Записки Горного Института. Т. VII — 2. 1928.
Annales de l'Institut des Mines à Leningrade. V. VII 2. 1928.

О кручении ромбических и треугольных призм.

Н. Неронов.

Sur la torsion des prismes rhomboïdaux et triangulaires.

Par N. Neronoff.

Кручение призм и соответствующие гидродинамические аналогии приводят к уравнению (K — постоянная):

$$\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dy^2}=K, \tag{1}$$

при чем функция f должна обращаться в постоянную на контуре призмы. M. Paschoud [1]) рассмотрел случай правильного многоугольника о n сторонах. Произведем оценку употребленного им приближенного метода в двух частных случаях.

Случай ромба.

Обозначим через $2l$ длину стороны и через 2α один из углов ромба. Примем биссектрису угла 2α за полярную ось и пересечение диагоналей за полюс. Положим в полярных координатах ($x = r\cos\Theta$, $y = r.\sin\Theta$), удовлетворяя дифференциальному уравнению задачи и принимая во внимание существование в ромбе двух осей симметрии:

$$f=\frac{Kl^2}{4}\left[\left(\frac{r}{l}\right)^2+\sum_{i=0}^{i=n}A_{2i}\left(\frac{r}{l}\right)^{2i}\cos 2i\theta\right]. \tag{2}$$

Для определения коэффициентов A_{2i} введем условие, что кривая $f = 0$ изображает контур призмы и имеет со сторонами ромба в их середине касание порядка n. Получаем следующую систему уравнений:

---

[1]) Comptes rendus, 1924, t. 179, № 9, p. 451.

$$1 + \sum_{i=0}^{i=n} A_{2i} \cos 2i\alpha = 0$$

$$2\cos 2\alpha + \sum_{i=0,}^{i=n} A_{2i}\, 2i \cos 2(i-1)\alpha = 0$$

(3)
$$2 + \sum_{i=0}^{i=n} A_{2i}\, 2i(2i-1)\cos 2(i-2)\alpha = 0$$

$$\sum_{i=0}^{i=n} A_{2i}\, 2i(2i-1)\,(2i-2)\cos 2(i-3)\alpha = 0$$

. . . . . .

$$\sum_{i=0}^{i=n} A_{2i}\, 2i(2i-1)\ldots.\,[2i-(n-1)]\cos 2(i-n) = 0$$

Придавая целому, положительному, конечному числу n какое либо частное значение, найдем решение поставленной задачи с соответствующей степенью точности.

Имеем в первом приближении (n = 1):

(4)
$$A_0 = -\sin^2 2\alpha, \quad A_2 = -\cos 2\alpha.$$

В этом приближении контур призмы заменен эллипсом вписанным в ромб.

Второе приближение (n = 2) дает:

(5)
$$A_0 = -\frac{\sin^2 2\alpha\,(5 + 2\sin^2 2\alpha)}{2\,(2 + \sin^2 2\alpha)}, \quad A_2 = -\frac{2\cos 2\alpha}{2 + \sin^2 2\alpha}.$$

$$A_4 = -\frac{\sin^2 2\alpha}{2\,(2 + \sin^2 2\alpha)}.$$

Это приближение не имеет смысла, если острый угол ромба меньше, чем 76° (приблизительно).

Случай равнобедренного треугольника.

Обозначим через 2α угол при вершине и через h высоту треугольника. Примем последнюю за полярную ось и вершину треугольника за полюс.

Положим

$$f = \frac{Kh^2}{4\cos 2\alpha}\left[\left(\frac{r}{h}\right)^2 (\cos 2\alpha - \cos 2\theta) + \right.$$

(6)

$$\left. + \sum_{i=o}^{i=n} A_i \left(\frac{r}{h}\right)^{\frac{(2i+1)\pi}{2\alpha}} \cos\frac{(2i+1)\pi\theta}{2\alpha}\right].$$

Функция f обращается в ноль на боковых сторонах треугольника. Коэффициенты A_i определяем из условия, что кривая $f=0$ имеет с основанием треугольника в его середине касание порядка $n+1$:

$$\cos 2\alpha - 1 + \sum_{i=o}^{i=n} A_i = 0$$

$$2(\cos 2\alpha + 1) - \sum_{i=o}^{i=n} A_i \frac{(2i+1)\pi}{2\alpha}\left[\frac{(2i+1)\pi}{2\alpha} - 1\right] = 0$$

(7)

$$\sum_{i=0}^{i=n} A_i \frac{(2i+1)\pi}{2\alpha}\left[\frac{(2i+1)\pi}{2\alpha} - 1\right]\left[\frac{(2i+1)\pi}{2\alpha} - 2\right]\left[\frac{(2i+1)\pi}{2\alpha} - 3\right] = 0$$

. . . . . .

$$\sum_{i=0}^{i=n} A_i \frac{(2i+1)\pi}{2\alpha}\left[\frac{(2i+1)\pi}{2\alpha} - 1\right]\cdot\ldots\cdot\left[\frac{(2i+1)\pi}{2\alpha} - (2n-1)\right] = 0.$$

Полагая $n=o$, получим первое приближение (касание первого порядка):

$$A_0 = 2\sin^2\alpha,\ f = \frac{Kh^2}{4\cos 2\alpha}\left[\left(\frac{r}{h}\right)^2 (\cos 2\alpha - \cos 2\theta) + \right.$$

(8)

$$\left. + 2\sin^2\alpha \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^{\frac{\pi}{2\alpha}} \cos\frac{\pi\theta}{2\alpha}\right].$$

Случай прямоугольного треугольника $\left(2\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ дает неопределенность. Применяем правило Лопиталя:

(9)

$$f = \frac{Kr^2}{2\pi}\left(2\cos 2\theta \cdot \log\frac{r}{h} + \pi\sin^2\theta - 2\theta\sin 2\theta\right).$$

Уравнение контура в этом случае:

$$\log\frac{r}{h}=\frac{2\theta\sin 2\theta-\pi\sin^2\theta}{2\cos 2\theta}. \tag{10}$$

Чтобы иметь представление о точности этого приближения, вычислим длину боковой стороны треугольника, полагая $\theta=\frac{\pi}{4}$.

Раскрывая получающуюся неопределенность, находим:

$$\frac{r}{h}=1{,}330\ldots\ldots,$$

между тем как точное значение:

$$\frac{r}{h}=\sqrt{2}.$$

Ошибка получилась равной 6%. Это наибольшее значение ошибки на контуре.

Полагая $2\alpha=\frac{\pi}{3}$, имеем для равностороннего треугольника (случай Сен-Венана):

$$A_0=\frac{1}{2},\quad A_1=A_2=A_3=\ldots\ldots=0. \tag{11}$$

В обоих рассмотренных задачах область применимости каждого приближения должна быть предметом особого исследования.

Мы видим, что примененный метод не дал вполне удачных результатов. В случае ромба первое приближение недостаточно, область применения второго слишком ограничена. В случае равнобедренного треугольника решение содержит довольно сложные функции в виде дробных степеней отношения $r:h$. Это решение значительно упрощается, когда показатель $\pi:2\alpha$ является целым числом. Кроме того, необходимо заметить, что в обоих задачах остается открытым вопрос о сходимости процесса.

Resumé.

Dans le problème de la torsion des prismes et dans les problèmes hydrodynamiques correspondants il faut résoudre l'équation indéfinie (1), où K est une constante, à la condition que $f = o$ le long du contour du prisme.

M. Paschoud [1]) a examiné le cas des polygones réguliers. Considérons, en suivant la même méthode approchée, les cas du losange et du triangle isocèle.

Cas du losange.

Désignons la longueur des côtés par $2l$ et l'angle du losange par 2α. Prenons la bissectrice de l'angle 2α pour l'axe polaire et le point d'intersection des diagonales pour le pôle.

On a en coordonnées polaires ($x = r\cos\Theta$, $y = r\sin\Theta$) pour la fonction f la formule (2), en satisfaisant à l'équation indéfinie du problème et en tenant compte de la symétrie du losange.

Pour déterminer les coefficients A_{2i} supposons que la courbe $f = o$ exprime le contour du losange et qu'elle a un contact d'ordre n avec les côtés du losange en leur milieu. On aura le système (3) des équations.

En attribuant au nombre n entier, positif et fini une valeur particulière, nous aurons la solution du problème avec l'exactitude correspondante.

Dans la première approximation ($n = 1$) on a les formules (4). Le contour du prisme est changé en ellipse inscrite dans le losange.

La deuxième approximation ($n = 2$) donne les formules (5). Elle n'a pas raison, si l'angle aigu du losange est plus petit que 76° (approximativement).

Cas du triangle isocèle.

Désignons l'angle compris entre deux côtés égaux par 2α et l'hauteur du triangle par h. Prenons l'hauteur pour l'axe polaire et le sommet du triangle pour le pôle.

On a pour la fonction f la formule (6).

La fonction f s'annule sur les côtés égaux du triangle.

On détermine les coefficients A_i, en supposant (7) que la courbe $f = o$ (contour du prisme) a un contact d'ordre $n + 1$ avec la base du triangle en son milieu.

---

[1]) Comptes rendus, 1924, t. 179, № 9, p. 451.

En posant $n = 0$, nous aurons la première approximation (8).

Le cas du triangle rectangle $\left(2\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ donne une indétermination. Appliquons la règle de l'Hôpital (9). L'équation du contour dans ce cas a la forme (10).

En posant $2\alpha = \frac{\pi}{3}$, nous avons pour le triangle équilateral (cas de Saint-Venant) les formules (11).

Dans les deux problèmes considerés le domaine d'application de chaque approximation doit être l'objet d'une étude spéciale.

Nous voyons que la méthode appliquée n'a pas donné des résultats tout à fait satisfaisants.