей системе

$$nt = \left[1 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{16} + \frac{25(k_1^4 + k_2^4) - 26k_1^2 k_2^2}{1024} + \dots \right] \psi + \\ + (k_1^2 - k_2^2) \left(\frac{3}{32} + 25 \frac{k_1^2 + k_2^2}{512} + \dots \right) \sin 2\psi + (k_1^2 - k_2^2)^2 \left(\frac{35}{4096} + \dots \right) \sin 4\psi + \dots,$$

¹⁾ Норт [24, f] исследовал с помощью системы (151) движение тяжелой точки по поверхности вращения при малых отклонениях ее от параллели, и с помощью системы (149) [24, e, p. 215] колебания тяжелой точки около наинизшего положения равновесия на эллиптическом параболоиде с вертикально направленной вверх осью.

$$\varphi = \arctg \left(\frac{k_2}{k_1} \operatorname{tg} \psi \right) + k_1 k_2 \left(\frac{3}{8} + 27 \frac{k_1^2 + k_2^2}{256} + \dots \right) \psi +$$

$$+ k_1 k_2 (k_1^2 - k_2^2) \left(\frac{35}{512} + \dots \right) \sin 2\psi + \dots,$$

$$n = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Если положить $\varphi = \arctg \left(\frac{k_2}{k_1} \operatorname{tg} \psi \right) + v$ и $\psi = v'$, эту систему легко привести к виду

$$)152) \quad \begin{cases} \zeta = v - \varepsilon'_2 \sin 2v' - \varepsilon'_4 \sin 4v' - \dots, \\ \zeta' = v' - \varepsilon'_2 \sin 2v' - \varepsilon'_4 \sin 4v' - \dots, \end{cases}$$

где $\zeta = \rho \cdot t$, $\zeta' = \rho' \cdot t$ и

$$\rho = \frac{n k_1 k_2 \left(\frac{3}{8} + 27 \cdot \frac{k_1^2 + k_2^2}{256} + \dots \right)}{1 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{16} + \frac{25(k_1^4 + k_2^4) - 26 k_1^2 k_2^2}{1024} + \dots},$$

$$\rho' = \frac{n}{1 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{16} + \frac{25(k_1^4 + k_2^4) - 26 k_1^2 k_2^2}{1024} + \dots};$$

$$\varepsilon'_2 = \frac{k_1 k_2 (k_1^2 - k_2^2) \left(\frac{17}{512} + \dots \right)}{1 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{16} + \frac{25(k_1^4 + k_2^4) - 26 k_1^2 k_2^2}{1024} + \dots},$$

$$\varepsilon'_2 = - \frac{(k_1^2 - k_2^2) \left(\frac{3}{32} + 25 \frac{k_1^2 + k_2^2}{512} + \dots \right)}{1 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{16} + \frac{25(k_1^4 + k_2^4) - 26 k_1^2 k_2^2}{1024} + \dots}.$$

Так как $\cos \varphi = \cos \left[\arctg \left(\frac{k_2}{k_1} \operatorname{tg} \psi \right) \right] \cos v - \sin \left[\arctg \left(\frac{k_2}{k_1} \operatorname{tg} \psi \right) \right] \sin v$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k_2^2}{k_1^2} \operatorname{tg}^2 \psi}} \cos v - \frac{\frac{k_2}{k_1} \operatorname{tg} \psi}{\sqrt{1 + \frac{k_2^2}{k_1^2} \operatorname{tg}^2 \psi}} \sin v =$$

$$= \frac{k_1 \cos \psi \cos v}{\sin \theta} - \frac{k_2 \sin \psi \sin v}{\sin \theta} \quad \text{и} \quad \sin \varphi = \frac{k_2 \sin \psi \cos v}{\sin \theta} + \frac{k_1 \cos \psi \sin v}{\sin \theta},$$

то выражения для координат x , y , z будут следующие

$$x = l (k_1 \cos v' \cdot \cos v - k_2 \sin v' \cdot \sin v),$$

$$y = l (k_2 \sin v' \cdot \cos v + k_1 \cos v' \cdot \sin v),$$

$$z = l \cdot \sqrt{1 - [k_1^2 - (k_1^2 - k_2^2) \sin^2 \psi]}$$

$$= l \cdot \left\{ 1 - \frac{k_1^2 + k_2^2}{4} + \dots - \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{4} + \dots \right) \cos 2v' + \dots \right\},$$

а потому эти координаты на основании формул предыдущего §^а выражаются простыми тригонометрическими рядами в функции времени, при том x и y будут условно периодическими, а z просто периодической функциями t .

Если повернуть систему координат x , y в ее плоскости на угол v , новые координаты будут

$$\xi = a \cdot \cos v', \quad \eta = b \cdot \sin v',$$

где

$$a = l \cdot k_1, \quad b = l \cdot k_2.$$

Проекция маятника на плоскость xu движется поэтому по эллипсу $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$ и положение ее на этом эллипсе в данный момент определяется эксцентрической аномалией v' , а большая ось эллипса составляет в этот момент с неподвижной осью x угол v .

Из уравнений (152) на основании формул (2) и (53) получаем следующие выражения для v и v' в функции времени

$$v' = \zeta' + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(0, k\epsilon'_2, 0, k\epsilon'_4, 0 \dots) \sin k\zeta',$$

т. е. (§ 10)

$$v' = \zeta' + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_m(2m\epsilon'_2, 2m\epsilon'_4, \dots) \sin 2m\zeta'$$

и

$$v = \zeta + \sum_{m=1}^{\infty} A_{2m} \sin 2m\zeta',$$

$$A_{2m} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q}{m} e'_{2q} [J_{m-q}(2m\epsilon'_2, 2m\epsilon'_4, \dots) - J_{m+q}(2m\epsilon'_2, 2m\epsilon'_4, \dots)].$$

Если k_1 и k_2 бесконечно малы и высшими степенями их (выше четвертой) можно пренебречь, при вычислении функций $J_k(x_1, x_2, \dots)$ по формуле (12) достаточно ограничиться их первыми членами.

Получим результат

$$v' = \zeta' - (k_1^2 - k_2^2) \left(\frac{3}{32} + 11 \frac{k_1^2 + k_2^2}{256} + \dots \right) \sin 2\zeta' + \\ + (k_1^2 - k_2^2)^2 \left(\frac{1}{4096} + \dots \right) \sin 4\zeta' + \dots$$

$$v = \zeta + k_1 k_2 (k_1^2 - k_2^2) \left(\frac{17}{512} + \dots \right) \sin 2\zeta' + \dots^1),$$

тождественный с приведенным у Tisserand'a.

R é s u m é.

L'objet du présent travail²⁾ est l'étude des fonctions qui se rencontrent d'abord sous la forme d'intégrale définie

$$(1) \quad J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(kv - x_1 \sin v - x_2 \sin 2v - \dots - x_m \sin mv - \dots) dv,$$

comme les coefficients du développement en série

$$(2) \quad v = \zeta + 2 \sum \frac{1}{k} J_k(ke_1, ke_2, \dots, ke_m, \dots) \sin k\zeta$$

de la solution de l'équation

$$(3) \quad v - e_1 \sin v - e_2 \sin 2v - \dots - e_m \sin mv - \dots = \zeta^3).$$

Dans le cas particulier d'une variable ($m=1$) on a l'équation classique de Kepler

$$v - e_1 \sin v = \zeta$$

et sa solution donnée par Bessel [6, p. 21]

$$v = \zeta + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke_1) \sin k\zeta,$$

¹⁾ Если ограничиться первым порядком величин k_1 и k_2 , при неограниченном возрастании i нельзя заключать, что $\zeta = 0$, и считать, как делается обычно, эллипс неподвижным [32, b, § 75].

²⁾ Ce travail, présenté à la Rédaction le 11 mars 1926, est une réimpression, avec quelques petites additions, de la Thèse lithographiée de l'auteur [3, d] publiée en 1922.

Remarque de la Rédaction.

³⁾ Le nombre des variables $x_1, x_2, \dots, x_m$ ou $e_1, e_2, \dots, e_m$ avec certaines restrictions pour elles peut être illimité.

où

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kv - x \sin v) dv$$

est la fonction bien connue de Bessel.

Par analogie avec ce cas, appelons l'équation (3) équation de Kepler généralisée et la fonction

$$J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$$

fonction de Bessel de plusieurs variables.

A. l'équation (3) aboutissent plusieurs problèmes de mécanique. De même qu'à l'équation de Kepler, elle se rencontre d'abord dans la mécanique céleste.

Tel est le développement de l'équation du centre $v - \zeta$ suivant les sinus des multiples de l'anomalie vraie v , où ζ est l'anomalie moyenne d'une planète.

Le problème de l'inversion de cette série, c'est-à-dire le développement de l'équation du centre suivant les sinus des multiples de l'anomalie moyenne ζ a été considéré par Clairaut et d'Alembert et puis par plusieurs autres géomètres¹⁾.

C'est Schlämilch qui, en 1849, dans sa monographie *Die allgemeine Umkehrung gegebener Funktionen* [56, a] a obtenu, le premier, la solution de l'équation (3) sous la forme de la série (2) et a représenté les coefficients de cette série sous la forme des intégrales définies (1).

Puis en 1866 dans son mémoire *Ueber eine Gattung reell periodischer Funktionen* [67] Weierstrass a lié avec le problème de l'inversion de la série²⁾ celui de l'inversion de l'intégrale

$$(4) \quad \int_{x_0}^x \frac{dx}{\pm \sqrt{(1-x^2)F(x)}} = t$$

qui se rencontre dans le grand nombre de problèmes de mécanique³⁾.

Ici $F(x)$ est la fonction continue et positive de l'argument réel x

¹⁾ Voir l'article de H. Burkhardt [9, a, № 19, p. 944].

²⁾ Ici se rapportent tous les problèmes, où l'équation des forces vives avec les autres équations du mouvement conduit à l'équation

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (1-x^2)F(x),$$

où x est une des coordonnées et t est le temps. Tels sont: le problème du mouvement du point sous l'action de la force centrale à la condition d'existence de la fonction des forces; quelques cas du mouvement du point sur la surface (en particulier— les pendules); divers cas du mouvement d'un corps autour d'un point fixe etc. Voir le mémoire de M. Staudé [60].

qui ne devient pas une seule fois zéro ou infini dans tout l'intervalle de -1 à $+1$, y compris ses limites. Le radical a le signe $+$ ou $-$ selon que x croît ou décroît, et

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq x_0 \leq 1.$$

L'équation (4) définit x comme fonction périodique de t avec la période $[A b e l]$

$$T = 2 \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) F(x)}}.$$

En posant $x = \mp \cos v$ et en développant la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{F(\mp \cos v)}}$$

en série trigonométrique, Weierstrass a ramené l'équation (4) à la forme (3), où ζ est une fonction linéaire de t , et a établi le développement en série

$$(5) \quad \mp x = \cos v = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\zeta,$$

où

$$A_k = \frac{1}{k\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \cos [(k-1)v - k e_1 \sin v - k e_2 \sin 2v - \dots] dv - \right. \\ \left. - \int_0^{\pi} \cos [(k+1)v - k e_1 \sin v - k e_2 \sin 2v - \dots] dv \right\}.$$

Les formules de Weierstrass contiennent aussi le développement plus général

$$(6) \quad \cos p v = -\frac{p e_p}{2} + \\ + p \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos [(k-p)v - k e_1 \sin v - k e_2 \sin 2v - \dots] dv - \right. \\ \left. - \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos [(k+p)v - k e_1 \sin v - k e_2 \sin 2v - \dots] dv \right\} \cos k \zeta$$

et le développement de la fonction arbitraire

$$G(x) = \sum_{p=0}^{\infty} C_p \cos pv$$

en série

$$(7) \quad G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos k\zeta,$$

où B_k se compose des intégrales

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos[(k \pm p)v - ke_1 \sin v - ke_2 \sin 2v - \dots] dv, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Il faut, cependant, remarquer qu'en introduisant les intégrales

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kv - x_1 \sin v - x_2 \sin 2v - \dots - x_m \sin mv - \dots) dv,$$

ni Schlömilch, ni Weierstrass ne les considèrent comme les fonctions des arguments $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$. Au contraire, en mentionnant à la page 6¹⁾ de son mémoire que les formules (5), (6) et (7) renferment les intégrales de Bessel et Hansen²⁾, Weierstrass dit: «In den meisten Fällen aber, selbst wenn die Funktion $F(x)$ eine einfache Form hat, sind die Coefficienten A_k, B_k sehr complicirt zusammengesetzte Grössen, deren direkte Entwicklung aus den aufgestellten Ausdrücken schwierig erscheint.»

Ce n'est que M. P. Appell [4, b]³⁾ qui en 1915 a proposé de considérer les intégrales (1) comme une généralisation de la fonction classique de Bessel $J_k(x)$ pour le cas de plusieurs variables $x_1, x_2, \dots, x_m$ ⁴⁾.

¹⁾ Werke, [67].

²⁾ Comme un cas particulier pour $e_2 = e_3 = e_m = \dots = 0$.

³⁾ M. P. Appell fait une première approximation avant l'inversion de l'intégrale (4), en représentant $\frac{1}{\sqrt{F(x)}}$ dans l'intervalle $-1, +1$ par un polynôme.

⁴⁾ Une généralisation des fonctions de Bessel pour le cas de plusieurs variables se rencontre aussi dans le mémoire de M. Whittaker [68, a, p. 351]. Cependant les fonctions introduites par cet auteur ne présentent pas une si profonde analogie avec les fonctions ordinaires de Bessel comme les fonctions considérées dans le travail présent.

M. J. P é r è s [46] a indiqué ensuite pour les fonctions $J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$ les relations

$$(8) \quad \frac{\partial J_k}{\partial x_m} = \frac{1}{2} (J_{k-m} - J_{k+m}), \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$(9) \quad k J_k = \frac{1}{2} [x_1 (J_{k-1} + J_{k+1}) + 2x_2 (J_{k-2} + J_{k+2}) + \dots + mx_m (J_{k-m} + J_{k+m}) + \dots],$$

qui conduisent, dans le cas d'un nombre limité de n variables, au système d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre admettant $2n$ solutions linéairement indépendantes, dont l'une est la fonction $J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ elle-même, et équivalent pour cette fonction à l'équation de Bessel pour $J_k(x)$.

Enfin M. B. Jekhowsky ¹⁾ [26, a, b] a donné pour la fonction $J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ l'expression sous la forme de série infinie

$$(10) \quad \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_{k-np}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) J_p(x_n)$$

et a étudié quelques propriétés de ces fonctions [26].

Dé mon côté, en étudiant les fonctions de Bessel généralisées j'ai obtenu les résultats suivants [3].

Après avoir trouvé pour $J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$ la fonction génératrice

$$(10) \quad e^{\frac{x_1}{2}(t-t^{-1}) + \frac{x_2}{2}(t^2-t^{-2}) + \dots + \frac{x_m}{2}(t^m-t^{-m}) + \dots} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) t^k$$

je déduis de l'égalité (10) quatre développements des fonctions $J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$ en séries.

¹⁾ En 1927 a paru la Thèse (Paris) de M. B. Jekhowsky „Etude sur les transcendentes Fourier-Bessel à plusieurs variables“ dont la seconde partie (p. 17—31) est une traduction textuelle (faite avec des erreurs et avec la restriction de $n=2$, mais sans citer ma Thèse) des §§ 13 (renvoi à la page 51 et 52), 16, 17, 20—24. et 29 (voir les §§ 15, 18, 19, 22—26 et 31 du présent travail) de ma Thèse lithographiée (1922) qui a été bien connue de M. B. Jekhowsky.

Le premier sous la forme de série multiple de produits des fonctions de Bessel ordinaires

$$(11) \quad J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) =$$

$$= \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} J_{k-2k_2-\dots-mk_m-\dots}(x_1) J_{k_2}(x_2) \dots J_{k_m}(x_m) \dots$$

Le deuxième sous la forme de série

$$(12) \quad J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{V_{k+s}(x_1, x_2, \dots, x_{k+s}) \cdot V_s(-x_1, -x_2, \dots, -x_s)}{2^{k+2s} \cdot 1.2 \dots (k+s) \cdot 1.2 \dots s}$$

de produits des polynomes $V_r(x_1, x_2, \dots, x_r)$, $r=0, 1, 2, \dots$, définis par le développement

$$(13) \quad e^{\frac{1}{2}(x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_m t^m + \dots)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{V_r(x_1, x_2, \dots, x_r)}{2^r \cdot 1.2 \dots r} t^r$$

et satisfaisant à la relation

$$(14) \quad V_r = x_1 V_{r-1} + 2 \cdot 2(r-1) x_2 V_{r-2} + 2^2 \cdot 3(r-1)(r-2) x_3 V_{r-3} + \dots,$$

d'où ils se déduisent successivement.

Du développement (13) ou de la relation (14) on voit que quand le nombre des variables $x_1, x_2, \dots$ de la fonction $J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$ est infiniment grand, les polynomes $V_r(x_1, x_2, \dots, x_r)$ de chaque terme de la série (12) conservent le nombre limité de variables, qui croît graduellement avec l'accroissement de l'ordre du terme.

Pour $m=1$ la série (12) se réduit à la série de puissances pour la fonction de Bessel ordinaire

$$J_k(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{k+2s}}{2^{k+2s} \cdot 1.2 \dots (k+s) \cdot 1.2 \dots s}.$$

Pour $m=2$ et $x_1=x$, $x_2=\frac{y}{2}$

$$V_r\left(x, \frac{y}{2}\right)$$

représentent les polynomes connus qui satisfont à l'équation de la théorie de la chaleur

$$\frac{\partial V_r}{\partial y} = \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2}$$

et qui s'expriment par les polynomes de Tchebýchef [64]—Hermite [22].

Le troisième développement de la fonction $J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$ a la forme

$$(15) \quad J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{r}{2}\right]} \frac{W_r^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)}{1.2 \dots r},$$

où $\left[\frac{r}{2}\right]$ est le plus grand nombre contenu dans $\frac{r}{2}$ et $W_r^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$, $r = 0, 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, 2, \dots$, sont des polynomes homogènes du degré r en $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$ définis par les développements

$$\begin{aligned} (x_1 \sin \varphi + x_2 \sin 2\varphi + \dots)^{2s} &= \frac{1}{2} W_{2s}^{(0)}(x_1, x_2, \dots) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} W_{2s}^{(k)}(x_1, x_2, \dots) \cos k\varphi, \\ (x_1 \sin \varphi + x_2 \sin 2\varphi + \dots)^{2s+1} &= \sum_{k=1}^{\infty} W_{2s+1}^{(k)}(x_1, x_2, \dots) \sin k\varphi. \end{aligned}$$

Ce développement a été employé par G y l d é n pour le calcul des coefficients $J_k(x_1, x_2, \dots)$ du développement (10) dans un cas spécial des arguments $x_1, x_2, \dots$ [18, b, p. 93, 99].

Le polynome

$$(-1)^{\left[\frac{r}{2}\right]} \frac{W_r^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)}{2.1.2 \dots r}$$

représente la somme

$$\frac{1}{2^r} \sum_{n_2=0}^r \dots \sum_{n_m=0}^r \dots N_{-k, n_1, n_2, \dots, n_m, \dots} \frac{x_1^{n_1}}{1.2 \dots n_1} \frac{x_2^{n_2}}{1.2 \dots n_2} \dots \frac{x_m^{n_m}}{1.2 \dots n_m} \dots,$$

où

$$n_1 = r - n_2 - \dots - n_m - \dots \quad \text{et} \quad N_{-k, n_1, n_2, \dots, n_m, \dots}$$

sont des nombres entiers généralisant les nombres de Cauchy auxquels ils se réduisent pour $m = 2$.

Pour les fonctions $J(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$ on obtient ensuite le quatrième développement

$$(16) \quad J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_m=0}^{\infty} \dots N_{-k, n_1, \dots, n_m, \dots} \frac{x_1^{n_1}}{2^{n_1} 1.2 \dots n_1} \frac{x_2^{n_2}}{2^{n_2} 1.2 \dots n_2} \dots \frac{x_m^{n_m}}{2^{n_m} 1.2 \dots n_m} \dots$$

Les formules (11), (12), (15) et (16) servent à calculer les fonctions $J_k(x_1, x_2, \dots)$ avec l'approximation quelconque et donnent le moyen de déterminer les coefficients A_k et B_k des développements (5) et (7).

Je considère ensuite la fonction $J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pour toute la valeur (non entière) de l'indice k en la déterminant comme l'intégrale

$$(17) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{x_1}{2}(t-\frac{1}{t}) + \frac{x_2}{2}(t^2-\frac{1}{t^2}) + \dots + \frac{x_n}{2}(t^n-\frac{1}{t^n})} t^{-k-1} dt,$$

où C est le chemin curviligne d'intégration dans le domaine complexe de la variable t .

Pour $n=1$ l'intégrale (17) est donnée par Schlafli¹⁾ et Sonine [59, p. 12].

On peut la transformer de telle manière, que le chemin d'intégration soit réel. On obtient ainsi, par exemple, l'intégrale

$$J_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(kv - x_1 \sin v - x_2 \sin 2v - \dots - x_n \sin nv) dv$$

$$- \frac{\sin k\pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-x_1 \operatorname{sh} u - x_2 \operatorname{sh} 2u - \dots - (-1)^n x_n \operatorname{sh} nu - ku} du,$$

où

$$\operatorname{sh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \text{ et la partie réelle } = R[(-1)^n x_n] < 0,$$

indiquée dans le cas $n=1$ par Schlafli et pour k entier se réduisant à l'intégrale (1) de Schlömilch—Weierstrass—Appell.

De l'intégrale (17) je déduis aussi une nouvelle expression de la fonction $J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$ sous forme d'intégrale pour la valeur entière de k

$$\frac{1}{ik\pi} \int_0^\pi e^{i(x_1 \cos v - x_2 \cos 3v + \dots)} \cos(x_2 \sin 2v - x_4 \sin 4v + \dots + kv) dv,$$

dans le cas $m=1$ donnée par Hansen [20, a, p. 105].

Le choix convenable du chemin curviligne d'intégration permet d'obtenir de (17) toutes les $2n$ solutions linéairement indépendantes $J_k^{(m)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $m=0, 1, \dots, 2n-1$, du système des équations (8) et (9).

¹⁾ D'après l'indication de Graf [17, p. 136].

On peut considérer cette intégrale comme le cas de limite de l'intégrale hypergéométrique [3, a, f].

pour lesquelles je considère le groupe de substitutions linéaires que subissent ces intégrales, quand la variable x_n fait un tour du point singulier $x_n = 0$, j'établis le théorème de Fuchs et j'indique les développements en séries analogues aux développements (11) et (12), ainsi que la formule d'addition

$$(17) \quad J_k^{(m)}(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(x_1, x_2, \dots, x_n) J_{k-p}^{(m)}(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

$$|x_n| < |y_n|,$$

et conduit à la généralisation de la fonction connue $Y_k(x)$ de C. Neumann pour le cas de plusieurs variables

$$Y_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\cos k\pi J_k(x_1, x_2, \dots, x_n) - J_{-k}(x_1, -x_2, \dots, (-1)^{n-1}x_n)}{\sin k\pi}.$$

J'indique ensuite quelques généralisations pour le cas des fonctions $J_k(x_1, x_2, \dots)$ des séries de Lommel [41, p. 21], de C. Neumann [43, p. 39], de Schlömilch [56, b, p. 155], de Kapteyn [29, p. 103] et de Niels Nielsen [44, c, p. 261—351], procédant suivant les fonctions $J_k(x)$, ou $J_0(kx)$, ou $J_k(kx)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, ainsi que suivant les produits de ces fonctions, et j'établis entre autres la formule

$$(18) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi J_{2k}(2x_1 \cos \alpha, 2x_2 \cos 2\alpha, \dots, 2x_m \cos m\alpha, \dots) d\alpha = [J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)]^2$$

et le développement

$$J_k(px_1, p^2x_2, \dots) = p^k J_k(x_1, x_2, \dots) +$$

$$+ p^{k+1} \frac{V_1 \left[-x_1 \left(p - \frac{1}{p} \right), -x_2 \left(p^2 - \frac{1}{p^2} \right), \dots \right]}{2} J_{k+1}(x_1, x_2, \dots) +$$

$$+ p^{k+2} \frac{V_2 \left[-x_1 \left(p - \frac{1}{p} \right), -x_2 \left(p^2 - \frac{1}{p^2} \right), \dots \right]}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} J_{k+2}(x_1, x_2, \dots) + \dots,$$

pour le cas d'une variable dus à C. Neumann [43, p. 70] et à Bessel [6, p. 35].

La partie finale du travail présent comprend les applications des fonctions de Bessel généralisées aux certains problèmes de mécanique.

Les formules (2) et (11), ou (12), ou (15), ou (16) donnent immédiatement le développement de l'équation du centre $v - \zeta$ suivant les sinus des multiples de l'anomalie moyenne ζ , avec les coefficients sous forme des séries infinies suivant les puissances de l'excentricité e , qui se rencontre chez Laplace [35, a, p. 200] et qui constitue la base pour le développement de la fonction perturbatrice chez Leverrier [37, p. 198—204]. Des formules (2), (12) et (13) s'obtient aussi l'autre représentation de ces coefficients, donnée par Hansen [20, b, p. 276], et de l'expression sous forme d'intégrale (17) — leur représentation approchée asymptotique pour les termes de la série (2) très éloignés (formule de Carlini—Jacobi [10]).

Comme exemple de l'application des fonctions de Bessel généralisées, j'indique encore l'équation du pendule simple, l'équation de la théorie de la flexion des tiges produite par des efforts longitudinaux, l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

qui se rencontre dans la théorie des petites oscillations du système avec un degré de liberté [24, c, d] et dans plusieurs nouvelles recherches sur la mécanique céleste [39, 18, b, p. 7, 21], et l'équation différentielle des petites oscillations dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse.

J'applique ensuite les fonctions de Bessel généralisées aux développements de la fonction perturbatrice en séries trigonométriques doubles suivant les sinus et cosinus des anomalies vraies des planètes troublée et troublant, en établissant pour le passage de ces développements aux développements en séries trigonométriques en fonction des anomalies moyennes de ces planètes la formule, analogue à la formule de Cauchy [11, c] pour le passage des anomalies excentriques aux anomalies moyennes. L'idée de la possibilité de trouver une telle formule se rencontre chez Poincaré [49, b, p. 48].

Le développement de la fonction perturbatrice en série trigonométrique en fonction des anomalies vraies des deux planètes joue un rôle important dans la théorie des perturbations de petites planètes de Gylden qui prend pour la variable indépendante non pas l'anomalie moyenne, comme le fait Leverrier, et non plus l'anomalie excentrique, comme Hansen, mais l'anomalie vraie de la planète troublée [18, b, p. 429; 49, b, p. 47]. L'application des fonctions de Bessel généralisées permet d'établir pour les coefficients de ce développement la formule, analogue à la formule de Hansen [20, c, p. 169, 180] pour les coefficients du développement de la fonction perturbatrice en fonction de l'anomalie excentrique de planète troublée (formule, basée sur l'appli-

cation des fonctions de Bessel ordinaires). L'absence d'une telle formule dans la méthode de Gylden est indiquée par Poincaré [49, b, p. 48].

Je considère enfin les développements

$$F = \sum_{q, q' = -\infty}^{+\infty} C_{qq'} e^{i(qv + q'v')} = \sum_{m, m' = -\infty}^{+\infty} A_{mm'} e^{i(m\zeta + m'\zeta')}.$$

où v, v' et ζ, ζ' sont liés entre elles par le système des équations de Kepler généralisées

$$(19) \quad \begin{cases} v - e_1 \sin v - e_2 \sin 2v - \dots - e'_1 \sin v' - e'_2 \sin 2v' - \dots = \zeta, \\ v' - \varepsilon_1 \sin v - \varepsilon_2 \sin 2v - \dots - \varepsilon'_1 \sin v' - \varepsilon'_2 \sin 2v' - \dots = \zeta'. \end{cases}$$

Si ζ et ζ' sont les fonctions linéaires d'une nouvelle variable t , ces développements déterminent les fonctions dites conditionnellement périodiques de t , qui se rencontrent dans les solutions de plusieurs problèmes de mécanique [Stauda].

Les coefficients $A_{mm'}$ s'expriment en $C_{qq'}$ par des quadratures [60, p. 307, 322; 12, b, p. 106; 24, e, p. 204, 205] que je développe en séries multiples de produits des fonctions de Bessel généralisées, contenant comme cas particuliers la plupart des développements précédents.

Comme le plus simple exemple éclaircissant l'application des formules obtenues, je considère le problème classique de petites oscillations du pendule sphérique dans le voisinage de la position la plus basse d'équilibre.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Abel, (N. H.). — Propriétés remarquables de la fonction $y = \varphi(x)$ déterminée par l'équation $f(y) dy - dx \sqrt{(a_1 - y)(a_2 - y) \dots (a_m - y)} = 0$, $f(y)$ étant une fonction quelconque de y qui ne devient pas nulle ou infinie lorsque $y = a, a_1, \dots, a_m$. *Oeuvres*, t. II, 1881, p. 40—42.

2. Adamoff (A. A.). — Об асимптотических выражениях полиномов $U_n(x)$ при больших значениях n . *Известия С.-Пб. Политехнического Института*, т. V, 1906, стр. 127—143.

3. Akimoff (M. J.). — а. О предельных случаях Р функции Риманна. *Записки Горного Института*, т. I, С.-Петербург, 1907, стр. 87—91.

— b. Transcendantes de Fourier-Bessel à plusieurs variables. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, Paris. — 1) t. 163, 1916, p. 26—29. — 2) t. 165, 1917, p. 23—25. — 3) t. 165, 1917, p. 1100—1103. — 4) t. 185, 1927, p. 409—412.

— c. О некоторых приложениях функций Бесселя многих переменных. *Записки Математического Кабинета Крымского Университета*, т. III, 1921, стр. 64—72.

— d. О функциях Bessel'я многих переменных и их приложениях в механике. Диссертация (литографир.). Петроград, 1922.

— e. Sur l'expression approchée des transcendantes de Fourier-Bessel à plusieurs variables qui se rencontrent dans le problème de Kepler. *Comptes rendus*, t. 179, 1924, p. 435—437.

— f. Sur les fonctions hypergéométriques confluentes. *Comptes rendus*, t. 181, 1925, p. 313—315.

— g. Sur l'application des transcendantes de Fourier-Bessel à plusieurs variables au développement en séries trigonométriques des fonctions conditionnellement périodiques. *Comptes rendus*, t. 183, 1926, p. 333—335.

— h. О функциях Bessel'я многих переменных и их приложениях в механике. *Труды Всероссийского съезда математиков в Москве*, 27 апреля—4 мая 1927 г., стр. 224—225.

— i. Sur les fonctions de Bessel à plusieurs variables. *Journal de la Société Physico-Mathématique de Léningrad*, t. II, fasc. 1, 1928, p. 1—30.

— j. Ueber die Bessel'schen Funktionen mehrerer Variablen. *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*, Bologna, 3—10 Settembre 1928 (VI).

— k. О некоторых приложениях функций Bessel'я многих переменных. *Вестник механики и прикладной математики*, Журнал Ленинградского Механического Общества, т. I, 1929, стр. 10—21.

4. Appell (P. É.). — а. Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ et la Théorie de la chaleur. *Journal de mathématiques*, 4-e série, t. VIII, 1892, p. 187—216.

— b. Sur l'inversion approchée de certaines intégrales réelles et sur l'extension de l'équation de Kepler et des fonctions de Bessel. *Comptes rendus*, t. 160, 1915, p. 419—423.

— c. Sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables. *Memorial des Sciences mathématiques*, Paris, fasc. III, 1925, p. 42.

— d. Notice sur les travaux scientifiques. *Acta mathematica*, t. XLI, 1925, p. 185.

— e. *Traité de Mécanique rationnelle*, Paris, t. I, 5 éd., 1926, p. 340—343, 427.

5. Appell (P. É.) et M. J. Kampé de Fériet. — *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynômes d'Hermite*, Paris, 1926.

6. Bessel (F. W.). Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht. *Abhandlungen der Berliner Akademie*, 1824, p. 1—52. (*Abhandlungen*, Bd. I, 1875, p. 84—109).

7. Bohlin (K.). Über die Bedeutung des Princips der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme. *Acta mathematica*, t. X, 1887, p. 109—130.

8. Bouquet (J. C.) Sur l'intégration d'un système d'équations différentielles totales simultanées du premier ordre. *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. III, 1872, p. 265—274.

9. Burkhardt (H.). — a. Trigonometrische Reihen und Integrale. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. II A12, 1914.

— b. Über Funktionen grosser Zahlen, insbesondere über die näherungsweise Bestimmung entfernter Glieder in den Reihenentwicklungen der Theorie der Keplerschen Bewegung. *Sitzungsberichte der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, 1914, p. 1—11.

— c. Schwingungen unter Einfluss einer dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen Dämpfung. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Bd. LXIII, 1915, p. 303—311.

10. Carlini (F.). *Ricerche sulla convergenza della serie che serve alla soluzione del problema di Keplero*, Milan, 1817. ¹⁾

11. Cauchy (A. L.). — a. *Cours d'analyse*, 1821. Note VIII.

— b. Méthodes propres à simplifier le calcul des inégalités périodiques et séculaires des mouvements des planètes. *Comptes rendus*, t. 12, 1841, p. 84—101. (*Oeuvres*, 1-e série, t. VI, p. 16—34).

— c. Note sur la substitution des anomalies excentriques aux anomalies moyennes, dans le développement de la fonction perturbatrice. *Comptes rendus*, t. 13, 1841, p. 850—854. (*Oeuvres*, 1-e série, t. VI, p. 354—359).

12. Charlier (C. V. L.). — a. Über eine mit dem Problem der drei Körper verwandte Aufgabe. *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg*, VII-e série, t. XXXVI, 1888, № 8.

— b. *Mechanik des Himmels*. Bd. I, 1902.

13. Courant (R.) und D. Hilbert. — *Methoden der mathematischen Physik*, Bd. I, Berlin, 1924.

14. Faber (G.). — Abschätzung von Funktionen grosser Zahlen. *Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, 1922.

15. Flamme (J. B.). — *Recherche des expressions approchées des termes très éloignés dans les développements du mouvement elliptique des planètes*, These, Paris, 1887.

16. Goursat (É. J.) — *Cours d'analyse*, Paris, t. I, 1902; t. III, 1913.

17. Graf (J. H.). — Ueber die Addition und Subtraction der Argumente bei Besselschen Funktionen nebst einer Anwendung. *Mathematische Annalen*, Bd. XLIII, 1893, p. 136—144.

¹⁾ Немецкий перевод сделан Jacobi в *Astronomische Nachrichten*, Bd. XXX, 1850, p. 197—254. (Jacobi (C. G.), *Werke*, Bd. VII, 1891, p. 189—245).

18. G y l d é n (H.). — a. Studien auf dem Gebiete der Störungstheorie. 1. Entwicklung einiger Verbindungen elliptischer Funktionen. *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg*, VII-e série, t. XVI, 1871, № 10.

— b. *Traité analytique des orbites absolues*, t. I, 1893.

19. H a d a m a r d (J.). — Etudes sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. *Journal de Mathématiques*, 4-e série, t. IX, 1893, p. 171—215.

20. H a n s e n (P. A.). — a. Ermittlung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität und Neigung. 1. *Schriften der Sternwarte Seeberg* (Gotha), 1843.

— b. Entwicklung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit den Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen. *Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaft zu Leipzig*, Bd. II, 1855, p. 181—281.

— c. Auseinandersetzung einer zweckmässiger Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten, Abhandlung I. *Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaft zu Leipzig*, Bd. III, 1857.

21. H e i n e (H. E.). — Die Fourier-Bessel'sche Funktion. *Journal für Mathematik*, Bd. LXIX, 1868, p. 128—141.

22. H e r m i t e (Ch.). — Sur un nouveau développement en série de fonctions. *Comptes rendus*, t. 58, 1864, p. 93 et 266—273. (*Oeuvres* t. II, p. 293 et 301).

23. H i l l (G. W.). — a. On the development of the perturbatrice function in periodic series. *The Analyst*, vol. II, 1875, p. 161—180.

— b. The secular perturbation of two planets moving in the same plane; with application to Jupiter and Saturn. *Annals of Mathematics*, vol. V, 1890, p. 177—213.

24. H o r n (J.). — a. Über ein System linearer partieller Differentialgleichungen. *Acta mathematica*, Bd. XII, 1889, p. 113—175.

— b. Beiträge zur Ausdehnung der Fuchs'schen Theorie der linearen Differentialgleichungen auf ein System linearer partieller Differentialgleichungen. *Acta mathematica*, Bd. XIV, p. 337—347.

— c. Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad. (Erster Aufsatz). *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Bd. XLVII, 1902, p. 400—428.

— d. Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad. (Zweiter Aufsatz). *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Bd. XLIX, 1903, p. 246—269.

— e. Bewegungen in der Nähe einer stabilen Gleichgewichtslage. *Journal für Mathematik*, Bd. 126, 1903, p. 194—232.

— f. Zur Theorie der Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche. *Archiv der Mathematik und Physik*, Bd. X, 1906, p. 1—8.

25. J a c o b i (G. G. J.).¹⁾ — Formula transformationis integralium definitorum. *Journal für Mathematik*, Bd. XV, 1836, p. 1—26. (*Werke*, Bd. VI, 1891, p. 86—118).

26. J e k h o w s k y (B.). — a. Les fonctions de Bessel de plusieurs variables exprimées par des fonctions de Bessel d'une variable. *Comptes rendus*, t. 162, 1916, p. 318—319.

— b. Sur la fonction génératrice des fonctions de Bessel à plusieurs variables. *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2-e série, t. XLI, 1917, p. 58—60.

¹⁾ Cm. Carlini.

— c. Sur le développement en série de diverses expressions algébriques au moyen des fonctions de Bessel à plusieurs variables. *Comptes rendus*, t. 164, 1917, p. 719—721.

— d. Généralisation d'un théorème de Cauchy relatif aux développements en séries. *Comptes rendus*, t. 166, 1918, p. 342—344.

— e. Sur la formule générale d'addition des fonctions de Bessel à plusieurs variables. *Bulletin astronomique*, t. XXXIV, 1917, p. 239—243.

— f. Application des fonctions de Bessel à plusieurs variables au mouvement elliptique. *Bulletin astronomique*, t. XXXV, 1918, p. 139—145.

— g. Sur les équations différentielles du second ordre vérifiées par les fonctions de Bessel à plusieurs variables. *Comptes rendus*, t. 170, 1920, p. 1042—1045.

— h. Sur les fonctions de Bessel à deux variables. *Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 1331—1332.

— i. *Etude sur les transcendentes Fourier-Bessel à plusieurs variables*, Thèse, Paris, 1927.

27. Jordan (C.). — *Cours d'analyse*, t. I, 1909; t. III, 1887.

28. Kampé de Fériet (M. J.) et P. É. Appell. Cf. Appell (P. É.) et M. J. Kampé de Fériet.

29. Kapteyn (W.). — Recherches sur les fonctions de Fourier-Bessel. *Annales de l'Ecole normale supérieure*, 3-e série, t. X, 1893, p. 91—122.

30. Kelvin, Lord (W. Thomson) and P. G. Tait. — *Treatise on Natural Philosophy*, Part II, 1903, sect. 642.

31. Klein (F.) und A. Sommerfeld. — *Über die Theorie des Kreisels*, Heft II, 1898, p. 454. Heft III, 1903, p. 519.

32. Kriloff (A. N.). — a. A general theory of the oscillations of a ship on waves. *Transactions of the Institution of Naval Architects*, London, Vol. XL, 1898, p. 1—56.

— b. *Лекции о приближенных вычислениях*, С.-Петербург, 1911.

33. Lagrange (J. L.). — *Mécanique analytique*, t. II, 1889, p. 189, 191.

34. Laguerre (E. N.). — Sur l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$. *Bulletin de la Société*

mathématique de France, t. VII, 1879, p. 72—81. (*Oeuvres*, t. I, 1898, p. 428—437).

35. Laplace (P. S.). — a. *Traité de mécanique céleste*, 4 éd., t. I. *Oeuvres*, t. I, 1878, p. 173, 174, 200.

— b. *Théorie analytique des probabilités*. *Oeuvres*, t. VII, 1886, p. 128—137.

36. Legendre (A. M.). — *Exercices de calcul intégral*, t. I, 1811, p. 170.

37. Le Verrier (U. J.). — Recherches astronomiques. *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. I, 1855.

38. Levi-Civita (T.). — La détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie. *Proceedings of the International Congress for applied mechanics*, Delft, 22—28 April, 1924.

39. Lindstedt (A.). — Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie. *Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Petersburg*, VII-e série, t. XXXI, 1883, N 4.

40. Lořziansky (L. G.). — Sur l'inversion approchée des fonctions. *Recueil Mathématique de Moscou*, t. XXXI, 1923, p. 585; t. XXXII, 1924, p. 22.

41. Lommel (E.). — *Studien über die Bessel'schen Funktionen*, Leipzig, 1868.

42. Nekrassoff (P. A.). — Über lineare Differentialgleichungen, welche mittelst bestimmter Integrale integrirt werden. *Mathematische Annalen*, Bd. XXXVIII, 1891, p. 509—560.

43. Neumann (C.). — *Theorie der Bessel'schen Funktionen*, Leipzig, 1867.

44. Nielsen (N.). — a. Sur le produit de deux fonctions cylindriques. *Mathematische Annalen*, Bd. LII, 1899, p. 228—242.

— b. Sur le développement du zéro en série de fonctions cylindriques. *Mathematische Annalen*, Bd. LII, 1899, p. 582—587.

— c. *Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen*, Leipzig, 1904.

45. Ouspensky (J. V.). — О приближенном выражении коэффициентов удаленных членов в разложении уравнения центра в ряд по синусам кратных средней аномалии. *Известия Российской Академии Наук*, 1921, стр. 333—342.

46. Pérès (J.). — Sur les fonctions de Bessel à plusieurs variables. *Comptes rendus* t. 161, 1915, p. 168—170.

47. Perron (O.). — Über die näherungsweise Berechnung von Funktionen grosser Zahlen. *Sitzungsberichte der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, 1917.

48. Pochhammer (L.). — Über eine binomische lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung. *Mathematische Annalen*, Bd. XXXVIII, 1891, p. 247—262.

49. Poincaré (H.). — a. Sur les fonctions entières. *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XI, 1883, p. 136—144.

— b. *Leçons de mécanique céleste*, t. II, 1907.

50. Poisson (S. D.). — *Traité de mécanique*, t. I, 1833.

51. Resal (H.). — *Traité de mécanique générale*, t. I, 1873.

52. Riemann (B.). — Sullo svolgimento del quoziente die due serie ipergeometrice in frazione continua infinita. *Werke*, 1876, p. 400—406.

53. Routh (E. J.). — a. *A Treatise on Analytical Statics*, vol. II, 1902, p. 282.

— b. *A Treatise on Dynamics of a Particle*, 1898, p. 236—238.

— c. *A Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies*, Part. II, 1884, p. 196—197.

54. Scheibner (W.). — Ueber die asymptotische Werthe der Coefficienten in den nach der mittleren Anomalie vorgenommenen Entwicklungen. *Mathematische Annalen*, Bd. XVII, 1880, p. 545—560.

55. Schläfli (L.). — a. Sulle relazioni tra diversi integrali definiti che giovano ad esprimere la soluzione generale della equazione di Riccati. *Annali di Matematica*, 2-e série t. I, 1868, p. 232—242.

— b. Einige Bemerkungen zu Herrn Neumann's Untersuchungen über die Bessel'schen Funktionen. *Mathematische Annalen*, Bd. III, 1871, p. 134—149.

56. Schlömilch (O.). — a. *Die allgemeine Umkehrung gegebener Funktionen*, Halle, 1849.

— b. Über die Bessel'sche Funktion. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Bd. II, 1857, p. 137—165.

— c. *Compendium der höheren Analysis*, Bd. II, 1895, p. 158—165.

57. Serret (J. A.). — *Traité de Trigonométrie*, 1888.
58. Sommerfeld (A.) und F. Klein. — См. Klein (F.) und A. Sommerfeld.
59. Sonine (N. J.). — Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries. *Mathematische Annalen*, Bd. XVI, 1880, p. 1—80.
60. Staude (O.). — Ueber bedingt periodische Funktionen eines beschränkt veränderlichen complexen Argumentes und Anwendungen derselben auf Mechanik. *Journal für Mathematik*, Bd. 105, 1889, p. 298—328.
61. Tait (P. G.) and Lord Kelvin. — См. Kelvin, Lord (W. Thomson) and P. G. Tait.
62. Timoschenko (S. P.). — Об устойчивости упругих систем. *Известия Киевского Политехнического Института*, год X, книга 4, 1910, стр. 375—560.
63. Tisserand (F.). — a. Sur le mouvement du pendule conique. *Bulletin des sciences mathématiques*, 2-e série, t. V, 1881, p. 448—454.
— b. *Traité de mécanique céleste*, t. I, 1889; t. IV, 1896.
64. Tchebychef (P. L.). — Sur le développement des fonctions à une seule variable. *Bulletin physico-mathématique de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersbourg*, t. I, 1859, p. 193—200 (*Oeuvres*, t. I, p. 501—508).
65. Watson (G. N.). — *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 1922.
66. Watson (G. N.) and E. T. Whittaker. — См. Whittaker (E. T.) and G. N. Watson.
67. Weierstrass (K.). — Ueber eine Gattung reell periodischer Funktionen. *Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1866, p. 97—115. (*Werke*, Bd. II, 1895, p. 1).
68. Whittaker (E. T.). — a. On the partial differential equations of mathematical physics. *Mathematische Annalen*, Bd. LVII, 1903, p. 333—355.
— b. *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, 1917.
69. Whittaker (E. T.) and G. N. Watson. — *A Course of Modern Analysis*, 1920.
-

Оглавление

Т. VII, вып. 2,
стр.

Введение	27— 37
--------------------	--------

ГЛАВА I. Примеры задач, приводящих к обобщенному уравнению Кеплера. Происхождение функций Бесселя многих переменных и выражения их в виде бесконечных рядов	37— 65
---	--------

1. Задача Кеплера	37
2. Математический маятник	38
3. Уравнение теории продольного изгиба	40
4. Уравнение малых колебаний в пустоте	41
5. Уравнение малых колебаний при сопротивлении среды пропорциональном квадрату скорости	43
6. Решение уравнения (3) в виде тригонометрического ряда	45
7. Другие представления функции $J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$	46
8. Производящая функция для $J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$ и разложение функции $J_k(x_1, x_2, \dots)$ в кратный ряд из произведений функций $J_{k_m}(x_m), m=1, 2, \dots$	47
9. Выражение функции $J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$ в виде бесконечного ряда из произведений двух полиномов	49
10. Свойства полиномов $V_s(x_1, x_2, \dots)$	51
11. Другие выражения функции $J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$ в виде бесконечных рядов	58
12. Разложение периодической функции от v в тригонометрический ряд по $\sinus$ 'ам и $\cosinus$ 'ам кратных ζ	60

ГЛАВА II. Об уравнениях, удовлетворяемых обобщенными функциями Бесселя, и общем решении этих уравнений	66— 78
--	--------

13. Возвратные соотношения между функциями $J_k(x_1, x_2, \dots)$ и между ними и их производными	66
14. Дифференциальные уравнения для $J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$	67
15. Число независимых решений системы N уравнений с частными производными для $S_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ или системы (61), (62)	73
16. Особенные точки системы (S)	74
17. Другие уравнения с частными производными для $S_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$	75

стр.

ГЛАВА III. Выражения функций Bessel'я многих переменных и других решений системы (61), (62) или (S) при любом значении указателя k в виде определенных интегралов и разложения их в ряды

18. Решение системы (61), (62) в виде определенного интеграла	78—105
19. Фундаментальная система интегралов уравнений (S) в окрестности $x_n = 0$	78
20. Разложение интеграла S'_k в ряд	82
21. Другое разложение функции S'_k	85
22. Формула сложения	90
23. Выражение функций S''_k, S'''_k через S'_k	93
24. Обобщение функции Neumann'a	99
25. Интегралы между вещественными пределами для функции $J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$	100
	101

Т. VII, вып. 3,

стр.

ГЛАВА IV. Некоторые разложения в ряды по обобщенным функциям Bessel'я

26. Обобщение ряда Lommel'я	1—13
27. Обобщение рядов C. Neumann'a	1
28. Обобщение рядов Kapteyn'a	3
29. Обобщение рядов Schlömilch'a	6
30. Разложение нуля (Nullentwicklung) в ряд Schlömilch'a	7
31. Обобщение рядов Neumann'a, Kapteyn'a и Schlömilch'a 2-го рода	9
32. Обобщение формулы сложения Bessel'я	10
	12

ГЛАВА V. Приложение обобщенных функций Bessel'я к задачам механики

33. Уравнение центра	13—47
34. Формула Laplace'a—Leverrier	13
35. Формула Hansen'a	16
36. Приближенное выражение коэффициентов разложения (130) при больших значениях k , Формула Carlini—Jacobi	18
37. Математический маятник	20
38. Уравнение теории продольного изгиба	24
39. Уравнение малых колебаний в пустоте	27
40. Уравнение малых колебаний при сопротивлении среды, пропорциональном квадрату скорости	28
41. Приложение обобщенных функций Bessel'я к разложениям пертурбационной функции	29
42. Условно периодические функции	30
43. Малые колебания сферического маятника	37
Résumé	44
Литература	47—57
Оглавление	58—63
	64—65

Table des matières

V. VII, fasc. 2,
pages

Introduction	27—37
CHAPITRE I. Exemples des problèmes qui conduisent à l'équation de Kepler généralisée. L'origine des fonctions de Bessel à plusieurs variables et leurs expressions sous forme de séries infinies.	
1. Problème de Kepler	37
2. Pendule simple	38
3. Equation de la théorie de la flexion des tiges produite par des efforts longitudinaux	40
4. Equation des petites oscillations dans le vide	41
5. Equation des petites oscillations dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse	43
6. Solution de l'équation (3) sous forme de série trigonométrique	45
7. Autres représentations de la fonction $J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$	46
8. Fonction génératrice pour $J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$ et le développement de la fonction $J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$ en série multiple suivant les produits des fonctions $J_{k_m}(x_m)$, $m = 1, 2, \dots$	47
9. Expression de la fonction $J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$ sous forme de série infinie de produits de deux polynômes	49
10. Propriétés des polynômes $V_s(x_1, x_2, \dots)$	51
11. Autres représentations de la fonction $J_m(x_1, x_2, \dots)$ sous forme de séries infinies	58
12. Développement d'une fonction périodique deven série trigonométrique suivant les sinus et cosinus des multiples de ζ	60
CHAPITRE II. Sur les équations vérifiées par les fonctions de Bessel généralisées et sur la solution générale de ces équations.	
13. Relations de récurrence entre les fonctions $J_k(x_1, x_2, \dots)$ et entre ces fonctions et leurs dérivées	66
14. Equations différentielles pour $J_k(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$	67
15. Nombre de solutions indépendantes du système de Néquations aux dérivées partielles pour $S_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ou du système (61), (62)	73
16. Points singuliers du système (S)	74
17. Autres équations aux dérivées partielles pour $S_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$	75

	pages
CHAPITRE III. Expressions des fonctions de Bessel à plusieurs variables et d'autres solutions du système (61), (62) ou (S) pour le cas d'indice quelconque sous forme des intégrales définies et leurs développements en séries . . .	78—105
18. Solution du système (61), (62) sous forme d'une intégrale définie	78
19. Système fondamental d'intégrales des équations (S) dans le voisinage de $x_n = 0$	82
20. Développement de l'intégrale S'_k en série	85
21. Autre développement de la fonction S'_k	90
22. Formule d'addition	93
23. Expression des fonctions S''_k, S'''_k par S'_k	99
24. Généralisation de la fonction de Neumann	100
25. Intégrales entre les limites réelles pour la fonction $J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$	101

V. VII, fasc. 3,
pages

CHAPITRE IV. Quelques développements en séries suivant les fonctions de Bessel généralisées	1— 13
26. Généralisation de série de Lommel	1
27. Généralisation de séries de C. Neumann	3
28. Généralisation de séries de Kapteyn	6
29. Généralisation de séries de Schlömilch	7
30. Développement de zéro (Nullentwicklung) en série de Schlömilch	9
31. Généralisation de séries de Neumann, de Kapteyn et de Schlömilch de 2 ^{me} espèce	10
32. Généralisation de la formule d'addition de Bessel	12

CHAPITRE V. Application des fonctions de Bessel généralisées aux problèmes de mécanique	13— 47
33. Equation du centre	13
34. Formule de Laplace—Leverrier	16
35. Formule de Hansen	18
36. Expression approchée des coefficients du développement (130) pour les grandes valeurs de k . Formule de Carlini—Jacobi	20
37. Pendule simple	24
38. Equation de la théorie de la flexion des tiges produite par des efforts longitudinaux	27
39. Equation des petites oscillations dans le vide	28
40. Equation des petites oscillations dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse	29
41. Applications des fonctions de Bessel généralisées aux développements de la fonction perturbatrice	30
42. Fonctions conditionnellement périodiques	37
43. Petites oscillations du pendule sphérique	44
Résumé	47— 57
Bibliographie	58— 63
Table des matières	66— 67