Записки Горного Института. Т. VII—2, 1928.
Annales de l'Institut des Mines à Leningrade. V. VII—2. 1928.

О функциях Bessel'я многих переменных и их приложениях в механике [1]).

М. И. Акимова.

Sur les fonctions de Bessel à plusieurs variables et leurs applications en mécanique.

Par Michel Akimoff.

ВВЕДЕНИЕ.

Предметом настоящей работы служит изучение функций, которые встречаются первоначально в виде определенного интеграла

(1) $J_к\ (x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos (kv - x_1 \sin v - x_2 \sin 2v - \ldots - x_m \sin mv - \ldots)\, dv,$$

как коэффициенты разложения в ряд

$$(2) \qquad v = \varsigma + 2 \sum_{к=1}^{\infty} \frac{1}{к} J_к (ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots) \sin к\varsigma$$

решения уравнения

$$(3) \qquad v - e_1 \sin v - e_2 \sin 2v - \ldots - e_m \sin mv - \ldots = \varsigma\ ^{2}).$$

В частном случае одного переменного ($m = 1$) имеем классическое уравнение Kepler'a

$$v - e_1 \sin v = \varsigma$$

---

[1]) Эта работа представляет перепечатку, с небольшими дополнениями, литографированной диссертации автора, опубликованной в 1922 году.

[2]) Число переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$, или $e_1, e_2, \ldots, e_m$, при некоторых ограничениях для них может и не оставаться конечным.

и его решение, данное Bessel'ем [1]) [6]

$$v = \varsigma + 2 \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa} J_\kappa (\kappa e_1) \sin \kappa\varsigma,$$

где

$$J_\kappa (x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos (\kappa v - x \sin v)\, dv$$

известная функция Bessel'я.

По аналогии с этим случаем назовем уравнение (3) обобщенным уравнением Kepler'a, а функцию $J_\kappa (x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ функцией Bessel'я многих переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$

К уравнению (3) приводят многие задачи механики.

Подобно уравнению Kepler'a оно встречается первоначально в небесной механике.

Таково разложение уравнения центра $v - \varsigma$ по sinus'ам кратных истинной аномалии v, где ς средняя аномалия планеты.

Задачу обращения этого ряда, т. е. разложение уравнения центра по sinus'ам кратных средней аномалии ς, рассматривали еще Clairaut и d'Alembert и затем ряд других геометров [2]).

Первый Schlömilch в 1849 г. в монографии „Die allgemeine Umkehrung gegebener Functionen" [**56**, *a*] получил решение уравнения (3) в виде ряда (2) и представил коэффициенты этого ряда в форме определенных интегралов (1).

Затем Weierstrass в 1866 г. в мемуаре „Über eine Gattung reell periodischer Functionen" [**67**] связал с вопросом обращения ряда (3) вопрос об обращении интеграла

$$(4) \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm \sqrt{(1 - x^2) \cdot F(x)}} = t,$$

который встречается в большом числе задач механики [3]). Здесь F (x) непрерывная и положительная функция вещественного аргумента x,

[1]) Цифры или наименование автора в прямых скобках означают ссылку на литературу, приложенную в конце текста.

[2]) См. реферат Burkhardt'a [**9**, *a*, № 19, p. 944].

[3]) Сюда относятся все задачи, в которых уравнение живых сил в связи с другими уравнениями движения приводит к уравнению

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (1 - x^2)\ F(x),$$

где x одна из координат и t время. Таковы: задача о движении точки под действием центральной силы при существовании силовой функции; некоторые случаи движения точки по поверхности (в частности — маятники); различные случаи движения тела вокруг неподвижной точки и проч. См. Staude [**60**, §§ 9, 10, 12, 13] и Appell [**4**, e, p. 340—343, 427].

ни разу не обращающаяся в нуль или бесконечность во всем промежутке от -1 до $+1$, включая его пределы.

Радикал имеет знак $+$ или $-$, смотря потому растет или убывает x с возрастанием t, и

$$-1 \leqslant x \leqslant 1, \quad -1 \leqslant x_0 \leqslant 1.$$

Уравнение (4) определяет x как периодическую функцию t с периодом [Abel]

$$T = 2 \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) \cdot F(x)}}.$$

Полагая $x = \mp \cos v$ и разлагая функцию $\frac{1}{\sqrt{F(\mp \cos v)}}$ в тригонометрический ряд, Weierstrass приводит уравнение (4) к виду (3), где ς линейная функция t, и устанавливает разложение в ряд

$$(5) \qquad \mp x = \cos v = \frac{A_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_\kappa \cos \kappa\varsigma,$$

где

$$A_\kappa = \frac{1}{\kappa\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \cos\left[(\kappa-1)v - \kappa e_1 \sin v - \kappa e_2 \sin 2v - \ldots\right] dv \right.$$

$$\left. - \int_0^{\pi} \cos\left[(\kappa+1)v - \kappa e_1 \sin v - \kappa e_2 \sin 2v - \ldots\right] dv \right\}.$$

Формулы Weierstrass'a содержат также более общее разложение

$$(6) \qquad \cos pv = -\frac{p e_p}{2}$$

$$+ p \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos\left[(\kappa-p)v - ke_1 \sin v - ke_2 \sin 2v - \ldots\right] dv \right.$$

$$\left. - \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos\left[(k+p)v - \kappa e_1 \sin v - \kappa e_2 \sin 2v - \ldots\right] dv \right\} \cos \kappa\varsigma$$

и разложение произвольной функции

$$G(x) = \sum_{p=0}^{\infty} G_p \cos pv$$

в ряд

$$(7) \qquad G(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} B_\kappa \cos \kappa z,$$

где B_κ составляется из интегралов

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left[(\kappa \pm p)\, v - \kappa e_1 \sin v - \kappa e_2 \sin 2v - \ldots\right] dv, \quad p = 0, 1, 2, \ldots$$

Следует однако заметить, что, вводя интегралы

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(\kappa v - x_1 \sin v - x_2 \sin 2v - \ldots - x_m \sin mv - \ldots\right) dv,$$

ни Schlömilch, ни Weierstrass не рассматривают их как функции аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ Напротив, указывая на стр. 6-й своего мемуара [**67**], что формулы (5), (6) и (7) содержат результаты Bessel'я и Hansen'а [1]), Weierstrass говорит:

„In den meisten Fällen aber, selbst wenn die Function F (x) eine einfache Form hat, sind die Coefficienten A_κ, B_κ sehr complicirt zusammengesetzte Grössen, deren direkte Entwicklung aus den aufgestellten Ausdrücken schwierig erscheint".

Только в 1915 г. P. Appell [4, b, c, d, e] предложил [2]) рассматривать интегралы (1) как обобщение классической функции Bessel'я $J_\kappa(x)$ на случай многих переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ [3]).

J. Pérès [**46**] указал затем для функций $J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ соотношения

$$(8) \qquad \frac{\partial J_\kappa}{\partial x_m} = \frac{1}{2}\left(J_{\kappa-m} - J_{\kappa+m}\right), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$$(9) \qquad \kappa J_\kappa = \frac{1}{2}\left[x_1\left(J_{\kappa-1} + J_{\kappa+1}\right) + 2x_2\left(J_{\kappa-2} + J_{\kappa+2}\right) + \ldots + mx_m\left(J_{\kappa-m} + J_{\kappa+m}\right) + \ldots\right],$$

которые в случае конечного числа n переменных приводят к системе линейных уравнений с частными производными второго порядка, допускающей 2n линейно независимых решений, одно из которых сама функция $J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, и равносильной для этой функции уравнению Bessel'я для $J_\kappa(x)$.

---

[1]) Как частный случай при $e_2 = e_3 = \ldots = e_m = \ldots = 0$.

[2]) P. Appell делает первое приближение до обращения интеграла (4), представляя $\frac{1}{\sqrt{F(x)}}$ в промежутке $-1, +1$ полиномом $P(x)$.

[3]) Обобщение функций Bessel'я на случай многих переменных встречается также у Whittaker'а [**68**, *a*, p. 351]. Введенные им функции не представляют однако столь глубокой аналогии с обыкновенными функциями Bessel'я, как рассматриваемые в настоящей работе.

Наконец B. Jekhowsky [**26**, *a*, b] дал выражение для $J_к\,(x_1, x_2, ..., x_n)$ в виде бесконечного ряда

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_{к-пр}\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \cdot J_p\,(x_n).$$

и изучил некоторые свойства этих функций [**26**] [1]).

Занимаясь с своей стороны изучением обобщенных функций Bessel'я и стремясь провести возможно более глубокую аналогию между этими функциями и классическими функциями одного переменного, я [**3**] получил следующие результаты.

Найдя для $J_к\,(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ производящую функцию, я вывожу из равенства [2])

$$(10)\qquad e^{\frac{x_1}{2}(t-t^{-1})+\frac{x_2}{2}(t-t^{-2})+\ldots+\frac{x_m}{2}(t^m-t^{-m})+\ldots} = \sum_{к=-\infty}^{+\infty} J_к\,(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)\, t^к,$$

четыре разложения функций $J_к\,(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$ в ряды.

Одно в виде кратного ряда из произведений обыкновенных функций Bessel'я

$$(11)\qquad J_к\,(x_1, x_2, \ldots, x_m \ldots) = \sum_{K_2=-\infty}^{+\infty}\cdots\sum_{K_m=-\infty}^{+\infty}\cdots J_{к-2k_2-\ldots-mk_m-\ldots}(x_1)\; J_{k_2}(x_2)\ldots J_{k_m}(x_m)\ldots$$

Другое разложение в виде ряда

$$(12)\qquad J_к\,(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{V_{к+s}\,(x_1, x_2, \ldots x_{к+s})\; V_s\,(-x_1, -x_2, \ldots, -x_s)}{2^{к+2s}\;\; 1.\,2\ldots(к+s)\;\cdot\; 1.\,2\ldots s}$$

---

[1]) Во время печатания настоящей работы (Январь 1928 г.) я получил опубликованную во Франции Thèse (Paris, 1927) B. Jekhowsk'ого [**26**, *i*]. Не входя здесь в критический разбор этой работы, необходимо отметить, что вся вторая половина ее представляет почти буквальный перевод, без надлежащих цитат, §§ 13 (сноска на стр. 51 и 52), 16, 17, 20—24 и 29 моей литографированной диссертации [**3**, d], которая была известна автору Thèse, при ограничении $n=2$ и с допущением ряда ошибок.

[2]) Разложения (10), (12) и (13), не касаясь связи их с решением обобщенного ур-ия Kepler'a, рассматривал Gyldén [**18**, *a*, p. 56—62].

из произведений полиномов $V_r(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, определяемых разложением

$$(13)\quad e^{\frac{1}{2}(x_1 t + x_2 t^2 \ldots + x_m t^m + \ldots)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{V_r(x_1, x_2, \ldots, x_r)}{2^r \cdot 1 \cdot 2 \ldots r} t^r$$

и удовлетворяющих соотношению

$$(14)\quad V_r = x_1 \cdot V_{r-1} + 2 \cdot 2(r-1)\, x_2 V_{r-2} + 2^2 \cdot 3\,(r-1)(r-2)\, x_3 V_{r-3} + \ldots,$$

из которого они последовательно выводятся.

Из разложения (13) или соотношения (14) видно, что, когда число переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ функции $J_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ неограниченно велико, в каждом члене ряда (12) полиномы $V_r(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ сохраняют конечное число переменных, которое постепенно растет с возрастанием порядка члена.

При $m = 1$ ряд (12) приводится к степенному ряду для обыкновенной функции Bessel'я

$$J_k(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \cdot x^{k+2s}}{2^{k+2s} \cdot 1 \cdot 2 \ldots (k+s) \cdot 1 \cdot 2 \ldots s}.$$

Для $m = 2$ и $x_1 = x$, $x_2 = \frac{y}{2}$ [1])

$$V_r\left(x, \frac{y}{2}\right)$$

представляют известные полиномы, удовлетворяющие уравнению теории тепла

$$\frac{\partial V_r}{\partial y} = \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2}$$

и выражающиеся через полиномы Чебышев — Hermite'a.

Третье разложение функции $J_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ имеет вид

$$(15)\quad J_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = \tfrac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{r}{2}\right]} \frac{W_r^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)}{1 \cdot 2 \ldots r},$$

где $\left[\frac{r}{2}\right]$ наибольшее целое число, содержащееся в $\frac{r}{2}$, и $W_r^{(k)}(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$, $r=0, 1, 2, \ldots, k=0, 1, 2, \ldots$, однородные полиномы степени r в переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ [2]), определяемые из разложений

---

[1]) Случай функций $J_k(x,y)$ особо рассмотрен в моем докладе на первом с'езде русских математиков в Москве (27, IV—4, V, 1927 г.).

[2]) Если число переменных $x_1, x_2, \ldots$ конечно и равно n, то $W_r^{(k)} = 0$ при $k > rn$.

$$(x_1 \sin\varphi + x_2 \sin 2\varphi + \ldots)^{2s} = \tfrac{1}{2} W^{(0)}_{2s}(x_1, x_2, \ldots) + \sum_{k=1}^{\infty} W^{(k)}_{2s}(x_1, x_2, \ldots) \cos k\varphi,$$

$$(x_1 \sin\varphi + x_2 \sin 2\varphi + \ldots)^{2s+1} = \sum_{k=1}^{\infty} W^{(k)}_{2s+1}(x_1, x_2, \ldots) \sin k\varphi.$$

Этим разложением пользовался Gyldén [**18**, b, p. 93, 99] при вычислении коэффициентов $J_k(x_1, x_2, \ldots)$ разложения (10) для некоторых специальных значений аргументов $x_1, x_2, \ldots$ [1]).

Полином $(-1)^{\left[\frac{r}{2}\right]} \frac{W^{(k)}_r(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)}{2 \cdot 1 \cdot 2 \ldots r}$ представляет сумму

$$\frac{1}{2^r} \sum_{n_2=0}^{r} \cdots \sum_{n_m=0}^{r} \cdots N_{-k, n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots} \frac{x_1^{n_1}}{1.2 \ldots n_1} \frac{x_2^{n_2}}{1.2 \ldots n_2} \cdots \frac{x_m^{n_m}}{1 \cdot 2 \ldots n_m} \cdots,$$

где $n_1 = r - n_2 - \ldots - n_m \ldots$ и $N_{-k, n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots}$ суть целые числа, представляющие обобщение чисел Cauchy, к которым они приводятся при $m = 2$.

Для функций $J_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ имеем затем четвертое разложение

(16) $J_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=0}^{\infty} \cdots N_{-k, n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots} \frac{x_1^{n_1}}{2^{n_1}.1.2 \ldots n_1} \frac{x_2^{n_2}}{2^{n_2}.1.2 \ldots n_2} \cdots \frac{x_m^{n_m}}{2^{n_m}.1.2,.. n_m} \cdots$$

Формулы (11), (12), (15) и (16) служат для вычисления функций $J_k(x_1, x_2, \ldots)$ с любою степенью точности [2]) и дают способ определения коэффициентов A_k и B_k разложений (5) и (7), который можно охарактеризовать, повторяя следующие слова Weierstrass'a:

---

[1]) См. также Hora [**24**, d., p. 262].

[2]) С целью упрощения вычисления и избежания применения кратных рядов для приближенного вычисления рассматриваемых здесь трансцендентных функций $J_k(x_1, x_2, \ldots)$ Л. Г. Лойцянский [**40**] применил при решении уравнения (3) (и вообще уравнения $f(x) = y$) вместо тригонометрических функций полиномы Legendre'a. Следует, однако, заметить, что этот прием, интересный теоретически, не дает преимуществ с вычислительной стороны, так как также приводит к кратным рядам в $x_1, x_2, \ldots$ и требует вычисления квадратур $\int_a^b [f(x)]^m \, dx$, через которые сейчас же выражаются и квадратуры $\int_a^b \cos k[f(x)] \, dx$, т. е. $J_k(kx_1, kx_2, \ldots)$. Сверх того, во многих задачах механики (в частности в задачах небесной механики [**68**, b, § 182 и след.]) ищется решение именно в виде чистого тригонометрического ряда (без так называемых секулярных членов).

„Man kann sie [1]) jedoch fast immer durch ein Verfahren bestimmen, welches das Eigenthümliche hat, ohne jede Jntegration zum Ziele zu führen, und zugleich sehr geeignet ist, eine Einsicht in die Zusammensetzungsweise der zu entwickelnden Grössen zu gewähren und so auch bei der Ermittelung angenäherter Ausdrücke für dieselben, mit denen man sich oft begnügen kann, wesentliche Dienste zu leisten".

Я рассматриваю затем функцию $J_k(x_1, x_2, \ldots x_n)$ для любого (не целого) значения указателя k, определяя ее как интеграл

$$(17)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{\frac{x_1}{2}(t-\frac{1}{t})+\frac{x_2}{2}(t^2-\frac{1}{t^2})+\ldots+\frac{x_n}{2}(t^n-\frac{1}{t^n})}\, t^{-k-1}dt,$$

где C криволинейный путь интегрирования в комплексной области переменного t.

Для $n=1$ интеграл (17) дан Schläfli [2]) и Сониным [**59**, p. 12].

Можно преобразовать его так, что путь интегрированья будет вещественным. Таким образом получается, например, интеграл

$$J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(kv - x_1\sin v - x_2\sin 2v - \ldots - x_n \sin nv)\,dv$$

$$-\frac{\sin k\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x_1 \operatorname{sh} u + x_2 \operatorname{sh} 2u - \ldots + (-1)^n x_n \operatorname{sh} nu - ku}\,du,$$

где $\operatorname{sh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$ и вещественная часть $= R[(-1)^n x_n] < 0$, указанный для $n=1$ Schläfli [**55**, *a*, p. 237; b, p. 148] и при k целом приводящийся к интегралу (1) Schlömilch — Weierstrass — Appell"я.

Из интеграла (17) я вывожу также новое интегральное выражение функции $J_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ при целом значении k

$$\frac{1}{i^k \cdot \pi}\int_0^{\pi} e^{i(x_1\cos v + x_3\cos 3v + \ldots)}\cos(x_2\sin 2v - x_4\sin 4v + \ldots + kv)\,dv,$$

для $m=1$ данное Hansen'ом [**20**, *a*, p. 105].

Надлежащий выбор криволинейного пути интегрирования позволяет получить из (17) все 2n линейно независимые решения $J_k^{(m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $m = 0,1,\ldots, 2n-1$, системы уравнений (8) и (9), или вытекающей из нее системы ур-ний с частными производными [Pérès],

---

[1]) Т. е. коэффициенты A_k, B_k разложений (5) и (7).

[2]) Согласно указанию Graf'a [**17**, p. 136].

Этот интеграл можно рассматривать как предельный случай гипергеометрического [**3**, *a*, f].

для которых я рассматриваю группу линейных подстановок, претерпеваемых ими при обходе переменным x_n особенной точки $x_n = 0$, устанавливаю теорему Fuchs'a и указываю разложения их в ряды, аналогичные разложениям (11) и (12), а также формулу сложения

$$J_k^{(m)}(x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ldots,\ x_n + y_n) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p\,(x_1\, x_2,\ldots,\, x_n)\, J_{k-p}^{(m)}(y_1,\ y_2,\ldots\ y_n),$$

$$|x_n| < |y_n|,$$

и приводит к обобщению известной функции $Y_k\,(x)$ C. Neumann'a

$$Y_k(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n) = \frac{\cos k\pi\,.\,J_k\,(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n) - J_{-k}(x_1, -x_2,\ldots, (-1)^{n-1}x_n)}{\sin k\pi}$$

на случай многих переменных.

Я указываю далее некоторые обобщения на случай функций $J_k\,(x_1, x_2,\ldots)$ рядов Lommel'я [**41**, p. 21], C. Neumann'a [**43**, p. 39], Schlömilch'a, [**56**, b, p. 155], Kapteyn'a, [**29**, p. 103] и Niels Nielsen'a, [**44**, c, p. 261 — 351], расположенных по функциям $J_k\,(x)$, или $J_0\,(kx)$, или $J\,(kx)$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ldots$, а также по произведениям этих функций, и устанавливаю попутно формулу

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} J_{2k}\,(2x_1\cos\alpha,\ 2x_2\cos 2\alpha,\ \ldots,\ 2x_m\cos m\alpha,\ldots)\,d\alpha = [J_k\,(x_1, x_2,\ldots, x_m,\ldots)]^2$$

и разложение

$$J_k\,(px_1,\ p^2x_2,\ldots) = p^k\,J_k\,(x_1,\ x_2,\ldots)$$

$$+\frac{p^{k+1}\,V_1\,[-x_1\,(p-\frac{1}{p}), -x_2\,(p^2-\frac{1}{p^2}),\ \ldots]}{2}\,J_{k+1}\,(x_1,\ x_2,\ \ldots)$$

$$+\frac{p^{k+2}\,V_2\,(-x_1\,(p-\frac{1}{p}), -x_2\,(p^2-\frac{1}{p^2}),\ \ldots]}{2^2\,.\,1\,.\,2}\,J_{k+2}\,(x_1,\ x_2,\ldots) + \ldots,$$

для случая одного переменного принадлежащие C. Neumann'y [**43**, p. 70] и Bessel'ю [**6**, p. 35].

Заключительную часть настоящей работы составляют приложения обобщенных функций Bessel'я к некоторым задачам механики.

Формулы (2) и (11), или (12), или (15), или (16) непосредственно дают разложение уравнения центра $v - \varsigma$ по sinus'ам кратных средней аномалии ς, с коэффициентами в виде бесконечных рядов по степеням эксцентрицитета ε, встречающееся у Laplace'a [**35**, *a*, p. 200] и составляющее основу для разложения пертурбационной функции у Leverrier [**37**, p. 198 — 204].

Из формул (2), (12) и (13) получается также другое представление этих коэффициентов, данное Hansen'ом [**20** b, p. 276], а из выражения в виде интеграла (17) приближенное асимптотическое представление их для членов ряда (2) весьма далеких от начала (формула Carlini-Jacobi [**10**]).

Как примеры на применение обобщенных функций Bessel'я я привожу еще уравнение математического маятника, уравнение теории продольного изгиба, дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

встречающееся в теории малых колебаний в пустоте системы с одною степенью свободы [1]), а также во многих новых исследованиях по небесной механике [**39**; **18**, b, p. 7, 21], и дифференциальное уравнение малых колебаний в сопротивляющейся среде при сопротивлении среды, пропорциональном квадрату скорости.

Я применяю затем обобщенные функции Bessel'я к разложению пертурбационной функции в двукратные тригонометрические ряды по sinus'ам и cosinus'ам истинных аномалий возмущающей и возмущаемой планет, устанавливая для перехода от этих разложений к разложениям в тригонометрические ряды в функции средних аномалий этих планет формулу, аналогичную формуле Cauchy [**11**, c] для перехода от эксцентрических аномалий к средним. Указание на возможность разыскания подобной формулы встречается у Poincaré [**49**, b, p. 48].

Разложение пертурбационной функции в тригонометрический ряд в функции истинных аномалий двух планет играет важную роль в теории возмущения малых планет Gyldén'a, который принимает за независимую переменную не среднюю аномалию, как Leverrier, и не эксцентрическую, как Hansen, а истинную аномалию возмущаемой планеты [**18**, b, p. 429; **49**, b, p. 47]. Применение обобщенных функций Bessel'я позволяет установить для коэффициентов такого разложения формулу, аналогичную формуле Hansen'a (**20**, c, p. 169, 180] для коэффициентов разложения пертурбационной функции в зависимости от эксцентрической аномалии возмущаемой планеты (формуле, основанной на применении обыкновенных функций Bessel'я). На отсутствие подобной формулы в методе Gyldén'a указывал Poincaré [**49**, b, p. 48],

Я рассматриваю в заключение разложения

$$F = \sum_{q,q'=-\infty}^{+\infty} C_{qq'} e^{i(qv + q'v')} = \sum_{m,m'=-\infty}^{+\infty} A_{mm'} e^{i(m\zeta + m'\zeta')},$$

---

[1]) См., например, Horn [**24**, c, d].

где v, v′ и ς, ς′ связаны друг с другом системой обобщенных уравнений Kepler'a

$$v - e_1 \sin v - e_2 \sin 2v - \ldots - e'_1 \sin v' - e'_2 \sin 2v' - \ldots = \varsigma,$$
$$v' - \varepsilon_1 \sin v - \varepsilon_2 \sin 2v - \ldots - \varepsilon'_1 \sin v' - \varepsilon'_2 \sin 2v' - \ldots = \varsigma'.$$

Если ς и ς′ означают линейные функции нового переменного t, то подобными разложениями определяются так называемые условно периодические функции t, встречающиеся в решениях многих задач механики [Staude].

Коэффициенты $A_{mm'}$ выражаются через $C_{qq'}$ при помощи квадратур (**60**, p. 307, 322; **12**, b, p. 106; **24**, *e*, p. 204, 205], которые я разлагаю в кратные ряды из произведений обобщенных функций Bessel'я, содержащие, как частный случай, большинство предыдущих разложений.

Как простейший пример, поясняющий применение полученных формул, я привожу классическую задачу о движении сферического маятника в случае его малых колебаний около наинизшего положения равновесия.

ГЛАВА I.

Примеры задач, приводящих к обобщенному уравнению Kepler'a. Происхождение функций Bessel'я многих переменных и выражения их в виде бесконечных рядов.

1. Задача Kepler'a. Пусть будут: r радиус вектор планеты, описывающей эллиптическую орбиту с фокусом в центре солнца, v ее истинная, ς средняя аномалии и t время. Из уравнения орбиты

$$r = \frac{a\,(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos v}$$

и теоремы площадей

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \sqrt{\mu a\,(1-\varepsilon^2)},$$

где a большая полуось орбиты, ε эксцентрицитет и μ постоянная, исключая r, находим

$$(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}(1+\varepsilon\cos v)^{-2} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cdot \frac{dt}{dv}.$$

Разлагая $(1+\varepsilon\cos v)^{-2}$ в тригонометрический ряд и производя интегрирование, имеем

(3) $$v - e_1 \sin v - e_2 \sin 2v - \ldots - e_m \sin mv - \ldots = \varsigma,$$

где $n=\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$, $\varsigma = nt$ и, после легких вычислений,

$$e_1 = 2\varepsilon\,(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}\,\left(1+\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{1\cdot 2^2}\,\varepsilon^2+\frac{6}{2}\,\frac{4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 2^4}\,\varepsilon^4+\ldots\right),$$

или, в силу тождества

$$1=(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{1\cdot 2^2}\,\varepsilon^2+\frac{5}{1}\cdot\frac{3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 2^4}\,\varepsilon^4+\ldots\right),$$

$$e_1 = 2\varepsilon$$

и

$$e_2=-\frac{3}{2}\frac{\varepsilon^2}{2}\,(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{5}{3}\,\frac{4}{1\cdot 2^2}\,\varepsilon^2+\frac{7}{3}\,\frac{5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 2^4}\,\varepsilon^4+\ldots\right),$$

$$e_3=\frac{4}{2}\,\frac{\varepsilon^3}{2^2}\,(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{6}{4}\,\frac{5}{1\cdot 2^2}\,\varepsilon^2+\frac{8}{4}\,\frac{6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 2^4}\,\varepsilon^4+\ldots\right),$$

. . . . . .

Laplace [**35**, *a*, p. 173, 174] выводит формулу

$$e_m=(-1)^{m-1}\cdot\frac{2}{m}\,\frac{1+m\sqrt{1-\varepsilon^2}}{(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})^m}\cdot\varepsilon^m.$$

Разность $v-\varsigma$ носит в небесной механике название уравнения центра. Разыскание v, как функции ς (или t), составляет задачу Kepler'a, для решения которой остается выполнить обращение ряда (3).

2. Математический маятник. Как второй пример задачи, приводящей к обобщенному уравнению Kepler'a, рассмотрим уравнение математического маятника

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi. \tag{18}$$

Известен классический способ решения этого уравнения с помощью эллиптических функций, но, как замечают Klein и Sommerfeld [**31**, p. 454], каждая формула с эллиптическими функциями равносильна в целях вычислений формуле с несколькими тригонометрическими функциями; и некоторые авторы трактуют уравнение (18) без помощи эллиптических функций, разыскивая решение его в виде тригонометрического ряда, например, способом последовательных приближений, [**63**, b, t. IV, p. 424], или рассматривая это уравнение как частный случай следующего [1]) [**24**, c, p. 409]

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=a_1\,\varphi+a_2\,\varphi^2+a_3\,\varphi^3+\ldots$$

[1]) Charlier [**12**, b, p. 96] рассматривает математический маятник как пример задачи, приводящей к интегралу (4) Weierstrass'a.

Интегрированье уравнения (18) непосредственно приводится к решению обобщенного уравнения Kepler'a. Действительно, для случая колебательного движения маятника, полагая

$$\sin\frac{\varphi}{2} = k\,\sin\frac{v}{2},\quad k<1,$$

имеем следуюший интеграл уравнения (18)

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t=\int_0^{\frac{v}{2}}\frac{d\frac{v}{2}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{v}{2}}},$$

и разлагая в нем под'интегральное выражение в тригонометрический ряд, приходим к такому уравнению

(3) $$v-e_1\sin v-e_2\sin 2v-\ldots-e_m\sin mv-\ldots=\varsigma,$$

где $\varsigma=2\frac{1}{a}\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t$, $e_m=(-1)^{m-1}\cdot 2\frac{a}{a}^m$, $m=1,\ 2,\ldots$, и после легких вычислений

$$a=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)^2 k^8+\ldots,$$

или короче

$$a=1\ +n_1\ k^2\ +n_2\ k^4\ +n_3\ k^6\ +n_4\ k^8+\ldots,$$

и затем [**36**, p. 170].

$$a_1=\ \frac{1}{2}n_1\ k^2\ +\frac{2}{3}n_2\ k^4\ +\frac{3}{4}n_3\ k^6\ +\frac{4}{5}n_4\ k^8+\ldots,$$

$$a_2=\ \frac{2}{3}\frac{1}{8}n_2\ k^4\ +\frac{3}{4}\frac{2}{10}n_3\ k^6\ +\frac{4}{5}\frac{3}{12}n_4\ k^8+\ldots,$$

$$a_3=\ \frac{3}{4}\frac{2}{10}\frac{2}{18}n_3\ k^6\ +\frac{4}{5}\frac{3}{12}\frac{4}{21}n_4\ k^8+\ldots,$$

$$a_4=\ \frac{4}{5}\frac{3}{12}\frac{4}{21}\frac{3}{32}n_4\ k^8+\ldots,$$

. . . . . .

Можно составить еще такую общую формулу [1])

$$a_m=\frac{1}{m}\sum_{p=m}^{\infty}\frac{[1\cdot 3\ldots(2p-1)]^2}{[2\cdot 4\ldots(2p-2m)]^2\ (2p-2m+2)\ldots\ (2p+2m)}\ k^{2p}.$$

---

[1]) Если разложить $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{v}{2}}}$ в ряд по степеням $k^2\sin^2\frac{v}{2}$ и степени $\sin^2\frac{v}{2}$ выразить через cosinus'ы кратных v.

Чтобы выразить координаты движущейся точки или

$$\sin\varphi = -\frac{2k}{a}\frac{d\cos\frac{v}{2}}{d\frac{\varsigma}{2}} \text{ и } \cos\varphi = 1 - k^2 + k^2\cos v$$

в функции времени, остается, на основании уравнения (3), выразить $\cos v$ и $\cos\frac{v}{2}$ в функции ς.

В случае непрерывного вращения в одном направлении можно взять следующий интеграл уравнения (18)

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,kt = \int_0^{\frac{\varphi}{2}} \frac{d\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}},\ k > 1.$$

Этот интеграл, как раньше, приводит к уравнению

$$\varphi - e_1 \sin\varphi - e_2 \sin 2\varphi - \ldots - e_m \sin m\varphi - \ldots = \varsigma,$$

где $\varsigma = 2\frac{1}{a}\sqrt{\frac{g}{l}}\,kt$ и $e_1, e_2, \ldots, e_m, \ldots, a$ имеют прежние значения, если заменить в них k^2 через $\frac{1}{k^2}$.

3. Уравнение теории продольного изгиба. Для следующего примера рассмотрим уравнение теории продольного изгиба.

Располагая ось x по оси неизогнутого стержня, а начало координат в ее средине, и обозначая через T и K сжимающую силу в конце стержня и его жесткость при изгибе, имеем для изогнутой формы оси стержня дифференциальное уравнение

$$-K\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = T \cdot y$$

и его интеграл [**30**]

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{e^2 - y^2}\cdot\sqrt{4c^2 - e^2 + y^2}}{2c^2 - e^2 + y^2}, \tag{19}$$

где $c = \sqrt{\frac{K}{T}}$ и e наибольшее значение y, имеющее место при $x = o$.

Полагая в (19) $y = e\cos\frac{v}{2}$, представляя полученное уравнение в виде

$$c\left(2\sqrt{1 - \left(\frac{e}{2c}\right)^2\sin^2\frac{v}{2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{e}{2c}\right)^2\sin^2\frac{v}{2}}}\right) d\frac{v}{2} = dx$$

и разлагая в тригонометрические ряды радикалы

$$\sqrt{1-\left(\frac{e}{2c}\right)^2 \sin^2\frac{v}{2}} = b + 2b_1 \cos v - 4b_2 \cos 2v + \ldots + (-1)^{m-1} 2m\, b_m \cos mv + \ldots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{e}{2c}\right)^2 \sin^2\frac{v}{2}}} = a - 2a_1 \cos v + 4a_2 \cos 2v + \ldots + (-1)^m 2m\, a_m \cos mv + \ldots,$$

где, при e по предположению малом сравнительно с c,

$$b = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{e}{2c}\right)^2 - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{1}{3}\left(\frac{e}{2c}\right)^4 - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{1}{5}\left(\frac{e}{2c}\right)^6 - \ldots,$$

$$b_m = \frac{1}{m}\sum_{p=m}^{\infty} \frac{[1.3 \ldots (2p-1)]^2}{[2.4 \ldots (2p-2m)]^2\ (2p-2m+2) \ldots (2p+2m)} \frac{1}{2p-1}\left(\frac{e}{2c}\right)^{2p}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

и a, a_m, $m = 1, 2, \ldots$ имеют те же значения, как в § 2, если считать $k = \frac{e}{2c}$, найдем, произведя интегрирование, уравнение

$$v - e_1 \sin v - e_2 \sin 2v - \ldots - e_m \sin mv - \ldots = \varsigma, \tag{3}$$

где

$$\varsigma = \frac{2x}{c\alpha} \text{ и } e_m = 2\frac{\alpha_m}{\alpha}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$$(20)\begin{cases} \alpha = 1 - \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1.3 \cdots (2p-1)}{2.4 \cdots 2p}\right)^2 \frac{2p+1}{2p-1}\left(\frac{e}{2c}\right)^{2p} \\ \alpha_m = \frac{(-1)^m}{m}\sum_{p=m}^{\infty} \frac{[1.3 \cdots (2p-1)]^2}{[2.4 \cdots (2p-2m)]^2\,(2p-2m+2)\cdots(2p+2m)} \frac{2p+1}{2p-1}\left(\frac{e}{2c}\right)^{2p}, \\ m = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Для составления уравнения изогнутой оси сжатого стержня остается выразить, на основании уравнения (3), $y = e \cos\frac{v}{2}$, т. е. $\cos\frac{v}{2}$ в функции ς.

4. Уравнение малых колебаний в пустоте. Уравнение математического маятника можно рассматривать как частный случай следующего общего уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots, \quad a_1 < 0, \tag{21}$$

которое встречается в теории малых колебаний системы с одною степенью свободы [**53**, c, § 357; **24**, c, d], а также во многих новых исследованиях по небесной механике [**39**; **18**, b, p. 7,21; **53**, b, §§ 367—370].

Для случая малых колебаний это уравнение непосредственно вытекает из теоремы живых сил

$$dT = Fdx,$$

где $T = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ живая сила системы [1]) и

$$Fdx = (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)\, dx.$$

работа приложенных сил на перемещении dx.

Изменяя обозначения для t, a_2, a_3, $\cdots$, можно представить уравнение (21) в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots.$$

Пусть $x = a$, $\frac{dx}{dt} = 0$ при $t = 0$. Тогда теорема живых сил или непосредственное интегрированье дает следующий интеграл предыдущего уравнения

$$(22)\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = a^2 - x^2 + \tfrac{2}{3} a_2 (x^3 - a^3) + \tfrac{2}{4} a_3 (x^4 - a^4) + \tfrac{2}{5} a_4 (x^5 - a^5) + \cdots$$
$$= (a - x) \cdot f(x),$$

где

$$f(x) = a + x - \tfrac{2}{3} a_2 (x^2 + xa + a^2) - \tfrac{2}{4} a_3 (x^3 + x^2 a + xa^2 + a^3)$$
$$- \tfrac{2}{5} a^4 (x^4 + x^3 a + x^2 a^2 + xa^3 + a^4) + \cdots.$$

Из уравнения $f(b) = 0$ находим

$$b = -a + \tfrac{2}{3} a_2 a^2 - \tfrac{4}{9} a_2^2 a^3 + (\tfrac{16}{27} a_2^3 + \tfrac{2}{3} a_2 a_3 + \tfrac{2}{5} a_4) a^4 + \cdots$$

и затем

$$f(x) = (x - b) \cdot f_1(x),$$

$$f_1(x) = 1 - \tfrac{2}{3} a_2 x - \tfrac{1}{2} a_3 x^2 - (\tfrac{4}{9} a_2^2 + \tfrac{1}{2} a_3) a^2 - \tfrac{2}{5} a_4 x^3 - (\tfrac{1}{3} a_2 a_3 + \tfrac{2}{5} a_4) x a^2$$
$$+ (\tfrac{8}{27} a_2^3 + \tfrac{1}{3} a_2 a_3) a^3 + \cdots,$$

где все полученные ряды сходятся при достаточно малых значениях $|a|$ и $|x|$.

Если x заключается между a и b и t момент, в который движущаяся система впервые занимает положение x, то из уравнения (22) находим

$$(23)\quad \mp \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{(a - x)(x - b)}\,\sqrt{f_1(x)}} = t,$$

где имеет место знак — или +, смотря потому убывает или растет x, т. е. положительно или отрицательно a.

---

[1]) При надлежащем выборе координаты x и единицы времени t.

Полагая $x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos v$, $(0 \leqslant v \leqslant \pi)$, имеем

$$\sqrt{(a-x)(x-b)} = \frac{a-b}{2}\sin v, \text{ при } a > 0$$

и

$$-\sqrt{(a-x)(x-b)} = \frac{a-b}{2}\sin v, \text{ при } a < 0.$$

Поэтому уравнение (23) приводится к следующему

$$v - e_1 \sin v - e_2 \sin 2v - \cdots - e_m \sin mv - \cdots = \varsigma, \tag{3}$$

где $\varsigma = \frac{t}{\alpha}$ и $e_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha}$, $e_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha}, \cdots,$

$$\alpha = 1 + \left(\tfrac{5}{12} a_2^2 + \tfrac{3}{8} a_3\right) a^2 - \left(\tfrac{5}{18} a_2^3 + \tfrac{1}{4} a_2 a_3\right) a^3 + \cdots$$

$$\alpha_1 = -\tfrac{1}{8} a_2 a + \tfrac{1}{9} a_2^2 a^2 + \cdots,$$

$$\alpha_2 = -\left(\tfrac{1}{24} a_2^2 + \tfrac{1}{16} a_3\right) a^2 + \cdots,$$

. . . . . .

Для определения x, как функции t, остается выразить, на основании уравнения (3), cos v в функции ς.

Приведение интегрированья уравнения (21) к решению обобщенного уравнения Kepler'a (3) указано впервые Lindstedt'ом [**39**, p. 3—5]. В данной здесь форме его выполнил Horn [**24**, d, p. 257—261].

5. Уравнение малых колебаний при сопротивлении среды пропорциональном квадрату скорости. В этом случае имеем уравнение [1])

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x - k^2 \cdot \gamma\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

или

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{dx} + 2k^2\gamma\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -2k^2 x \text{ [2])}$$

---

[1]) Изложенный прием применим для интегрированья более общих уравнений [**50**, p. 353; **24**, d, p. 265]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin x = -\frac{g\gamma}{l}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

и

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + (b_0 + b, x + \ldots)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Следует заметить, что метод последовательных приближений Poisson'a [**50**, § 189] дает решение этих уравнений не в виде чистого тригонометрического ряда, но с так называемыми секулярными членами, где время t выходит из под знака тригонометрической функции [**9**, c].

[2]) Знак коэффициента γ зависит от направления движения. Знак a одинаков со знаком γ.

и его интеграл

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2k^2\gamma^2} - \frac{x}{\gamma} + Ce^{-2k^2\gamma x}.$$

Определим постоянную C из условий

$$x = -a\ ^1),\ \frac{dx}{dt} = 0 \text{ при } t = 0,$$

тогда

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1 - 2k^2\gamma\, x - (1 + 2k^2\gamma a)\, e^{-k^2\gamma\,(x+a)}}{2\ k^2\gamma^2}$$

и затем

$$(24)\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = k^2\,(x+a)\,f_1(x),\quad f_1(x) = a - x - \tfrac{2}{3}k^2\gamma a x - \tfrac{4}{3}k^2\gamma a^2 + \tfrac{2}{3}k^2\gamma x^2 + \cdots$$

Из уравнения $f_1(b) = 0$ находим

$$b = a - \tfrac{4}{3}\ k^2\ \gamma\ a^2 + \cdots$$

Далее

$$f_1(x) = (b - x)\ (1 - \tfrac{2}{3}k^2\gamma\ x + \cdots).$$

Если x заключается между a и b и t момент, в который движущаяся точка впервые занимает положение x, то из уравнения (24) находим

$$(25)\quad \int_{-a}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(x+a)\ (b-x)\ (1 - \tfrac{2}{3}k^2\gamma x + \cdots)}} = \pm kt,$$

где знак $\pm$ одинаков со знаком a.

Положим здесь

$$x = \frac{-a+b}{2} - \frac{a+b}{2}\cos v = -\tfrac{2}{3}k^2\gamma a^2 + \cdots - (a - \tfrac{2}{3}k^2\gamma a^2 + \cdots)\cos v,$$

$$(0 \leqslant v \leqslant \pi),$$

тогда

$$\sqrt{(x+a)\ (b-x)} = \frac{a+b}{2}\sin v \text{ при } a > 0$$

и

$$-\sqrt{(x+a)\ (b-x)} = \frac{a+b}{2}\sin v \text{ при } a < 0.$$

Далее

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \tfrac{2}{3}k^2\gamma\, x + \cdots}} = 1 + \tfrac{1}{3}k^2\gamma\, x + \cdots$$

$$= 1 - \tfrac{2}{9}k^4\gamma^2 a^2 + \cdots - \tfrac{1}{3}k^2\gamma\,(a - \tfrac{2}{3}k^2\gamma\, a^2 + \cdots)\cos v + (\cdots)\cos 2v + \cdots.$$

---

1) См. вторую сноску на предыдущей странице.

Уравнение (25) обращается в следующее

$$(1 - \tfrac{2}{3} k^4 \gamma^2 a^2 + \cdots) v - \tfrac{1}{3} k^2 \gamma (a - \tfrac{2}{3} k^2 \gamma a^2 + \cdots) \sin v + (\cdots) \sin 2v + \cdots = kt,$$

т. е.

$$v - e_1 \sin v - e_2 \sin 2 v - \cdots = \varsigma, \tag{3}$$

где

$$\varsigma = \frac{kt}{1 - \tfrac{2}{9} k^4 \gamma^2 a^2 - \cdots}, \quad e_1 = \tfrac{1}{3} k^2 \gamma (a - \tfrac{2}{3} k^2 \gamma a^2 + \cdots), \cdots$$

Для определения x, как функции t, остается выразить, на основании уравнения (3), cos v в функции ς.

Не увеличивая числа подобных примеров, заметим, что к решению обобщенного уравнения Kepler'a приводятся многие задачи динамики [1]) и небесной механики [2]).

6. Решение уравнения (3) в виде тригонометрического ряда. Рассматривая уравнение (3), мы предположим, что при всех изменениях ς и v производная $\frac{d\varsigma}{dv}$ сохраняет знак, не обращаясь в нуль [3]).

Такое предположение оправдывается во всех случаях, как в приведенных примерах, когда уравнение (3) получается из интеграла (4).

При этом условии решение уравнения (3) будет единственным, и если выбрать целое число p так, что

$$p\pi < \varsigma < (p + 1)\pi,$$

то, подставляя в уравнение (3) эти две кратные величины π вместо v, убедимся в существовании корня уравнения (3), содержащегося между этими двумя величинами [**4**, b].

---

[1]) См. мемуар Staude [**60**, §§ 9, 10, 12, 13] и [**31**, p. 519], [**68**, Ch. XVI]. С точки зрения проведения вычислений до конца заслуживают особого упоминания некоторые случаи движения тяжелой точки по поверхности вращения [**24**, f; **63**, *a*] и составление уравнения (в декартовых координатах) профиля установившейся плоской волны на поверхности жидкости [**38**].

[2]) Сюда относятся, например, некоторые задачи, связанные с задачей трех тел [**12**, *a* p. 3, 8, 9]. Случай либрации, приводящий к обобщенному уравнению математического маятника $\frac{d^2v}{dt^2} = f(v)$, где f (v) аггрегат периодических членов [**7**, p. 122—130]. См. также [**23**, b].

[3]) Для этого достаточно, например, чтобы переменные $e_1, e_2, \ldots e_m, \ldots$ удовлетворяли условию

$$|e_1| + |2\ e_2| + \ldots + |m e_m| + \ldots < 1.$$

Как нечетную периодическую функцию от ς, разность $v - \varsigma$ можно разложить в ряд [1])

$$v - \varsigma = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\varsigma, \tag{26}$$

где

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (v - \varsigma) \sin k\varsigma \, d\varsigma.$$

Интегрируя по частям и замечая, что, в силу уравнения (3), $v - \varsigma = 0$ при $\varsigma = 0$ и $\varsigma = \pi$, находим

$$a_k = \frac{2}{k \cdot \pi} \int_0^{\pi} \cos k\varsigma \, dv,$$

т. е.

$$a_a = \frac{2}{k} J_k (ke_1, ke_2, \ldots ke_m, \ldots),$$

где

(1) $J_k (x_1 \; x_2, \ldots, x_m, \ldots)$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos (kv - x_1 \sin v - x_2 \sin 2v - \cdots - x_m \sin mv - \cdots) \, dv.$$

7. Другие представления функции $J_k (x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$. Рассмотрим еще интеграл

$J'_k (x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin (kv - x_1 \sin v - x_2 \sin 2v - \cdots - x_m \sin mv - \cdots) \, dv.$$

Заменяя в $J_k (x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ и $J'_k (x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ v через $2\pi - v$, найдем

$J_k (x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \cos (kv - x_1 \sin v - x_2 \sin 2v - \ldots - x_m \sin mv - \ldots) \, dv,$$

---

[1]) В силу неравенства $|a_k| = \frac{2|J_k|}{k} \leqslant J^2_k + \frac{1}{k^2}$ этот ряд сходится абсолютно и равномерно для всех вещественных значений ς, так как ряды $\sum_{k=1}^{\infty} J^2_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходящиеся.

$$-J_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \sin(kv - x_1 \sin v - x_2 \sin 2v - \ldots - x_m \sin mv - \ldots)\, dv.$$

Поэтому

$$J_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \cos(kv - x_1 \sin v - x_2 \sin 2v - \ldots - x_m \sin mv - \ldots)\, dv,$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \sin(kv - x_1 \sin v - x_2 \sin 2v - \ldots - x_m \sin mv - \ldots)\, dv.$$

Отсюда заключаем

$$J_k(x_1, x_2, \ldots)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} [\cos(kv - x_1 \sin v - x_2 \sin 2v - \ldots) - i \sin(kv - x_1 \sin v - x_2 \sin 2v - \ldots)]\, dv,$$

т. е.

$$(27)\quad J_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} e^{i(x_1 \sin v + x_2 \sin 2v + \ldots + x_m \sin mv + \ldots - kv)}\, dv.$$

Положим здесь $e^{iv} = t$, тогда интеграл (27) между вещественными пределами преобразуется в криволинейный интеграл

$$(28)\quad J_k(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c} e^{\frac{x_1}{2}(t - \frac{1}{t}) + \frac{x_2}{2}(t^2 - \frac{1}{t^2}) + \ldots + \frac{x_m}{2}(t^m - \frac{1}{t^m}) + \ldots} t^{-k-1} dt,$$

взятый по окружности радиуса единицы с центром в точке $t = 0$.

8. Производящая функция для $J_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ и разложение функции $J_k(x_1, x_2, \ldots)$ в кратный ряд из произведений функций $J_{k_m}(x_m)$, $m = 1, 2, \ldots$ Из последнего выражения (28) видно,

что функция $J_k(x_1, x_2, ..., x_m, ...)$ определяется как коэффициент следующего разложения в ряд Laurent'a [1])

$$e^{\frac{x_1}{2}(t-\frac{1}{t})+\frac{x_2}{2}(t^2-\frac{1}{t^2})+...+\frac{x_m}{2}(t^m-\frac{1}{t^m})+...} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x_1, x_2, ..., x_m, ...)\, t^k, \tag{10}$$

имеющего место для всех конечных значений t [2]), кроме $t = 0$.

При $m = 1$ получаем известное разложение [**20**, *a*, p. 106; **56**, b, p. 137]

$$e^{\frac{x_1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} J_{k_1}(x_1)\, t^{k_1}.$$

Заменяя здесь x_1 через x_m и t через t^m, выводим

$$e^{\frac{x_m}{2}(t^m-\frac{1}{t^m})} = \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} J_{k_m}(x_m)\, t^{mk_m}, \tag{29}$$

откуда, полагая $m = 1, 2, ...$ и производя почленное перемножение полученных рядов, [**27**, t. I, §§ 315, 316], сходящихся абсолютно, приходим к равенству

$$e^{\frac{x_1}{2}(t-\frac{1}{t})+\frac{x_2}{2}(t^2-\frac{1}{t^2})+...+\frac{x_m}{2}(t^m-\frac{1}{t^m})+...} = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{+\infty}...\sum_{k_m=-\infty}^{+\infty}... J_{k_1}(x_1)\, J_{k_2}(x_2)\, ..\, J_{k_m}(x_m)...\, t^{k_1+2k_2+...+mk_m+...}.$$

Из сравнения этого равенства с (10) заключаем

$$J_k(x_1, x_2, ..., x_m, ...) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{+\infty}...\sum_{k_m=-\infty}^{+\infty}... J_{k_1}(x_1)\, J_{k_2}(x_2)\, ...\, J_{k_m}(x_m)\, ...,$$

где $k_1 + 2k_2 + ... + mk_m + ... = k$, т. е.

---

[1]) См. например, [**69**, p. 100, 101].

[2]) и при надлежащем ограничении для t, x_1, x_2, ..., всегда выполняемом в случае уравнения (3) получающегося из интеграла (4), если число этих переменных неограниченно велико.

$$(11)\qquad J_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \ldots \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} \ldots J_{k-2k_2-\ldots-mk_m-\ldots}(x_1) \ldots J_{k_2}(x_2) \ldots J_{k_m}(x_m) \ldots$$

Получаем разложение функции $J_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ в кратный ряд из произведений обыкновенных функций Bessel'я [1]).

Замечание. Полагая в (10) $x_1 = x_2 = \ldots = x_{m-1} = x_{m+1} = \ldots = 0$, найдем

$$(30)\qquad e^{\frac{x_m}{2}\left(t^m - \frac{1}{t^m}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(0, 0, \ldots, 0, x_m, 0, \ldots)\, t^k,$$

где

$$J_k(0, 0, \ldots, 0, x_m, 0, \ldots) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(kv - x_m \sin mv)\, dv.$$

Из сравнения (29) и (30) заключаем

$$J_k(0, 0, \ldots, 0, x_m, 0, \ldots) = J_{k_m}(x_m)$$

при $k = m\,k_m$, т. е. при k кратном m, и

$$J_k(0, 0, \ldots, 0, x_m, 0, \ldots) = 0$$

во всех других случаях.

9. Выражение функции $J_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ в виде бесконечного ряда из произведений двух полиномов. Из разложения (10) можно получить другое выражение функции $J_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ в виде бесконечного ряда, составленного из произведений полиномов от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ Действительно, для всех конечных значений комплексного переменного t [2]) можно рассматривать разложение в ряд

$$(13)\qquad e^{\frac{1}{2}(x_1 t + x_2 t^2 + \ldots + x_m t^m + \ldots)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{V_r(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, x_r)}{2^r \cdot 1 \cdot 2 \ldots r}\, t^r,$$

где $V_r(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, x_r)$, $r = 1, 2, \ldots$, некоторые полиномы от переменных $x_1, x_2, \ldots$ [3]), свойства которых вскоре будут ближе изучены.

---

[1]) Возможность разложения по обыкновенным функциям Bessel'я коэффициентов A_k и B_k разложений (5) и (7), встречаемых в методе Weierstrass'a, предусматривают многие авторы, например Charlier [**12**, b, p. 34], Bohlin [**7**, p. 130], но нигде это разложение не указано явно.

[2]) См. вторую сноску предыдущей страницы.

[3]) Если число переменных конечно и равно n, то

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_r = 0 \text{ при } r > n.$$

Исключая из рассуждений значение $t = o$ и заменяя в равенстве (13) t через $-\frac{1}{t}$ и $x_2, x_4, \ldots$ через $-x_2, -x_4, \ldots$, находим

$$(31) \qquad e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{t}+\frac{x_2}{t^2}+\ldots+\frac{x_m}{t^m}+\ldots\right)} = \sum_{s=o}^{\infty} \frac{(-1)^s V_s(x_1, -x_2, \ldots, (-1)^{m-1} x_m, \ldots, (-1)^{s-1} x_s)}{2^s \cdot 1 \cdot 2 \ldots s} t^{-s}.$$

Почленное перемножение рядов (13) и (31) дает

$$(32) \qquad e^{\frac{x_1}{2}(t-\frac{1}{t})+\frac{x_2}{2}(t^2-\frac{1}{t^2})+\ldots+\frac{x_m}{2}(t^m-\frac{1}{t^m})+\ldots} = \sum_{r=o}^{\infty}\sum_{s=o}^{\infty} \frac{(-1)^s V_r(x_1, x_2, \ldots, x_r) V_s(x_1, -x_2, \ldots, (-1)^{s-1} x_s)}{2^{r+s} \cdot 1 \cdot 2 \ldots r \cdot 1 \cdot 2 \ldots s} t^{r-s}.$$

Сравнивая последнее разложенне с (10), заключаем

$$J_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = \sum_{r,s=o}^{\infty} \frac{(-1)^s V_r(x_1, x_2, \ldots, x_r) V_s(x_1, -x_2, \ldots (-1)^{s-1} x_s)}{2^{r+s} \cdot 1 \cdot 2 \ldots r \cdot 1 \cdot 2 \ldots s},$$

где $r - s = k$, и таким образом приходим к формуле

$$(33)\ J_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = \sum_{s=o}^{\infty} \frac{(-1)^s V_{k+s}(x_1, x_2, \ldots, x_{k+s}) . V_s(x_1, -x_2, \ldots, (-1)^{s-1} x_s)}{2^{k+2s} \cdot 1 \cdot 2 \ldots (k+s) \cdot 1 \cdot 2 \ldots s},$$

где k целое и положительное число.

Ряд правой части этой формулы есть ряд абсолютно сходящийся. В самом деле, каждый член этого ряда составлен перемножением соответственных членов рядов (13) и (31) при $t = 1$, сходящихся абсолютно для всех конечных значений $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ [1]).

Представим затем разложение (10) в виде

$$e^{\frac{x_1}{2}(t-\frac{1}{t})+\frac{x_2}{2}(t^2-\frac{1}{t^2})+\ldots+\frac{x_m}{2}(t^m-\frac{1}{t^m})+\ldots} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_{-k}(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) \cdot t^{-k}$$

Сравнивая это разложение с (32) заключаем

$$J_{-\kappa}(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = \sum_{r,s=o}^{\infty} \frac{(-1)^s V_r(x_1, x_2, \ldots, x_r) . V_s(x_1, -x_2, \ldots, (-1)^{s-1} x_s)}{2^{r+s} \cdot 1 \cdot 2 \ldots r \cdot 1 \cdot 2 \ldots s.},$$

где $r - s = -k$, т. е.

---

[1]) См. вторую сноску стр. 48.

$$J_{-k}(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-r} V_{k-r}(x_1, -x_2, \ldots, (-1)^{m-1} x_m, \ldots, (-1)^{k-r-1} x_{k-r}) . V_r(x_1, x_2, \ldots, x_r)}{2^{k+2r} . 1 . 2 \ldots (k+r) . 1 . 2 \ldots r}.$$

Таким образом получаем формулу [1])

(34) $$J_{-k}(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = (-1)^k J_k(x_1, -x_2, \ldots, (-1)^{m-1} x_m, \ldots).$$

Пользуясь этой формулой можно ограничиться при изучении функций $J_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ случаем положительного целого значения k.

Заменяя в разложении (10) t через $\frac{1}{t}$, легко придем к новой формуле

(35) $$J_{-k}(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = J_k(-x_1, -x_2, \ldots, -x_m, \ldots).$$

Сравнивая (34) с (35), заключаем еще

(36) $$J_k(-x_1, x_2, \ldots, (-1)^m x_m, \ldots) = (-1)^k J_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots).$$

Формулы (34) и (35) представляют распространение [2]) на $J_k(x_1, x_2, \ldots)$ известных формул

$$J_{-k}(x_1) = (-1)^k J_k(x_1), \quad J_{-k}(x_1) = J_k(-x_1)$$

для $J_k(x_1)$.

10. Свойства полиномов $V_s(x_1, x_2, \ldots)$. Разложение (13) в случае $x_2 = x_3 = \ldots = x_m = \ldots = 0$ приводится к строке Maclaurin'a для показательной функции

$$e^{\frac{1}{2} x_1 t} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x_1^r . t^r}{2^r . 1 . 2 \ldots r}.$$

Заменяя здесь t через t^m и x_1 через x_m, имеем

$$e^{\frac{1}{2} x_m t^m} = \sum_{r_m=0}^{\infty} \frac{x_m^{r_m} t^{m r_m}}{2^{r_m} . 1 . 2 \ldots r_m}.$$

Полагая $m = 1, 2, \ldots$ и производя почленное перемножение полученных рядов, найдем

$$e^{\frac{1}{2}(x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_m t^m + \cdots)}$$

$$= \sum_{r_1=0}^{\infty} \sum_{r_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{r_m=0}^{\infty} \cdots \frac{x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_m^{r_m} \ldots}{2^{r_1+r_2+\cdots+r_m+\cdots} 1.2 \ldots r_1 . 1.2 \ldots r_2 \ldots 1.2 \ldots r_m \ldots} t^{r_1+2r_2+\cdots+m r_m+\cdots}.$$

[1]) Нетрудно проверить ее из разложения (10), заменяя в нем t через $-\frac{1}{t}$, x_2, x_4, ... через $-x_2$, $-x_4$, ..., и сравнивая полученное разложение с прежним (10).

[2]) Для случая двух переменных см. также [**26**, h].

Сравнение этого разложения с (13) дает [1])

$$(37)\qquad \frac{V_r(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, x_r)}{2^r \cdot 1 \cdot 2 \ldots r} = \sum_{r_2=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} \cdots \sum_{r_m=0}^{\left[\frac{r}{m}\right]} \cdots \sum_{r_r=0}^{1} \frac{1}{2^{r_1+r_2+\cdots+r_m+\cdots+r_r}} \frac{x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_m^{r_m} \ldots x_r^{r_r}}{1.2\ldots r_1 . 1.2\ldots r_2 \ldots 1.2\ldots r_m \ldots 1.2\ldots r_r},$$

где $r_1 = r - 2r_2 - \ldots - r \cdot r_r$ и символ $\left[\frac{r}{m}\right]$, $m = 1, 2, \ldots r$, означает наибольшую целую часть числа $\frac{r}{m}$.

Из этого выражения, или непосредственно из разложения (13), видно, что полином $V_r(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ представляет однородную функцию степени r от $x_1, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt[m]{x_m}, \ldots, \sqrt[r]{x_r}$ и [2])

$$V_r(-x_1, x_2, -x_3, \ldots, (-1)^r x_r) = (-1)^r V_r(x_1, x_2, \ldots, x_r).$$

На этом основании из разложения (12) следует, что если, как обычно бывает в приложениях, $x_1, x_2, \ldots$ представляют ряды по возрастающим степеням одной и той же величины, первые члены которых соответственно степеней 1, 2, ..., то $J_k(x_1, x_2, \ldots)$ представляет подобный же ряд, начинающийся с члена степени k.

---

[1]) Можно получить ту же формулу следующим образом:

Перемножая почленно два разложения

$$e^{\frac{1}{2}(x_1 t + x_2 t^2 + \ldots + x_{n-1} t^{n-1})} = \sum_{r'=0}^{\infty} \frac{V_{r'}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}{2^{r'} \cdot 1, 2 \ldots r'} t^{r'}$$

и

$$e^{\frac{1}{2} x_n t^n} = \sum_{r_n=0}^{\infty} \frac{x_n^{r_n}}{2^{r_n} \cdot 1.2 \ldots r_n} t^{n r_n}$$

и сравнивая результат с (13), находим

$$(38)\qquad \frac{V_r(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{2^r \cdot 1 \cdot 2 \ldots r} = \sum_{r_n=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} \frac{V_{r-nr_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \cdot x_n^{r_n}}{2^{r-(n-1)r_n} \, 1 \cdot 2 \ldots (r - nr_n) \cdot 1 \cdot 2 \ldots r_n}$$

Применяя эту формулу последовательно к $V_r(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $V_{r-nr_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, $V_{r-(n-1)r_{n-1}-nr_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$, ..., составим выражение для $V_r(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при $n = r$ приводящееся к формуле (37).

[2]) В силу этого равенства формулу (33) можно представить в виде (12).

Для $m = 2$ имеем

$$V_r(x_1, x_2) = \sum_{r_2=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} \frac{2^{r_2} \cdot r(r-1)\ldots(r-2r_2+1)}{1 \cdot 2 \ldots r_2} x_1^{\,r-2r_2} x_2^{\,r_2},$$

т. е.

$$V_r(x_1, x_2) = x_1^{\,r} + 2r(r-1)x_1^{\,r-2} \cdot x_2 + \ldots + \frac{2^{r_2} \cdot r(r-1)\ldots(r-2r_2+1)}{1 \cdot 2 \ldots r_2} x_1^{\,r-2r_2} x_2^{\,r_2} + \ldots,$$

где последний член содержит $x_2^{\frac{r}{2}}$ или $x_1 x_2^{\frac{r-1}{2}}$, смотря потому, будет ли r четным или нечетным числом [**16**, t. III, p. 288].

Полиномы $V_r(x_1, x_2)$ или $V_r(x, \frac{y}{2})$ хорошо известны в анализе. Как и их производящая функция

$$e^{xt+yt^2} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{V_r\left(x, \frac{y}{2}\right)}{1 \cdot 2 \ldots r} t^r,$$

они удовлетворяют при всяком целом и положительном значении указателя r уравнению теории тепла

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \tag{39}$$

и легко выражаются чрез известные полиномы $P_r(z)$ Чебышев [**64**] — Hermite'a [**22**], которые определяются равенством

$$\frac{d^r}{dz^r}\left(e^{-z^2}\right) = e^{-z^2} P_r(z).$$

Для полинома $V_r(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ легко установить систему уравнений с частными производными, приводящуюся к уравнению (39) для $V_r\left(x, \frac{y}{2}\right)$.

Действительно, при любом значении параметра t функция

$$e^{\frac{1}{2}(x_1 t + x_2 t^2 + \ldots + x_m t^m + \ldots)}$$

удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial x_m} = 2^{m-1} \frac{\partial^m V}{\partial x_1^{\,m}}, \quad m = 2, 3, \ldots, \tag{40}$$

и, следовательно, той же системе удовлетворяет каждый коэффициент разложения (13) этой функции по степеням t.

Этот результат можно проверить еще, дифференцируя обе части равенства (13) по $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ и сравнивая результат с первоначальным разложением (13). Таким образом получим соотношения

$$(41) \qquad \frac{\partial V_r}{\partial x_m} = 2^{m-1} \cdot r\,(r-1) \ldots (r-m+1)\, V_{r-m}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

которые вновь приводят к уравнениям (40).

Всякий полином $V_r'(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ степени r в переменных $x_1, x_2, \ldots, x_r$, удовлетворяющий уравнениям (40), представляет линейную комбинацию с постоянными коэффициентами из полиномов $V_0 = 1$, $V_1, V_2, \ldots, V_r$. В самом деле, полином $V_r'(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ представляет сумму членов вида

$$A_{r_1 r_2 \ldots r_r}\, x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_r^{r_r},$$

где $r_1 + r_2 + \ldots + r_r \leqq r$ и $A_{r_1 r_2 \ldots r_r}$ есть значение

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots r_1 \cdot 1 \cdot 2 \ldots r_2 \ldots 1 \cdot 2 \ldots r_r} \frac{\partial^r V_r'}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \ldots \partial x_r^{r_r}}$$

при $x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 0$. Но, в силу уравнений (40) и уравнений, выводимых из них при помощи дифференцирования, можно выразить все производные от V_r' чрез производные по x_1.

Полином V_r', удовлетворяющий уравнениям (40), вполне определяется поэтому коэффициентами членов, не зависящих от $x_2, x_3, \ldots, x_r$, и если выбрать коэффициенты $a_0, a_1, \ldots a_r$ так, чтобы эти члены в полиномах $a_0 V_0 + a_1 V_1 + \ldots + a_r V_r$ и V_r' были одинаковы, сами эти полиномы будут тождественны.

Как однородная функция степени r в переменных $x_1, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt[r]{x_r}$, полином $V_r(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ удовлетворяет тождеству Euler'a

$$r\, V_r(x_1, x_2, \ldots, x_r) = x_1 \frac{\partial V_r}{\partial x_1} + \sqrt{x_2} \frac{\partial V_r}{\partial \sqrt{x_2}} + \ldots + \sqrt[r]{x_r} \frac{\partial V_r}{\partial \sqrt[r]{x_r}},$$

т. е.

$$r\, V_r = x_1 \frac{\partial V_r}{\partial x_1} + 2x_2 \frac{\partial V_r}{\partial x_2} + \ldots + r\, x_r \frac{\partial V_r}{\partial x_r},$$

откуда, в силу уравнений (41), получаем возвратное соотношение

$$(14) \quad V_r = x_1 V_{r-1} + 2 \cdot 2\,(r-1)\, x_2 V_{r-2} + 2^2 \cdot 3\,(r-1)(r-2)\, x_3 V_{r-3} + \ldots,$$

и из него последовательно выводим

$$V_0 = 1,$$
$$V_1 = x_1,$$
$$V_2 = x_1^2 + 4 x_2,$$

$$V_3 = x_1^3 + 12x_1\ x_2 + 24x_3,$$

$$V_4 = x_1^4 + 24\,x_1^2\,x_2 + 96\,x_1\,x_3 + 48\,x_2^2 + 192\,x_4,$$

$$V_5 = x_1^5 + 40\,x_1^3\,x_2 + 240\,x_1^2\,x_3 + 240\,x_1\,x_2^2 + 960\,x_1\,x_4 + 960\,x_2\,x_3 + 1920\,x_5,$$

$$V_6 = x_1^6 + 60\,x_1^4\,x_2 + 480\,x_1^3\,x_3 + 720\,x_1^2\,x_2^2 + 2880\,x_1^2\,x_4 + 5760\,x_1\,x_2\,x_3 + 11520\,x_1\,x_5 + 960\,x_2^3 + 11520\,x_2\,x_4 + 5760\,x_3^2 + 23040\,x_6,$$

$$V_7 = x_1^7 + 84\,x_1^5\,x_2 + 840\,x_1^4\,x_3 + 1680\,x_1^3\,x_2^2 + 6720\,x_1^3\,x_4 + 20160\,x_1^2\,x_2\,x_3 + 40320\,x_1^2\,x_5 + 6720\,x_1\,x_2^3 + 80640\,x_1\,x_2\,x_4 + 40320\,x_1\,x_3^2 + 161280\,x_1\,x_5 + 40320\,x_2^2\,x_3 + 161280\,x_2\,x_5 + 161280\,x_3\,x_4 + 322560\,x_7,$$

. . . . . .

Одновременно с разложением (13) рассмотрим следующее

$$(42)\qquad e^{\frac{1}{2}(y_1\,t + y_2\,t^2 + \ldots + y_m\,t^m + \ldots)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{V_s(y_1, y_2, \ldots, y_s)}{2^s \cdot 1 \cdot 2 \ldots s}\ t^s.$$

Производя почленное перемножение равенств (13) и (42), имеем

$$e^{\frac{1}{2}[(x_1 + y_1)\,t + (x_2 + y_2)\,t^2 + \ldots + (x_m + y_m)\,t^m + \ldots]} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{V_r(x_1, x_2, \ldots, x_r)\,V_s(y_1, y_2, \ldots, y_s)}{2^{r+s}\,1 \cdot 2 \ldots r \cdot 1 \cdot 2 \ldots s}\ t^{r+s},$$

с другой стороны

$$e^{\frac{1}{2}[(x_1 + y_1)\,t + (x_2 + y_2)\,t^2 + \ldots + (x_m + y_m)\,t^m + \ldots]} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_k(x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \ldots,\ x_k + y_k)}{2^k \cdot 1 \cdot 2 \ldots k}\ t^k.$$

Из сравнения двух последних разложений выводим формулу сложения [1])

$$(43)\qquad \frac{V_k(x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \ldots,\ x_k + y_k)}{1 \cdot 2 \ldots k} = \sum_{s=0}^{k} \frac{V_{k-s}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-s})\,V_s(y_1, y_2, \ldots, y_s)}{1 \cdot 2 \ldots (k-s) \cdot 1 \cdot 2 \ldots s}.$$

---

[1]) Если число переменных равно двум, эта формула равносильна формуле сложения для полиномов Чебышев—Hermite'a, указанной позднее Campé de Fériet [**28**, p. 345].

Если заменить в ней x_m через $x_m\, t_m$ и y_m через $-\frac{x_m}{t^m}$, $m = 1, 2, \ldots$, то, замечая, что

$$V_{k-s}(x_1\, t,\ x_2\, t^2,\ \ldots,\ x_{k-s}\, t^{k-s}) = t^{k-s} \cdot V_{k-s}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k-s})$$

и

$$V_s\left(-\frac{x_1}{t},\ -\frac{x_2}{t^2},\ \ldots,\ -\frac{x_s}{t^s}\right) = t^{-s} \cdot V_s(-x_1,\ -x_2,\ \ldots,\ -x_s),$$

найдем

$$\frac{V_k\left[x_1\left(t-\frac{1}{t}\right),\ x_2\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right),\ \ldots,\ x_k\left(t^k-\frac{1}{t^k}\right)\right]}{1\cdot 2\ldots k} = \sum_{s=0}^{k} \frac{V_{k-s}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k-s}) \cdot V_s(-x_1,\ -x_2,\ \ldots,\ -x_s)}{1\cdot 2\ldots(k-s)\cdot 1\cdot 2\ldots s}\, t^{k-2s}.$$

Откуда, умножая на $\frac{t^{-p-1}}{2\pi i}$, где p любое целое и положительное число, и производя интегрирование по окружности C радиуса единицы с центром в точке $t = 0$, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{V_k\left[x_1\left(t-\frac{1}{t}\right),\ x_2\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right),\ \ldots,\ x_k\left(t^k-\frac{1}{t^k}\right)\right]}{1\cdot 2\ldots k}\, t^{-p-1}dt = \frac{V_{k-s}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k-s}),\ V_s(-x_1,\ -x_2,\ \ldots,\ -x_s)}{1\cdot 2\ldots(k-s)\cdot 1\cdot 2\ldots s}$$

для $k = p + 2s$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, т. е.

$$(44)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{V_{p+2s}\left[x_1\left(t-\frac{1}{t}\right),\ x_2\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right),\ \ldots,\ x_{p-2s}\left(t^{p+2s}-\frac{1}{t^{p+2s}}\right)\right]}{1\cdot 2\ldots(p+2s)}\, t^{-p-1}dt = \frac{V_{p+s}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{p+s})\, V_s(-x_1,\ -x_2,\ \ldots,\ -x_s)}{1\cdot 2\ldots(p+s),\ 1\cdot 2\ldots s}$$

и

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{V_k\left[x_1\left(t-\frac{1}{t}\right),\ x_2\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right),\ \ldots,\ x_k\left(t^k-\frac{1}{t^k}\right)\right]}{1\cdot 2\ldots k}\, t^{-p-1}\, dt = 0$$

для всех других значений k.

Пользуясь этими формулами, исходя из равенства

$$e^{\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \ldots + x_m + \ldots)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_k(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m,\ \ldots)}{2^k\cdot 1\cdot 2\ldots k},$$

легко снова проверить разложение

$$J_p(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{\frac{x_1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{x_2}{2}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)+\ldots+\frac{x_m}{2}\left(t^m-\frac{1}{t^m}\right)+\ldots} t^{-p-1}dt$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{V_{p+s}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+s}) \cdot V_s(-x_1, -x_2, \ldots, x_s)}{2^{p+2s}\, 1 \cdot 2 \ldots (p+s) \cdot 1 \cdot 2 \ldots s}.$$

Из формулы сложения (43) разсуждением аналогичным предыдущему можно установить еще следующее равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{V_{p+2s}\left[x_1\left(t+\frac{1}{t}\right), x_2\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right), \ldots, x_{p+2s}\left(t^{p+2s}+\frac{1}{t^{p+2s}}\right)\right]}{1 \cdot 2 \ldots (p+2s)} t^{-p-1}dt$$

$$= \frac{V_{p+s}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+s})\ V_s(x_1, x_2, \ldots, x_s)}{1 \cdot 2 \ldots (p+s) \cdot 1 \cdot 2 \ldots s}.$$

Полагая $t = e^{iv}$, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{V_{p+2s}(2x_1 \cos v, 2x_2 \cos 2v, \ldots, 2x_{p+2s} \cos (p+2s)v) \cos pv}{1 \cdot 2 \ldots (p+2s)} dv$$

$$= \frac{V_{p+s}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+s}) \cdot V_s(x_1, x_2, \ldots, x_s)}{1 \cdot 2 \ldots (p+s) \cdot 1 \cdot 2 \ldots s},$$

или, если разбить промежуток $0,2\pi$ на два $0,\pi$ и $\pi,2\pi$ и для второго промежутка заменить в интеграле v через $2\pi - v$,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{V_{p+2s}(2x_1 \cos v, 2x_2 \cos 2v, \ldots, 2x_{p+2s} \cos (p+2s)v) \cos pv\, dv}{1 \cdot 2 \ldots (p+2s)}$$

$$= \frac{V_{p+s}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+s}) \cdot V_s(x_1, x_2, \ldots, x_s)}{1 \cdot 2 \ldots (p+s)\ 1 \cdot 2 \ldots s}.$$

Это равенство в частном случае $p = 0$ приводит к любопытной формуле

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{V_{2s}(2x_1 \cos v, 2x_2 \cos 2v, \ldots, 2x_{2s} \cos 2sv)}{1 \cdot 2 \ldots 2s} dv$$

$$= \left[\frac{V_s(x_1, x_2, \ldots, x_s)}{1 \cdot 2 \ldots s}\right]^2.$$

Заметим еще, что из разложения (13) следует

$$\frac{V_{2r}(0, x_2, 0, x_4, \ldots)}{2^{2r} \cdot 1 \cdot 2 \ldots 2r} = \frac{V_r(x_2, x_4, \ldots,)}{2^r \cdot 1 \cdot 2 \ldots r}$$

и

$$V_{2r+1}(0, x_2, 0, x_4, \ldots) = 0.$$

На этом основании, или непосредственно из разложения (10), имеем

$$J_{2r}(0, x_2, 0, x_4, \ldots) = J_r(x_2, x_4, \ldots)$$

и

$$J_{2r+1}(0, x_2, 0, x_4, \ldots) = 0$$

11. Другие выражения функции $J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ в виде бесконечных рядов. В силу разложений

$$(x_1 \sin\varphi + x_2 \sin 2\varphi + \ldots)^{2s} = \tfrac{1}{2} W_{2s}^{(0)}(x_1, x_2, \ldots) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} W_{2s}^{(\kappa)}(x_1, x_2, \ldots) \cos\kappa\varphi,$$

$$(x_1 \sin\varphi + x_2 \sin 2\varphi + \ldots)^{2s+1} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} W_{2s+1}^{(\kappa)}(x_1, x_2, \ldots) \sin\kappa\varphi,$$

где W_{2s}, W_{2s+1} однородные полиномы соответственно степеней $2s$ и $2s+1$ в переменных $x_1, x_2, \ldots$, и

$$e^{i(x_1 \sin\varphi + x_2 \sin 2\varphi + \ldots)} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(x_1 \sin\varphi + x_2 \sin 2\varphi + \ldots)^{2s}}{1 \cdot 2 \ldots 2s} + i \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(x_1 \sin\varphi + x_2 \sin 2\varphi + \ldots)^{2s+1}}{1 \cdot 2 \ldots (2s+1)},$$

из (27)

$$J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(x_1 \sin\varphi + x_2 \sin 2\varphi + \ldots + x_m \sin m\varphi + \ldots - \kappa\varphi)}\, d\varphi$$

имеем

$$(15)\quad J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{r}{2}\right]} \frac{W_r^{(\kappa)}(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)}{1 \cdot 2 \ldots r},$$

где $\left[\frac{r}{2}\right]$ наибольшее целое число, содержащееся в $\frac{r}{2}$.

Полином $(-1)^{\left[\frac{r}{2}\right]} \frac{W_r^{(\kappa)}(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)}{2 \cdot 1 \cdot 2 \ldots r}$ представляет сумму

$$\frac{1}{2^r} \sum_{n_2=0}^{r} \cdots \sum_{n_m=0}^{r} \cdots N_{-k, n_1, n_2 \ldots, n_m, \ldots} \frac{x_1^{n_1}}{1 \cdot 2 \ldots n_1} \frac{x_2^{n_2}}{1 \cdot 2 \ldots n_2} \cdots \frac{x_m^{n_m}}{1 \cdot 2 \ldots n_m} \cdots,$$

где $n_1 = r - n_2 - \ldots - n_m - \ldots$ и

$$N_{-\kappa,\ n_1,\ n_2,\ \ldots\ n_m;\ \ldots}$$

$$= \frac{(2i)^{n_1+n_2+\ldots n_m+\ldots}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ki\varphi} \sin^{n_1}\varphi \sin^{n_2} 2\varphi \ldots \sin^{n_m} m\varphi \ldots d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C t^{-\kappa-1} \left(t - \frac{1}{t}\right)^{n_1} \left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right)^{n_2} \ldots \left(t^m - \frac{1}{t^m}\right)^{n_m} \ldots dt\ ^{1})$$

суть целые числа, удовлетворяющие возвратным соотношениям

(45) $$N_{-k,\ n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_m,\ \ldots} = N_{-k+m,\ n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_m-1,\ \ldots} - N_{-k-m,\ n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_m-1,\ \ldots},$$
$$(m = 1, 2, \ldots)$$

и

(46) $$k\,N_{-k,\ n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_m,\ \ldots} = n_1 \left(N_{-k+1,\ n_1-1,\ n_2,\ \ldots} + N_{-k-1,\ n_1-1,\ n_2,\ \ldots}\right)$$
$$+ 2n_2 \left(N_{-k+2,\ n_1,\ n_2-1,\ \ldots} + N_{-k-2,\ n_1,\ n_2-1,\ \ldots}\right) + \ldots$$
$$+ mn_m \left(N_{-k+m,\ n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_m-1,\ \ldots} + N_{-k-m,\ n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_m-1,\ \ldots}\right) + \ldots,$$

из которых они последовательно выводятся, обращающиеся в нуль при $-\kappa + n_1 + 2n_2 + \ldots + mn_m + \ldots$ равном целому нечетному или отрицательному числу и приводящиеся к числам Cauchy [2]) для $m = 2$ [3]).

---

[1]) Интеграл взят в положительном направлении (против часовой стрелки) по какому-нибудь замкнутому контуру, окружающему точку $t = 0$.

В силу формулы (44) произведение $\frac{V_{p+s}(x_1, x_2, \ldots, x_p, s)\, V_s(-x_1, -x_2, \ldots, -x_s)}{1 \cdot 2 \ldots (p+s) \cdot 1 \cdot 2 \ldots s}$ получается из полинома $\frac{V_{p+2s}(x_1, x_2, \ldots, x_p, 2s)}{1 \cdot 2 \ldots (p+2s)}$, если в каждом члене этого полинома при $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots$ ввести соответствующий множитель $N_{-p,\ n_1,\ n_2,\ \ldots}$

[2]) О числах Cauchy см. Tisserand [**63**, b, t. I, p. 234—237] и Watson [**65**, § 10.3].

[3]) При $m = 1$ ряды (15) и (16) приводятся к известному степенному ряду для $J_\kappa(x)$.

Действительно, из равенств

$$\sin^{2s}\varphi = \frac{2s}{1}\frac{(2s-1)\ldots(s+1)}{2\ldots s}\frac{1}{2^{2s}} - \ldots + (-1)^q \frac{2s}{1}\frac{(2s-1)\ldots(s+q+1)}{2\ldots(s-q)}\frac{1}{2^{2s-1}}\cos 2q\varphi + \ldots$$
$$+ (-1)^s \frac{1}{2^{2s-1}}\cos 2s\varphi,$$

$$\sin^{2s+1}\varphi = \frac{(2s+1)\,2s\ \ldots\ (s+2)}{1 \cdot 2 \ldots s}\frac{1}{2^{2s}}\sin\varphi - \ldots$$
$$+ (-1)^q \frac{(2s+1)\,2s\ \ldots\ (s+q+2)}{1 \cdot 2 \ldots (s-q)}\frac{1}{2^{2s}}\sin(2q+1)\varphi - \ldots + (-1)^s \frac{1}{2^{2s}}\sin(2s+1)\varphi$$

Для функций $J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ имеем затем новое разложение

(16) $$J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=0}^{\infty} \cdots N_{-\kappa, n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots} \frac{x_1^{n_1}}{2^{n_1} \cdot 1 \cdot 2 \ldots n_1} \frac{x_2^{n_2}}{2^{n_2} \cdot 1 \cdot 2 \ldots n_2} \cdots \frac{x_m^{n_m}}{2^{n_m} \cdot 1 \cdot 2 \ldots n_m} \cdots$$

В силу этого разложения из возвратных соотношений (45) и (46) для $N_{-\kappa, n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots}$ непосредственно получаются возвратные соотношения (8) и (9) для функций $J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ [1]).

Заметим, что полиномы $W_r(x_1, x_2, \ldots)$ играют важную роль в исследованиях по небесной механике Gyldén'a, который проводит для вычисления их особый алгоритм [**18**, b, § 28] и пользуется разложением (15) при вычислении функций $J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ для некоторых специальных значений аргументов [**18**, b, p. 93, 99]; см. § 33.

12. Разложение периодической функции от v в тригонометрический ряд по sinus'ам и cosinus'ам кратных ς. Рассмотрим теперь функции cos pv и sin pv, где p какое-нибудь целое число.

Как четную периодическую функцию от ς, можно разложить cos pv в ряд

(47) $$\cos pv = \frac{b_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} b_\kappa \cos \kappa\varsigma,$$

где

$$b_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos pv \, d\varsigma = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos pv (1 - e_1 \cos v - 2e_2 \cos v - \ldots) \, dv = -pe_p,$$

или $b_0 = 2$ для $p = 0$.

Далее

$$b_\kappa = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos pv \cos \kappa\varsigma \, d\varsigma.$$

следует, что $(-1)^{\left[\frac{r}{2}\right]} W_r^{(\kappa)}(x) = \frac{1}{2^{r-1}} N_{-\kappa, r} x^r$, где

$$N_{-\kappa, r} = \frac{(-1)^{\left[\frac{r-\kappa}{2}\right]} r (r-1) \ldots \left(\frac{r+\kappa}{2} + 1\right)}{1 \cdot 2 \ldots \frac{r-\kappa}{2}} \quad \text{при } r \geqslant \kappa$$

и $N_{-\kappa, r} = 0$ при $r < k$ или для r и k различной четности.

[1]) Преобразуя надлежащим образом соотношения (45), (46), можно перейти от них непосредственно к уравнениям с частными производными (§ 14) для $J_\kappa(x_1, x_2, \ldots)$ [Kampé de Fériet, p. 147—149].

Интегрирование по частям дает

$$b_к = \frac{2p}{\pi k} \int_0^{\pi} \text{sln } pv \,.\, \sin к\varsigma \, dv$$

$$= \frac{2p}{\pi к} \int_0^{\pi} \sin pv \,.\, \sin к\,(v - e_1 \sin v - e_2 \sin 2v - \ldots)\, dv,$$

т. е.

$$b_к = \frac{p}{\pi к} \int_0^{\pi} \cos\,(кv - pv - кe_1 \sin v - кe_2 \sin 2v - \ldots)\, dv$$

$$- \frac{p}{\pi к} \int_0^{\pi} \cos\,(кv + pv - кe_1 \sin v - кe_2 \sin 2v - \ldots)\, dv,$$

или, наконец,

$$(48)\quad b_к = \frac{p}{к}\left[J_{к-p}\,(кe_1,\ кe_2,\ \ldots,\ кe_m,\ \ldots) - J_{к+p}\,(кe_1,\ кe_2,\ \ldots,\ кe_m,\ \ldots)\right].$$

Как нечетную периодическую функцию от ς, можно разложить $\sin pv$ в ряд

$$(49)\qquad \sin pv = \sum_{к=1}^{\infty} c_к \sin к\varsigma,$$

где

$$c_к = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin pv \,.\, \sin k\varsigma \, d\varsigma.$$

Интегрируя по частям, находим

$$c_к = \frac{2p}{\pi к} \int_0^{\pi} \cos pv \,.\, \cos к\varsigma \, dv$$

$$= \frac{2p}{\pi к} \int_0^{\pi} \cos pv \,.\, \cos к\,(v - e_1 \sin v - e_2 \sin 2v - \ldots)\, dv,$$

или

$$c_к = \frac{p}{\pi k} \int_0^{\pi} \cos\,(kv - pv - ke_1 \sin v - ke_2 \sin 2v - \ldots)\, dv$$

$$+ \frac{p}{\pi k} \int_0^{\pi} \cos\,(kv + pv - ke_1 \sin v - ke_2 \sin 2v - \ldots)\, dv,$$

или, наконец [1]),

$$(50)\quad c_k = \frac{p}{k}\left[J_{k-p}\,(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots) + J_{k+p}\,(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots)\right].$$

Равенства (47), (48) и (49), (50), т. е.

$$\cos pv = -\frac{p}{2}e_p + p\sum_{k=1}^{\infty}\left[J_{k-p}\,(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots) - J_{k+p}\,(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots)\right]\frac{\cos k\zeta}{k},$$

$$\sin pv = p\sum_{k=1}^{\infty}\left[J_{k-p}\,(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots) + J_{k+p}\,(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots)\right]\frac{\sin k\zeta}{k},$$

можно представить, на основании формулы (35)

$$J_{-k-p}\,(-ke_1, -ke_2, \ldots, -ke_m, \ldots) = J_{k+p}\,(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots),$$

в виде [2])

$$\cos pv = -\frac{p}{2}e_p + p\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_{k-p}\,(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots)\frac{\cos k\zeta}{k},$$

$$\sin pv = p\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_{k-p}\,(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots)\frac{\sin k\zeta}{k},$$

или

$$(51)\quad e^{=pv} = -\frac{p}{2}e_p \pm p\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_{k\mp p}\,(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots)\frac{e^{ik\zeta}}{k},$$

где k принимает все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$, кроме $k=0$, и надо заменить член $-\frac{pe_p}{2}$ через 1 для $p=0$.

---

[1]) Сходимость разложений (47) и (49) доказывается аналогично тому как в § 6. Разложения (47), (48) и (49), (50) для случая одного переменного ($m=1$) указаны Jacobi [**25**, № 9], а в общем виде намечены Weierstrass'ом, ср. формулы (5), (6) и (7). B. Jekhowsky [**26**, f] дает ошибочный результат.

[2]) О *законности перестановки членов в абсолютно сходящихся рядах* см., например, [**27**, t. I, § 315].

В силу этого равенства всякую периодическую функцию

$$F(v) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} C_p \cdot e^{ipv}$$

от v можно представить [1]) в виде

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{ik\zeta},$$

где

(52) $$A_0 = C_0 - \frac{e_1}{2}(C_1 + C_{-1}) - 2\,\frac{e_2}{2}(C_2 + C_{-2}) - \ldots - m\,\frac{e_m}{2}(C_m + C_{-m}) - \ldots$$

и

(53) $$A_k = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{p}{k}\, C_p\, J_{k-p}(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots),\ k \gtrless 0.$$

Этот результат приводит к распространению [2]) на случай обобщенного уравнения Kepler'a следующей теоремы Cauchy [**11**, b, p. 88].

Если

$$F = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} C_p\, e^{ipv}$$

и

(3) $$v - e_1 \sin v - e_2 \sin 2v - \ldots - e_m \sin mv - \ldots = \zeta,$$

то

1) коэффициент A_k разложения

$$F = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k\, e^{ik\zeta}$$

равен коэффициенту при e^{ikv} в разложении по степеням e^{iv} функции

$$Fe^{\frac{ke_1}{2}(e^{iv} - e^{-iv}) + \frac{ke_2}{2}(e^{2iv} - e^{-2iv}) + \ldots}\left[1 - \frac{e_1}{2}(e^{iv} + e^{-iv}) - \frac{2e_2}{2}(e^{2iv} + e^{-2iv}) - \ldots\right];$$

[1]) При условии абсолютной сходимости данного ряда.
[2]) См. также [**26**, d].

2) он равен также коэффициенту при e^{ikv} в разложении по степеням e^{iv} функции

$$\frac{1}{ik}\frac{dF}{dv}\,e^{\frac{ke_1}{2}(e^{iv}-e^{-iv})+\frac{ke_2}{2}(e^{2iv}-e^{-2iv})+\ldots}$$

Для доказательства первой части теоремы достаточно представить коэффициент A_k в виде

$$A_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F\,.\,e^{-ik\varsigma}\,d\varsigma, \tag{54}$$

откуда, в силу уравнения (3),

$$A_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F\,.\,e^{i(ke_1\sin v+ke_2\sin 2v+\ldots)}(1-e_1\cos v-2e_2\cos 2v-\ldots)\,e^{-ikv}dv,$$

и если положить

$$F\,.\,e^{\frac{ke_1}{2}(e^{iv}-e^{-iv})+\frac{ke_2}{2}(e^{2iv}-e^{-2iv})+\ldots}\left[1-\frac{e_1}{2}(e^{iv}+e^{-iv})-2\,\frac{e_2}{2}(e^{2iv}+e^{-2iv})-\ldots\right]=\sum_{k'=-\infty}^{+\infty}A'_{k'}\,e^{ik'v}, \tag{55}$$

то

$$A_k=A'_k. \tag{56}$$

Для доказательства второй части теоремы достаточно преобразовать интеграл (54) при помощи интегрированья по частям, тогда

$$A_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F\,.\,e^{-ik\varsigma}\,d\varsigma=-\frac{1}{2\pi ik}\int_0^{2\pi}F\,.\,de^{-ik\varsigma}=\frac{1}{2\pi ik}\int_0^{2\pi}\frac{dF}{dv}\,e^{-ik\varsigma}dv,$$

или, в силу уравнения (3),

$$A_k=\frac{1}{2\pi ik}\int_0^{2\pi}\frac{dF}{dv}\,e^{ik(e_1\sin v+e_2\sin 2v+\ldots)}\,e^{-ikv}\,dv,$$

и если положить

$$\frac{1}{ik}\frac{dF}{dv}\,e^{\frac{ke_1}{2}(e^{iv}-e^{-iv})+\frac{ke_2}{2}(e^{2iv}-e^{-2iv})+\ldots}=\sum_{k''=-\infty}^{+\infty}A''_{k''}\,e^{ik''v},$$

то

$$A_k = A''_k \cdot \tag{57}$$

Разложение функции $e^{\frac{ke_1}{2}(e^{iv} - e^{-iv}) + \frac{ke_2}{2}(e^{2iv} - e^{-2iv}) + \ldots}$ по степеням e^{iv} вводит в выражения коэффициентов A'_k, A''_k функцию [1] $J_{k_1}(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m \ldots)$.

Производя действительные вычисления коэффициентов A'_k, A''_k, убеждаемся, что равенства (56), (57) равносильны формулам (52), (53).

Как пример на применение формулы (56) приведем [2] разложение в ряд

$$\frac{1}{1 - e_1 \cos v - 2e_2 \cos 2v - \ldots} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{ik\varsigma}. \tag{58}$$

Здесь равенство (55) приводится к следующему [3]

$$e^{\frac{ke_1}{2}(e^{iv} - e^{-iv}) + \frac{ke_2}{2}(e^{2iv} - e^{-2iv}) + \cdots} = \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} J_{k'}(ke_1, ke_2, \cdots) e^{ik'v},$$

поэтому

$$A_k = J_k(ke_1, ke_2, \cdots).$$

Можно проверить еще разложение (58), исходя из следующего, данного раньше (§ 6)

$$v = \varsigma + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke_1, ke_2, \cdots) \sin k\varsigma,$$

если вспомнить формулу (35)

$$J_{-k}(-x_1, -x_2, \cdots) = J_k(x_1, x_2, \cdots),$$

так как в силу уравнения (3) имеем

$$\frac{1}{1 - e_1 \cos v - 2e_2 \cos 2v - \cdots} = \frac{dv}{d\varsigma}.$$

---

[1] Равенство (10).

[2] См. еще гл. V, § 34.

[3] Равенство (10).

ГЛАВА II.

Об уравнениях, удовлетворяемых обобщенными функциями Bessel'я, и общем решении этих уравнений.

13. Возвратные соотношения между функциями $J_k(x_1, x_2, \ldots)$ и между ними и их производными. Исходя из разложения

$$(10)\qquad e^{\frac{x_1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{x_2}{2}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)+\cdots+\frac{x_m}{2}\left(t^m-\frac{1}{t^m}\right)+\cdots} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)\, t^k,$$

докажем для функций $J_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ следующие основные соотношения [Pérès]

$$(8)\qquad \frac{\partial J_k}{\partial x_m} = \frac{1}{2}\,(J_{k-m} - J_{k+m}),\ m = 1, 2, \ldots,$$

$$(9)\qquad k \cdot J_k = \frac{x_1}{2}(J_{k-1} + J_{k+1}) + 2\,\frac{x_2}{2}\,(J_{k-2} + J_{k+2}) + \cdots + m\,\frac{x_m}{2}\,(J_{k-m} + J_{k+m}) + \cdots$$

Дифференцируя обе части равенства (10) по x_m, имеем

$$\frac{1}{2}\left(t^m - \frac{1}{t^m}\right)\cdot e^{\frac{x_1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{x_2}{2}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)+\cdots} = \frac{1}{2}\left(t^m - \frac{1}{t^m}\right)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)\, t^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial J_k(x_1, x_2, \cdots)}{\partial x_m}\, t^k.$$

Сравнивая коэффициенты при t^k в обоих частях последнего равенства, приходим к соотношениям (8).

Дифференцируем затем обе части равенства (10) по t, находим

$$\left[\frac{x_1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)+2\,\frac{x_2}{2}\left(t+\frac{1}{t^3}\right)+\cdots+m\,\frac{x_m}{2}\left(t^{m-1}+\frac{1}{t^{m+1}}\right)+\cdots\right] \times e^{\frac{x_1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{x_2}{2}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)+\cdots}$$

$$= \left[\frac{x_1}{2}\left(t - \frac{1}{t^2}\right) + 2\,\frac{x_2}{2}\left(t + \frac{1}{t^3}\right) + \cdots + m\,\frac{x_m}{2}\left(t^{m-1} + \frac{1}{t^{m+1}}\right) + \cdots\right] \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k\,(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)\, t^k$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k \cdot J_k\,(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)\, t^{k-1} \cdot$$

Сравнивая коэффициенты при t^{k-1} в обоих частях последнего равенства, приходим к соотношению (9).

14. Дифференциальные уравнения для $J_k\,(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$. Как в случае одного переменного системе уравнений

$$\frac{dS_k\,(x)}{dx} = \tfrac{1}{2}\,[S_{k-1}\,(x) - S_{k+1}\,(x)], \tag{59}$$

$$k \cdot S_k(x) = \frac{x}{2}\,[S_{k-1}\,(x) + S_{k+1}\,(x)], \tag{60}$$

кроме функции Bessel'я $J_k\,(x)$, удовлетворяют другие „цилиндрические функции“ [1]), так в случае многих переменных, кроме $J_k\,(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$, существуют другие решения системы

$$\frac{\partial S_k}{\partial x_m} = \tfrac{1}{2}\,(S_{k-m} - S_{k+m}),\ m = 1, 2, \ldots, \tag{61}$$

$$k \cdot S_k = \frac{x_1}{2}(S_{k-1} + S_{k+1}) + 2\,\frac{x_2}{2}\,(S_{k-2} + S_{k+2}) + \cdots + m\,\frac{x_m}{2}\,(S_{k-m} + S_{k+m}) + \cdots \tag{62}$$

Можно назвать для краткости всякое решение этой системы $S_k\,(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ обобщенной цилиндрической функцией или цилиндрической функцией многих переменных.

Имея в виду разыскать все эти функции, т. е. все решения системы (61), (62), для случая, когда число переменных $x_1, x_2, \ldots$ конечно и равно n, покажем сперва, что система уравнений (61), (62) приводит к некоторой системе линейных уравнений с частными производными второго порядка, так что этой последней системе удовлетворяет каждое решение системы (61), (62).

В простейшем случае одного переменного эта система уравнений с частными производными приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению Bessel'я

$$\frac{d^2 S_k}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dS_\kappa}{dx} + \left(1 - \frac{k^2}{x^2}\right) S_\kappa = 0. \tag{63}$$

[1]) Niels Nielsen [**44**, c, p. **3**, 5].

Для составления этого уравнения, из системы (61), (62), которая в случае одного переменного состоит из двух уравнений (59) и (60), образуем такую систему пяти уравнений

$$(64)\quad \begin{cases} \dfrac{dS_k}{dx} = \frac{1}{2}(S_{k-1} - S_{k+1}), \\ \dfrac{d^2S_k}{dx^2} = \frac{1}{4}(S_{k-2} - 2S_k + S_{k+2}), \\ k \cdot S_k = \dfrac{x}{2}(S_{k-1} + S_{k+1}), \\ (k \pm 1)\ S_{k\pm1} = \dfrac{x}{2}(S_k + S_{k\pm2}), \end{cases}$$

и исключая из этой системы четыре величины S_{k-2}, S_{k-1}, S_{k+1}, $S_{k\pm2}$, получим *дифференциальное уравнение Bessel'я (63).*

Можно выполнить самое исключение следующим образом.

Выразим через S_k и $\dfrac{dS_k}{dx}$ из первого и третьего уравнений [1]) системы (64) $S_{k-1} - S_{k+1}$ и $S_{k-1} + S_{k+1}$, и затем [1]), складывая почленно четвертое и пятое уравнения, $S_{k-2} + S_{k+2}$. Подставляя найденное значение $S_{k-2} + S_{k+2}$ во второе уравнение системы (64), придем к уравнению (63).

В случае двух переменных x, y, из системы (61), (62) составим такую систему десяти уравнений

$$(65)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial S_k}{\partial x} = \frac{1}{2}(S_{k-1} - S_{k+1}), \\ \dfrac{\partial S_k}{\partial y} = \frac{1}{2}(S_{k-2} - S_{k+2}), \\ \dfrac{\partial^2 S_k}{\partial x^2} = \frac{1}{4}(S_{k-2} - 2S_k + S_{k+2}), \\ \dfrac{\partial^2 S_k}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4}(S_{k-3} - S_{k-1} - S_{k+1} + S_{k+3}), \\ \dfrac{\partial^2 S_k}{\partial y^2} = \frac{1}{4}(S_{k-4} - 2S_k + S_{k+4}), \\ kS_k = \dfrac{1}{2}[x(S_{k-1} + S_{k+1}) + 2y(S_{k-2} + S_{k+2})], \\ (k \pm 1)\ S_{k\pm1} = \frac{1}{2}[x(S_k + S_{k\pm2}) + 2y(S_{k\pm1} + S_{k\pm3})], \\ (k \pm 2)\ S_{k\pm2} = \frac{1}{2}[x(S_{k\pm1} + S_{k\pm3}) + 2y(S_k + S_{k\pm4})]. \end{cases}$$

[1]) Для этого необходимо условие $x \neq 0$.

и исключая из этой системы восемь величин

$$S_{k-4},\ S_{k-3},\ S_{k-2},\ S_{k-1},\ S_{k+1},\ S_{k+2},\ S_{k+3},\ S_{k+4},$$

получим следующую систему двух уравнений с частными производными второго порядка [Pérès]

$$(66)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 S_k}{\partial x^2}[x^2+4y(k-2y)]+2xy\dfrac{\partial^2 S_k}{\partial x\partial y}+x\dfrac{\partial S_k}{\partial x}+S_k[x^2-(k-2y)^2]=0, \\ \dfrac{\partial^2 S_k}{\partial x^2}(x^2+8ky)-4y^2\dfrac{\partial^2 S_k}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial S_k}{\partial x}-4y\dfrac{\partial S_k}{\partial y}+S_k[x^2-(k-2y)^2]=0, \end{cases}$$

которой удовлетворяет функция $S_k(x, y)$ [1]).

Можно выполнить самое исключение следующим образом.

Выразим последовательно через S_k, $\dfrac{\partial S_k}{\partial x}$, $\dfrac{\partial S_k}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 S_k}{\partial x^2}$ из второго и третьего уравнения системы (65) $S_{k-2}-S_{k+2}$ и $S_{k-2}+S_{k+2}$, затем из первого и шестого уравнения $S_{k-1}-S_{k+1}$ и $S_{k-1}+S_{k+1}$ [2]), и, наконец [3]), складывая почленно седьмое с восьмым и девятое с десятым уравнения, $S_{k-3}+S_{k+3}$ и $S_{k-4}+S_{k+4}$. Подставляя найденные значения $S_{k-1}+S_{k+1}$, $S_{k-3}+S_{k+3}$ и $S_{k-4}+S_{k+4}$ в четвертое и пятое уравнения системы (65), получим систему (66).

В общем случае n переменных, из системы (61), рассматривая все n первые и все $\dfrac{n(n-1)}{2}+n$ вторые частные производные функции $S_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, составим

$$n+\left[\frac{n(n-1)}{2}+n\right]=\frac{n(n+3)}{2}$$

уравнений, а из уравнения (62), заменяя k последовательно через $k-n$, $k-(n-1)$, ..., k, ..., $k+(n-1)$, $k+n$, $2n+1$ уравнений, содержащих S_{k-2n}, $S_{k-(2n-1)}, \dots, S_k, \dots, S_{k+(2n-1)}$, S_{k+2n}. Таким образом имеем всего $\dfrac{n(n+3)}{2}+2n+1$ уравнений, линейно содержащих $4n$ величины

$$S_{k-2n},\ S_{k-(2n-1)} \dots,\ S_{k-1},\ S_{k+1}, \dots, S_{k+(2n-1)},\ S_{k+2n},$$

исключая которые получим систему

$$N=\left[\frac{n(n+3)}{2}+2n+1\right]-4n=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n$$ [4])

---

[1]) Эту систему легко проверить для функции $J_k(x, y)$, исходя из разложения (10). См. сноску на стр. 75 и 76.

[2]) Для этого необходимо условие $x \neq 0$.

[3]) Для этого необходимо условие $y \neq 0$.

[4]) [Pérès].

линейных уравнений с частными производными второго порядка для S_k.

Не приводя подробно всех этих уравнений, составление которых для каждого данного значения n не представляет затруднений, отметим следующие из них простейшего типа [Pérès]

(A)
$$\frac{\partial^2 S_k}{\partial x_l \, \partial x_m} = \frac{\partial^2 S_k}{\partial x_p \, \partial x_r} + \frac{\partial^2 S_k}{\partial x_s \, \partial x_t},$$

где

(67)
$$l + m = p + r, \quad m - l = t - s, \quad p - r = s + t.$$

Эти уравнения получаются из соотношений

$$\frac{\partial^2 S_k}{\partial x_l \, \partial x_m} = \tfrac{1}{4}\,(S_{k-l-m} - S_{k-l+m} - S_{k+l-m} + S_{k+l+m}),$$

$$\frac{\partial^2 S_k}{\partial x_p \, \partial x_r} = \tfrac{1}{4}(S_{k-p-r} - S_{k-p+r} - S_{k+p-r} + S_{k+p+r}),$$

$$\frac{\partial^2 S_k}{\partial x_s \, \partial x_t} = \tfrac{1}{4}\,(S_{k-s-t} - S_{k-s+t} - S_{k+s-t} + S_{k+s+t})$$

и удовлетворяются функциями $S_k\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ независимо от указателя k.

Для $n = 3$ существует одно уравнение этого типа

$$\frac{\partial^2 S_k}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 S_k}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 S_k}{\partial x_1 \, \partial x_3}.$$

Для $n = 4$ уравнения (A), кроме предыдущего, будут

$$\frac{\partial^2 S_к}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 S_к}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 S_к}{\partial x_2 \, \partial x_4},$$

$$\frac{\partial^2 S_к}{\partial x_2 \, \partial x_3} = \frac{\partial^2 S_к}{\partial x_1 \, \partial x_2} + \frac{\partial^2 S_к}{\partial x_1 \, \partial x_4}.$$

В общем случае n переменных число линейно независимых уравнений (A) равно

$$\frac{(n-1)\,(n-2)}{2}.$$

Действительно, складывая почленно все равенства (67), имеем $m = r + t$, а складывая почленно первое и третье и вычитая второе, $l = r + s$. Кроме того, третье из равенств (67) дает $p = r + s + t$.

Так как $r > 0$, $s > 0$, $t > 0$ и $m + s = r + s + t = p \leqslant n$, то можно составить уравнения (A) для всех значений l и $m \geqslant l$, кроме $l = 1$, $m = 1, 2, \ldots, n$ и $l = 2, 3, \ldots, n$, $m = n$. Число этих уравнений поэтому не меньше

$$\frac{n\ (n-1)}{2} + n - (2n-1) = \frac{(n-1)\ (n-2)}{2}$$

Что независимых из них не больше этого числа, видно из следующего.

Перепишем уравнения (A) в виде

$$(A') \qquad \frac{\partial^2 S_к}{\partial x_l\ \partial x_m} = \frac{\partial^2 S_к}{\partial x_{l+m-r}\ \partial x_r} + \frac{\partial^2 S_к}{\partial x_{l-r}\ \partial x_{m-r}}$$

и пусть, как раньше, $m \geqslant l$.

Если $l > 2$, то r может принимать больше одного значения:

$$r = 1, 2, \ldots, l-1,$$

и для одной и той же пары знечений l, m будет несколько уравнений системы (A′).

Легко показать, что все они будут следствиями одного из этих уравнений и других уравнений системы (A′).

Достаточно убедиться в этом для двух уравнений системы (A′), соответствующих одной и той же паре значений l, m и двум смежным значениям r: r и $r-1$. Имеем

$$\frac{\partial^2 S_к}{\partial x_l\ \partial x_m} = \frac{\partial^2 S_к}{\partial x_{l+m-r}\ \partial x_r} + \frac{\partial^2 S_к}{\partial x_{l-r}\ \partial x_{m-r}}$$

и

$$\frac{\partial^2 S_к}{\partial x_l\ \partial x_m} = \frac{\partial^2 S_к}{\partial x_{l+m-(r-1)}\ \partial x_{r-1}} + \frac{\partial^2 S_к}{\partial x_{l-(r-1)}\ \partial x_{m-(r-1)}}.$$

Далее, из других уравнений системы (A′)

$$\frac{\partial^2 S_к}{\partial x_{l+m-r}\ \partial x_r} = \frac{\partial^2 S_к}{\partial x_{l+m-(r-1)}\ \partial x_{r-1}} + \frac{\partial^2 S_к}{\partial x_{l+m-2r+1}\ \partial x_1},$$

$$\frac{\partial^2 S_к}{\partial x_{l-(r-1)}\ \partial x_{m-(r-1)}} = \frac{\partial^2 S_к}{\partial x_{l+m-2r+1}\ \partial x_1} + \frac{\partial^2 S_к}{\partial x_{l-r}\ \partial x_{m-r}}.$$

Подставляя эти значения производных $\dfrac{\partial^2 S_к}{\partial x_{l+m-r}\ \partial x_r}$ и $\dfrac{\partial^2 S_к}{\partial x_{l-(r-1)}\ \partial x_{m-(r-1)}}$ в правые части двух предыдущих уравнений, убеждаемся в тождественности последних.

Остальные n из N уравнений с частными производными для $S_к$, которые обозначим через (B), получим чрез исключение 4n величин

$$S_{к-2n},\ S_{к-(2n-1)},\ \ldots,\ S_{к-1},\ S_{к+1},\ \ldots,\ S_{к+2n-1},\ S_{к+2n}$$

из следующих $n + (2n-1) + (2n+1) = n + 4n$ уравнений

$$\frac{\partial S_к}{\partial x_m} = \tfrac{1}{2}(S_{к-m} - S_{к+m}),\ m = 1, 2, \ldots, n, \tag{68}$$

$$\frac{\partial^2 S_к}{\partial x_1\, \partial x_m} = \tfrac{1}{4}(S_{к-m-1} - S_{к+m-1} - S_{к-m+1} + S_{к+m+1}),\ m = 1, 2, \ldots, n, \tag{69}$$

$$\frac{\partial^2 S_к}{\partial x_g\, \partial x_n} = \tfrac{1}{4}(S_{к-g-n} - S_{к-g+n} - S_{к+g-n} + S_{к+g+n}),\ g = 2, 3, \ldots, n, \tag{70}$$

$$(k \pm p)\ S_{к\pm p} = \tfrac{1}{2}\ [x_1\ (S_{к\pm(p-1)} + S_{к\pm(p+1)}) + 2x_2\ (S_{к\pm(p-2)} + S_{к\pm(p+2)}) + \ldots + nx_n\ (S_{к\pm(p-n)} + S_{к\pm(p+n)})],\ p = 0,\ 1,\ \ldots,\ n. \tag{71}$$

Можно выполнить самое исключение следующим образом.

Выразим сперва из последних $n-1$ уравнений системы (68) и первых $n-1$ уравнений системы (69) $S_{к-g} - S_{к+g}$ и $S_{к-g} + S_{к+g}$ $g = 2, 3, \ldots, n$, через $S_{к-1} + S_{к+1}$, $S_к$ и частные производные $\frac{\partial S_к}{\partial x_g}$ и $\frac{\partial^2 S_к}{\partial x_1\, \partial x_h}$, $h = 1, 2, \ldots, n-1$. Затем, из первого уравнения системы (68) и первого уравнения системы (71) выразим через $S_к$, $\frac{\partial S_к}{\partial x_m}$ и $\frac{\partial^2 S_к}{\partial x_1\, \partial x_h}$ $S_{к-1} - S_{к+1}$ и $S_{к-1} + S_{к+1}$ [1]), а, следовательно, и $S_{к-m} + S_{к+m}$, $m = 1, 2, \ldots, n$. Наконец, из последних 2n уравнений системы (71), попарно складывая их, определим последовательно [2]) $S_{к-(n+1)} + S_{к+(n+1)}$, $S_{к-(n+2)} + S_{к+(n+2)}$, $\ldots$, $S_{к-2n} + S_{к+2n}$, так что все 2n суммы $S_{к-1} + S_{к+1}$, $S_{к-2} + S_{к+2}$, $\ldots$, $S_{к-2n} + S_{к+2n}$ будут выражены через $S_к$, $\frac{\partial S_к}{\partial x_m}$, $\frac{\partial^2 S_к}{\partial x_1\, \partial x_h}$, $m = 1, 2, \ldots, n$, $h = 1, 2, \ldots, n-1$. Подставляя найденные значения этих сумм в последнее уравнение системы (69) и уравнения системы (70), получим искомую систему (B) n уравнений с частными производными для $S_к$ [3]).

---

[1]) Для этого необходимо условие $x_1 + 3x_3 + 5x_5 + \ldots \neq 0$.

[2]) Для этого необходимо условие $x_n \neq 0$.

[3]) Ср. B. Jekhowsky, [**26**, g].

15. Число независимых решений системы N уравнений с частными производными для $S_к\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или системы (61), (62).

Обозначим для краткости систему N уравнений с частными производными для $S_к$ через (S).

Для каждой обыкновенной точки ее $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, т. е. для точки, не обращающей в ∞ коэффициентов ее уравнений, [1]) задав по произволу значение функции $S_к^0$, ее n первых и $n-1$ вторых частных производных

$$\frac{\partial S_k^\circ}{\partial x_m},\ m = 1, 2, \ldots, n;\ \frac{\partial^2 S_k^\circ}{\partial x_1\, \partial x_h},\ h = 1, 2, \ldots, n-1,$$

можно вычислить из n уравнений (B) системы (S) значения в этой точке n *производных* $\frac{\partial^2 S_к^\circ}{\partial x_m \partial x_n}$, $m = 1, 2, \ldots, n$, *а из уравнений* (A) *значения* $\frac{(n-1)\ (n-2)}{2}$ остальных вторых производных $\frac{\partial^2 S_k^\circ}{\partial x_e\, \partial x_f}$, $e = 2, 3, \ldots, n-1$; $f = 2, 3, \ldots, n-1$. Дифференцируя [2]) уравнения (S), можно выразить затем через S_k°, $\frac{\partial S_k^\circ}{\partial x_m}$, $m = 1, 2, \ldots, n$; $\frac{\partial^2 S_k^\circ}{\partial x_1\, \partial x_h}$, $h = 1, 2, \ldots, n-1$, значения в этой точке всех частных производных функций S_k высшего порядка. Таким образом получается разложение функции $S_k\ (x, x_2, \ldots, x_n)$ в ряд по степеням $x_1 - x_1^\circ$, $x_2 - x_2^\circ$, ..., $x_n - x_n^\circ$ [3]), линейно содержащий 2n произвольных коэффициента, именно

$$S_k^\circ,\ \frac{\partial S_k^\circ}{\partial x_m},\ (m = 1, 2, \ldots, n),\ \frac{\partial^2 S_k^0}{\partial x_1\, \partial x_h},\ (h = 1, 2, \ldots, n-1).$$

---

[1]) См. предыдущие сноски. Для краткости мы называем точкой всякую систему частных значений, вещественных или мнимых, приписываемых переменным.

[2]) О выполнении условий интегрируемости системы (S) см. следующую сноску.

[3]) Сходимость этого ряда следует из теоремы Bouquet [8] об уравнениях в полных дифференциалах, системе которых равносильна рассматриваемая система (S). См. Appell [5, p. 45] и Horn [24, *a*, b]. Для случая двух переменных x, y система уравнений с частными производными (66) равносильна следующей системе уравнений в полных дифференциалах

$$(72)\qquad \begin{cases} dz = p\,dx + q\,dy, \\ dp = r\,dx + s\,dy, \\ dq = s\,dx + t\,dy, \\ dr = u\,dx + v\,dy, \end{cases}$$

где $z = S_k$, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $u = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $v = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$

Из этого разложения следует, что в окрестности каждой обыкновенной точки можно представить общий интеграл системы уравнений (S) в виде

$$S_k = C_1 S_k^{(1)} + C_2 S_k^{(2)} + \ldots + C_{2n} S_k^{(2n)},$$

где $S_k^{(1)}, S_k^{(2)}, \ldots, S_k^{(2n)}$ 2n линейно независимых частных интегралов этой системы и C постоянные.

16. Особенные точки системы (S). Как в случае одного переменного для обыкновенного дифференциального уравнения Bessel'я в окрестности его особенной точки $x = 0$ или $x = \infty$ существует фундаментальная система двух линейно независимых интегралов этого уравнения, так в случае многих переменных можно искать особенные точки системы (S) и фундаментальные системы интегралов ее уравнений в окрестности этих точек [1]).

и s, t, u, v линейно выражены через z, p, q, r на основании уравнений (66) и уравнений выводимых из них при помощи дифференцирования по x и y.

Условия интегрируемости системы (72) приводятся к одному, выражаемому равенством

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right)}{\partial x},$$

т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q + \frac{\partial u}{\partial p} s + \frac{\partial u}{\partial q} t + \frac{\partial u}{\partial r} v = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p + \frac{\partial v}{\partial p} r + \frac{\partial v}{\partial q} s + \frac{\partial v}{\partial r} u,$$

которое, как нетрудно проверить непосредственно, тождественно удовлетворяется в x, y, z, p, q, r. Можно проверить еще это условие, (как и условия интегрируемости системы (S) в общем случае n переменных), замечая, что $\frac{\partial^4 S_k}{\partial x^3 \partial y}$, $\frac{\partial^4 S_k}{\partial x^2 \partial y \partial x}$ одинаково выражаются через $S_{k \pm p}$, $p = 1, 3, 5$, а потому и через x, y, S_k, $\frac{\partial S_k}{\partial x}$, $\frac{\partial S_k}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 S_k}{\partial x^2}$ (§ 14). В окрестности каждой обыкновенной точки $x = x^0$, $y = y^0$ системы (72) существует, следовательно, система ее голоморфных интегралов

$$z = z^\circ + \frac{x - x^\circ}{1} p^\circ + \frac{y - y^\circ}{1} q^\circ + \frac{(x - x^0)^2}{1.2} r^\circ + \ldots,$$

$$p = p^\circ + \frac{x - x^\circ}{1} r^\circ + \ldots,$$

$$q = q^\circ + \ldots,$$

$$r = r^\circ + \ldots,$$

где z^0, p^0, q^0, r^0 произвольные постоянные величины.

[1]) См. Horn [**24**, *a*, b].

Для разыскания особенных точек системы (S) имеем, согласно предыдущему [1]), уравнения

$$x_1 + 3x_3 + 5x_5 + \ldots = 0 \text{ [2])}, \quad x_n = 0$$

и, если заменить в уравнениях системы (S) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно через $\frac{1}{x_1'}, \frac{1}{x_2'}, \ldots, \frac{1}{x_n'}$, еще следующие

$$x_1' = 0, \quad x_2' = 0, \quad \ldots, \quad x_n' = 0, \text{ т. е. } x_1 = \infty, \quad x_2 = \infty, \quad \ldots, \quad x_n = \infty.$$

Из выражения функции $S_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в виде определенного интеграла, которое исследуется в ближайшей главе, видно, что действительные сингулярные места этой функции определяются каждым из следующих уравнений

$$x_n = 0, \quad x_1 = \infty, \quad x_2 = \infty, \quad \ldots, \quad x_n = \infty.$$

Один из интегралов системы (S) при целом значении k представляет, согласно § 13 [3]), функция $J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Мы установим в следующей главе, что, как и в случае одного переменного, это единственный интеграл этой системы, голоморфный в окрестности $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, среди ее фундаментальной системы интегралов для этой точки.

17. Другие уравнения с частными производными для $S_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Из уравнений системы (S), или непосредственно из уравнений (61), нетрудно вывести ряд других уравнений с частными производными высших порядков, которым удовлетворяет функция $S_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ независимо от указателя k.

---

[1]) См. сноски к § 14.

[2]) При условии $x_1^0 + 3x_3^0 + 5x_5^0 + \ldots = 0$ выбранные произвольные постоянные (§ 15) в общем решении системы (S) или (61), (62) не будут независимы. Взяв за произвольные постоянные $S^0_{k \pm m}$ $(m = 1, 2, \ldots n)$, для каждой точки $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, не принадлежащей сингулярным местам $x_n = 0$, $x_1 = \infty$, $x_2 = \infty$, $\ldots$, $x_n = \infty$, можно составить общее решение системы (61), (62) в виде голоморфного ряда по степеням $x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \ldots, x_n - x_n^0$.

[3]) Легко проверить, что функция $J_k(x, y)$ удовлетворяет уравнениям (66), следующим образом.

Действительно, последовательное дифференцирование дает

$$\frac{\partial S_к}{\partial x_m} = \frac{1}{2}(S_{к-m} - S_{к+m}),$$

$$\frac{\partial^2 S_к}{\partial x^2_m} = \frac{1}{2^2}(S_{к-2m} - 2S_к + S_{к+2m}),$$

. . . . . .

Полагая в равенстве (10) $t = e^{i\varphi}$ и беря производные от обеих частей его последовательно по x, по x, y, по φ, или по x и по φ, имеем

$$e^{i(x\sin\varphi + y\sin 2\varphi)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x, y)\, e^{ik\varphi},$$

$$i\sin\varphi\, e^{i(x\sin\varphi + y\sin 2\varphi)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial J_k}{\partial x}(x, y)\, e^{ik\varphi},$$

$$-\sin\varphi.\sin 2\varphi\, e^{i(x\sin\varphi + y\sin 2\varphi)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 J_k}{\partial x \partial y}(x, y)\, e^{ik\varphi},$$

$$-\sin^2\varphi\, e^{i(x\sin\varphi + y\sin 2\varphi)} = \sum_{к=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 J_к}{\partial x^2}(x, y)\, e^{ik\varphi},$$

$$(x\cos\varphi + 2y\cos 2\varphi)\, e^{i(x\sin\varphi + y\sin 2\varphi)} = \sum_{к=-\infty}^{+\infty} kJ_к(x, \quad e^{ik\varphi},$$

$$[-i(x\sin\varphi + 4y\sin 2\varphi) - (x\cos\varphi + 2y\cos 2\varphi)^2]\, e^{i(\ldots)} = -\sum_{к=-\infty}^{+\infty} k^2 J_к(x, y)\, e^{ik\varphi},$$

$$[-\sin^2\varphi(x\cos\varphi + 2y\cos 2\varphi) + i\sin 2\varphi]\, e^{i(\ldots)} = \sum_{к=-\infty}^{+\infty} k\frac{\partial^2 J_к}{\partial x^2}(x, y)\, e^{ik\varphi}.$$

Умножая обе части этих равенств соответственно на

$$x^2 - 4y^2,\ x,\ 2xy,\ x^2 - 8y^2,\ 4y,\ 1,\ 4y$$

и складывая результат, получим в левой части ноль, а в правой под знаком Σ произведение левой части первого из уравнений (66) на $e^{ik\varphi}$. Аналогично проверяется второе из уравнений (66).

$$\frac{\partial^p S_к}{\partial x_m^p} = \frac{1}{2^p}\left(S_{к-pm} - p\,S_{к-(p-2)\,m} + \frac{p\,(p-1)}{1\cdot 2}\,S_{к-(p-4)\,m} - \cdots\right.$$

$$\left. \pm \frac{p\,(p-1)\ldots(p-j+1)}{1\cdot 2\ldots j}\,S_{к-(p-2j)\,m} \mp \cdots \mp S_{к-pm}\right),$$

. . . . . .

и этот результат символически выражается формулой

$$\frac{\partial^p S_к}{\partial x_m^p} = \frac{S^к}{2^p}\left(S^{-m} - S^m\right)^p,\quad p = 1,\ 2,\ \ldots\ , \tag{73}$$

где после возведения в степень следует положить

$$S^к\left(S^{-m}\right)^{p-j}\left(S^m\right)^j = S_{к-(p-2j)\,m},\quad j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

С другой стороны имеем следующие тождества Cauchy [**11**, *a*]

$$\frac{1}{2}\left(S^{-2r} + S^{2r}\right) = 1 + \frac{2r\cdot 2r}{2\cdot 4}\left(S^{-1} - S\right)^2 + \frac{(2r+2)\cdot 2r\cdot 2r\ (2r-2)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\left(S^{-1} - S\right)^4$$

$$+ \frac{(2r+4)\ (2r+2)\ 2r\cdot 2r\ (2r-2)\ (2r-4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\ 10\cdot 12}\left(S^{-1} - S\right)^6 + \ldots,$$

т. е.

$$\frac{1}{2}\left(S^{-r} - S^r\right)^2 = \frac{2r\cdot 2r}{2\cdot 4}\left(S^{-1} - S\right)^2 + \frac{(2r+2)\cdot 2r\cdot 2r\cdot (2r-2)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\left(S^{-1} - S\right)^4$$

$$+ \frac{(2r+4)\ (2r+2)\cdot 2r\cdot 2r\cdot\ (2r-2)\ (2r-4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}\left(S^{-1} - S\right)^6 + \ldots$$

и

$$\frac{1}{2}\left(S^{-2r-1} - S^{2r+1}\right) = \frac{2r+1}{2}\left(S^{-1} - S\right) + \frac{(2r+2)\,(2r+1)\,2r}{2\cdot 4\cdot 6}\left(S^{-1} - S\right)^3$$

$$+ \frac{(2r+4)\ (2r+2)\ (2r+1)\ 2r\ (2r-2)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\left(S^{-1} - S\right)^5 + \ldots,$$

и на основании этих тождеств из символических равенств (73) получаем такую систему уравнений с частными производными

$$2\cdot\frac{\partial^2 S_к}{\partial x_r^2} = \frac{2r\cdot 2r}{1\cdot 2}\frac{\partial^2 S_к}{\partial x_1^2} + \frac{(2r+2)\cdot 2r\cdot 2r\cdot (2r-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{\partial^4 S_к}{\partial x_1^4} \tag{74}$$

$$+ \frac{(2r+4)\ (2r+2)\cdot 2r\cdot 2r\ (2r-2)\ (2r-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\frac{\partial^6 S_к}{\partial x_1^6} + \ldots,$$

$$(75)\quad \frac{\partial S_k}{\partial x_{2r+1}} = \frac{2r+1}{1}\frac{\partial S_k}{\partial x_1} + \frac{(2r+2)\,.\,(2r+1)\,.\,2r}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{\partial^3 S_k}{\partial x_1^3} + \frac{(2r+4)\,(2r+2)\,(2r+1)\,2r\,(2r-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\frac{\partial^5 S_k}{\partial x_1^5} + \ldots,$$

которой удовлетворяет всякое решение $S_k\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ системы (61) независимо от указателя k [1]).

Г Л А В А III.

Выражения функций Bessel'я многих переменных и других решений системы (61), (62) или (S) при любом значении указателя k в виде определенных интегралов и разложения их в ряды.

18. Решение системы (61), (62) в виде определенного интеграла.

Интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\,(kv - x_1 \sin v - x_2 \sin 2v - \ldots - x_n \sin nv)\,dv$$

или

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{\frac{x_1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{x_2}{2}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)+\ldots+\frac{x_n}{2}\left(t^n-\frac{1}{t^n}\right)} t^{-k-1}\,dt,$$

где C означает произвольный замкнутый путь интегрирования, обходящий точку $t = 0$, определяет функцию $J_k\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для целого значения указателя k. Считая теперь указатель k произвольным вещественным или комплексным числом, по аналогии со случаем одного переменного [2]) будем искать решение системы (61), (62) в виде криволинейного интеграла

$$(76)\quad S_k\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b F\,.\,t^{-k-1}\,dt,$$

где

$$F = e^{\frac{x_1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{x_2}{2}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)+\ldots+\frac{x_n}{2}\left(t^n-\frac{1}{t^n}\right)}$$

и a и b подлежащие определению постоянные числа.

---

[1]) Для функции $J_k\left(x, \frac{y}{2}\right)$ уравнение $\frac{\partial^2 J_k}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 J_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 J_k}{\partial x^4}$ указано Appell'ем [4, b].

[2]) [Sonine, p. 12].

При всяких значениях a и b этот интеграл [1]) удовлетворяет уравнениям (61). В самом деле, если переставить в интеграле

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\partial F}{\partial x_m}\, t^{-\kappa-1}\, dt$$

знак производной со знаком интеграла, этот интеграл равен $\frac{\partial S_\kappa}{\partial x_m}$. С другой стороны, если выполнить дифференцирование под знаком интеграла, он равен $\frac{1}{2}(S_{\kappa-m} - S_{\kappa+m})$.

Рассмотрим затем интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}\, t^{-\kappa}\, .\, dt\, .$$

Если преобразовать его при помощи интегрирования по частям, он окажется равным

$$\left[\frac{1}{2\pi i} F t^{-\kappa}\right]_a^b + k\, S_\kappa\, .$$

С другой стороны, если выполнить дифференцирование под знаком интеграла, он равен

$$\frac{x_1}{2}(S_{\kappa-1}+S_{\kappa+1}) + 2\,\frac{x_2}{2}(S_{\kappa-2}+S_{\kappa+2}) + \ldots + n\,\frac{x_n}{2}(S_{\kappa-n}+S_{\kappa+n})\,.$$

Отсюда видно, что интеграл (76), всегда удовлетворяющий системе (61), удовлетворит одновременно уравнению (62), если выбрать постоянные a и b так, чтобы

$$[F\,.\,t^{-\kappa}]_a^b = 0. \tag{77}$$

Обозначим через R (u) вещественную часть любой комплексной величины u. Пусть α и β две такие постоянные, что

$$R\,(x_n\,\alpha^n) < 0,\ R\,(x_n\,\beta^n) < 0$$

---

[1]) Как и более общий интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b e^{\frac{x_1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{x_2}{2}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)+\ldots+\frac{x_n}{2}\left(t^n-\frac{1}{t^n}\right)}\,.\,\psi\,(t)\,dt,$$

где ψ (t) произвольная функция t.

и $\rho = e^{\frac{i\pi}{n}}$. Условие (77) приводит к трем системам значений для пределов a, b, именно

$$1)\ a = \infty \cdot \alpha,\ b = \infty \cdot \beta,$$

$$2)\ a = \frac{0}{\rho \cdot \beta},\ b = \frac{0}{\rho \cdot \alpha},$$

$$3)\ a = \frac{0}{\rho \cdot \beta},\ b = \infty \cdot \alpha,$$

где под символом ∞ разумеется вещественное положительное бесконечное значение.

Соответственно этому для решений системы (61), (62) получаем следующие три выражения в виде определенных интегралов

$$(78)\quad S'_к = \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\,\alpha}^{\infty\cdot\beta} e^{\frac{x_1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{x_2}{2}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)+\ldots+\frac{x_n}{2}\left(t^n-\frac{1}{t^n}\right)} t^{-к-1}\,dt,$$

$$(79)\quad S''_к = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{0}{\rho\cdot\beta}}^{\frac{0}{\rho\cdot\alpha}} e^{\frac{x_1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{x_2}{2}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)+\ldots+\frac{x_n}{2}\left(t^n-\frac{1}{t^n}\right)} t^{-к-1}\,dt,$$

$$(80)\quad S'''_к = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{0}{\rho\cdot\beta}}^{\infty\cdot\alpha} e^{\frac{x_1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{x_2}{2}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)+\ldots+\frac{x_n}{2}\left(t^n-\frac{1}{t^n}\right)} t^{-к-1}\,dt,$$

где $t^к = e^{к\log t}$ и logt принимает вещественные значения для вещественного положительного t.

Исследуем эти интегралы.

Обращаясь к интегралам (78) и (79), представим себе путь интегрирования в виде линии без узлов, в определенных направлениях простирающейся в бесконечность или исходящей и возвращающейся в точку $t = 0$. Полагая

$$\beta = \alpha \cdot e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

и заменяя α последовательно через

$$\alpha_m = \alpha \cdot e^{\frac{2m\pi i}{n}}\ ^{1)},\quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

---

[1]) Где попрежнему

(81) $$R\,(x_n\,\alpha^n) < 0.$$

из интегралов $S_к'$, $S_к''$ получим 2n решений системы (61), (62)

(82) $$J_к^{(0)},\ J_к^{(1)},\ \ldots,\ J_к^{(n-1)},$$

(83) $$J_к^{(n)},\ J_к^{(n+1)},\ \ldots,\ J_к^{(2n-1)},$$

при k не равном целому числу линейно независимых друг от друга [**27**, t III, p. 244—247].

Составим из интегралов (82) следующую сумму

$$J_к^{(0)} + J_к^{(1)} + \ldots + J_к^{(n-1)},$$

которая приводится к одному интегралу

$$(84)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\cdot\alpha}^{\infty\cdot\alpha} e^{\frac{x_1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{x_2}{2}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)+\ldots+\frac{x_n}{2}\left(t^n-\frac{1}{t^n}\right)} t^{-к-1}\,dt.$$

При целом значении k криволинейный путь интегрирования, выходящий из точки $\infty\cdot\alpha$ и возвращающийся в нее в прежнем направлении после обхода начала $t=0$ (иначе интеграл был бы нуль), сводится к произвольному замкнутому контуру вокруг этой последней точки, поэтому интеграл (84) равен

$$J_к\,(x_1\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

Составим из интегралов (83) следующую сумму

$$J_к^{(n)} + J_к^{(n+1)} + \ldots + J_к^{(2n-1)},$$

которая приводится к одному интегралу

$$(85)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\rho\cdot\alpha}^{\frac{0}{\rho\cdot\alpha}} e^{\frac{x_1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{x_2}{2}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)+\ldots+\frac{x_n}{2}\left(t^n-\frac{1}{t^n}\right)} t^{-к-1}dt.$$

При целом значении k криволинейный путь интегрирования, выходящий из точки $\frac{0}{\rho\cdot\alpha}$ и возвращающийся в нее в прежнем направлении после обхода начала $t=0$, сводится к произвольному замкнутому контуру вокруг этой последней точки, поэтому интеграл (85) равен

$$J_к\,(x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n).$$

Следовательно, при целом значении k,

$$J_к^{(0)} + J_к^{(1)} + \ldots + J_к^{(n-1)} = J_к^{(n)} + J_к^{(n+1)} + \ldots + J_к^{(2n-1)}.$$

Можно взять тогда за новое, линейно независимое от прежних, решение системы (61), (62) интеграл

(86) $H_к(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{0 \\ \rho \cdot \alpha}}^{\infty \cdot \alpha} e^{\frac{x_1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) + \frac{x_2}{2}\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) + \ldots + \frac{x_n}{2}\left(t^n - \frac{1}{t^n}\right)} t^{-к-1}\, dt,$$

который, как установим в дальнейшем, при k не равном целому числу линейно выражается через два интеграла (84) и (85).

19. Фундаментальная система интегралов уравнений (S) в окрестности $x_n = 0$. Из выражений функций $J_к^{(p)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $p = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$, в виде определенных интегралов (78), (79), (или из разложений их в ряды, которые рассматриваются в ближайшем параграфе), видно, что особенными (и при том существенно особенными) точками этих функций будут

$$x_1 = \infty,\ x_2 = \infty,\ \ldots,\ x_n = \infty \text{ и } x_n = 0.$$

Обход любым из переменных x_h, $h = 1, 2, \ldots, n-1$, в его комплексной области в положительном направлении вокруг соответствующей особенной точки $x_h = \infty$ равнозначен обходу тем же переменным в отрицательном направлении вокруг обыкновенной точки $x_h = 0$. Следовательно, при этом обходе функция $J_к^{(p)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ возвращается к прежнему значению [1]).

Исследуем изменение значения функции $J_к^{(p)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $p = 0, 1, \ldots, 2n-1$, при обходе переменным x_n в его комплексной области в положительном направлении вокруг $x_n = \infty$ или, что все равно, в отрицательном направлении вокруг $x_n = 0$.

При этом обходе аргумент x_n возрастает на -2π, в силу условия (81) аргумент α возрастает поэтому на $\frac{2\pi}{n}$. [2])

---

1) Из интегральных выражений (78) и (79) также очевидно, что при изменении аргумента на 2π у любого из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ функции $J_к^{(p)}$, $p = 0, 1, \ldots, 2n-1$, возвращаются к прежним значениям.

2) При обходе переменным x_n точки $x_n = 0$ на этот угол повертываются вокруг начала $t = 0$ проходящие через него прямые, делящие плоскость t на секторы, внутри которых приближаются к точке $t = 0$ или ∞ соответствующие криволинейные пути интегрирования [**42**, p. 546—548; **3**, b, (4)].

Вследствие этого каждая из функций $J_к^{(q)}$ или $J_к^{(n+q)}$, $q=0, 1, \ldots, n-2$, переходит в следующую $J_к^{(q+1)}$ или $J_к^{(n+q+1)}$, а $J_к^{(n-1)}$ в $e^{-2\pi ki} \cdot J_к^{(0)}$ и $J_к^{(2n-1)}$ в $e^{2\pi ki} \cdot J_к^{(n)}$.

Отсюда видно, что любая из функций $J_к^{(m)}$ или $J_к^{(n+m)}$ образуется из одной $J_к^{(0)}$ или $J_к^{(n)}$ путем обхода переменным x_n в его комплексной области особенной точки $x_n=0$ в отрицательном направлении последовательно m раз ($m=0, 1, 2, \ldots, n-1$).

Задав для $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ произвольные постоянные конечные значения, будем искать по примеру Fuchs'a такую фундаментальную систему интегралов уравнений (S) в окрестности $x_n=0$, каждый из которых после обхода переменным x_n точки $x_n=0$ принимает значение, отличающееся от прежнего только постоянным множителем μ.

Называя значения, принимаемые функциями $J_к^{(p)}$, $p=0, 1, 2, \ldots 2n-1$, после обхода переменным x_n один раз вокруг $x_n=0$, через $\bar{J}_к^{(p)}$, имеем

$$(87)\qquad \begin{cases} \bar{J}_к^{(q)} = J_к^{(q+1)}, & \bar{J}_к^{(n-1)} = e^{-2\pi ki} J_к^{(0)}, \\ \bar{J}_к^{(n+q)} = J_к^{(n+q+1)}, & \bar{J}_к^{(2n-1)} = e^{2\pi ki} J_к^{(n)}, \end{cases}$$

$$q=0, 1, \ldots, n-2.$$

Мы ищем интеграл системы (S) $I_к$, принимающий после обхода переменным x_n точки $x_n=0$ значение

$$(88)\qquad \bar{I}_к = \mu \cdot I_к.$$

При k не равном целому числу функции $J_к^{(p)}$, $p=0, 1, 2, \ldots, 2n-1$, представляют фундаментальную систему интегралов, через которые линейно выражается всякий интеграл уравнений (S), поэтому

$$I_к = C_0 J_к^{(0)} + C_1 J_к^{(1)} + \ldots + C_{2n-1} J_к^{(2n-1)}$$

и

$$\bar{I}_к = C_0 \bar{J}_к^{(0)} + C_1 \bar{J}_к^{(1)} + \ldots + C_{2n-1} \bar{J}_к^{(2n-1)}.$$

Из уравнений (87) и (88) находим

$$(C_{n-1} e^{-2\pi ki} - C_0 \mu) J_к^{(0)} + (C_0 - C_1 \mu) J_к^{(1)} + \ldots + (C_{n-2} - C_{n-1} \mu) J_к^{(n-1)}$$
$$+ (C_{2n-1} e^{2\pi ki} - C_n \mu) J_к^{(n)} + (C_n - C_{n+1} \mu) J_к^{(n+1)} + \ldots$$
$$+ (C_{2n-2} - C_{2n-1} \mu) J_к^{(2n-1)} = 0.$$

Но $J_к^{(p)}$, $p = 0, 1, \ldots, 2n-1$, линейно независимы друг от друга, поэтому из предыдущего уравнения заключаем

$$(89)\quad \begin{cases} C_{n-1}\, e^{-2\pi к i} - C_0\, \mu = 0, C_0 - C_1\, \mu = 0, \ldots, C_{n-2} - C_{n-1}\, \mu = 0, \\ C_{2n-1}\, e^{2\pi к i} - C_n\, \mu = 0, C_n - C_{n+1}\, \mu = 0, \ldots, C_{2n-2} - C_{2n-1}\, \mu = 0, \end{cases}$$

откуда, исключая $C_0, C_1, \ldots, C_{2n-1}$, получаем два уравнения

$$e^{-2\pi к i} - \mu^n = 0, \quad e^{2\pi к i} - \mu^n = 0,$$

на которые распадается в рассматриваемом случае фундаментальное уравнение Fuchs'a.

Из этих уравнений находим $2n$ различных значений для μ

$$\mu_m = e^{-\frac{2\pi(к-m)i}{n}}, \quad \mu_{n+m} = e^{\frac{2\pi(к+m)i}{n}}, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1,$$

которым из (89) соответствуют $2n$ систем значений для C_p, $p = 0, 1, \ldots, 2n-1$:

$$\begin{array}{llllllll} C_0^{(0)}, & C_1^{(0)}, & \ldots, & C_{n-1}^{(0)}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_0^{(n-1)}, & C_1^{(n-1)}, & \ldots, & C_{n-1}^{(n-1)}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & C_n^{(n)}, & C_{n+1}^{(n)}, & \ldots, & C_{2n-1}^{(n)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & C_n^{(2n-1)}, & C_{n+1}^{(2n-1)}, & \ldots, & C_{2n-1}^{(2n-1)}, \end{array}$$

где

$$C_l^{(m)} = C_0\, \mu_m^{-l},$$
$$C_{n+l}^{(n+m)} = C_n\, \mu_{n+m}^{-l},$$
$$l = 0, 1, \ldots, n-1; \quad m = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Таким образом искомая фундаментальная система иррегулярных интегралов уравнений (S) в окрестности $x_n = 0$ будет

$$\begin{aligned} I_к^{(0)} &= J_к^{(0)} + \mu_0^{-1} J_к^{(1)} + \ldots + \mu_0^{-(n-1)} J_к^{(n-1)}, \\ &\ldots \\ I_к^{(n-1)} &= J_к^{(0)} + \mu_{n-1}^{-1} J_к^{(1)} + \ldots + \mu_{n-1}^{-(n-1)} J_к^{(n-1)}, \\ I_к^{(n)} &= J_к^{(n)} + \mu_n^{-1} J_к^{(n+1)} + \ldots + \mu_n^{-(n-1)} J_к^{(2n-1)}, \\ &\ldots \\ I_к^{(2n-1)} &= J_к^{(n)} + \mu_{2n-1}^{-1} J_к^{(n+1)} + \ldots + \mu_{2n-1}^{-(n-1)} J_к^{(2n-1)}. \end{aligned}$$

При обходе переменным x_n в отрицательном направлении особенной точки $x_n = 0$, $I_\kappa^{(m)}$ приобретает множитель $\mu_m = e^{-\frac{2\pi(\kappa-m)i}{n}}$, а $I_\kappa^{(n+m)}$ множитель $\mu_{n+m} = e^{\frac{2\pi(\kappa+m)i}{n}}$. Можно представить поэтому эти интегралы в виде

$$I_\kappa^{(m)} = x_n^{\frac{\kappa-m}{n}} f_m (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$I_\kappa^{(n+m)} = x_n^{\frac{-\kappa-m}{n}} f_{n+m} (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$m = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где $f_p (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $p = 0, 1, \ldots, 2n-1$, однозначные функции, разлагающиеся в ряд Laurent'a по целым положительным и отрицательным степеням x_n и в ряд Maclaurin'a по целым положительным степеням $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Эти разложения будут установлены дальше.

Заметим, что если системе (61), (62) удовлетворяет функция $S_\kappa (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то той же системе удовлетворяет и функция $e^{-\kappa\pi i} S_{-\kappa} (x_1, -x_2, \ldots, (-1)^{n-1} x_n)$.

Можно получить поэтому интеграл $I_\kappa^{(n+m)}$ из $I_\kappa^{(m)}$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$, умножая последний на $e^{-k\pi i}$ и заменяя в нем k через $-k$ и $x_2, x_4, \ldots$ через $-x_2, -x_4, \ldots$ [1]).

20. Разложение интеграла S'_κ в ряд. Интеграл (84) представляет обобщение функции $J_\kappa (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на случай произвольного значения k.

Пользуясь разложением

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{t} + \frac{x_2}{t^2} + \cdots + \frac{x_n}{t^n}\right)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{V_s (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)}{2^s \cdot 1 \cdot 2 \ldots s} t^{-s},$$

можно представить [2]) функцию

---

[1]) См. § 23.

[2]) Чтобы сделать вывод строгим, положим в интеграле (90)

$$x_1 = y x_1', \; x_2 = y^2 x_2', \; \ldots, \; x_{n-1} = y^{n-1} x'_{n-1}, \; x_n = y^n \text{ и } yt = \tau,$$

найдем

$$J_\kappa (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{y^\kappa}{2\pi i} \int_{\infty\beta}^{\infty\beta} e^{\frac{1}{2}(x_1'\tau + x_2'\tau^2 + \ldots + x'_{n-1}\tau^{n-1} + \tau^n) - \frac{1}{2}\left[x_1'\left(\frac{y^2}{\tau}\right) + x_2'\left(\frac{y^2}{\tau}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{y^2}{\tau}\right)^n\right]} \tau^{-\kappa-1} d\tau,$$

$$R(\beta^n) < 0.$$

(90) $$J_к\,(x_1.\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\,\alpha}^{\infty\,\alpha} e^{\frac{x_1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{x_2}{2}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)+\cdots+\frac{x_n}{2}\left(t^n-\frac{1}{t^n}\right)} t^{-к-1}\,dt$$

в виде ряда

$$(91)\quad J_к\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{V_{к+s}\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\ V_s\,(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)}{2^{к+2s}\ \Gamma\,(k+s+1).\,1.\,2\cdots s},$$

где

$$(92)\quad \frac{V_r\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}{2^r.\,\Gamma\,(r+1)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\,.\,\alpha}^{\infty\,.\,\alpha} e^{\frac{1}{2}(x_1,\ t+x_2\,t^2+\cdots+x_n\ t^n)}\ t^{-r-1}\,dt.$$

При целом значении r интеграл (92), взятый по замкнутому контуру вокруг $t=0$, приводится к полиному. Таким образом из (91) получается прежнее разложение (12) для $J_к\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$.

Для функций

(93) $$J_к^{(m)}\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\ \alpha_m}^{\infty\,.\,\alpha_{m+1}} e^{\frac{x_1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{x_2}{2}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)+\cdots+\frac{x_n}{2}\left(t^n-\frac{1}{t^n}\right)} t^{-к-1}\,dt,$$

$$m=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

Интеграл в правой части этого равенства представляет аналитическую функцию y^2 и можно получить коэффициенты разложения его в ряд Maclaurin'a по степеням y^2, производя дифференцированье под знаком интеграла [**69**, § 5.32]. Поэтому

$$J_к\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = y^к \sum_{s=o}^{\infty} b_s\,(y^2)^s,$$

где

$$b_s = \frac{1}{1.2\ldots s}\left[\frac{\partial^s}{\partial\,(y^2)^s}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\beta}^{\infty\,\beta} e^{\frac{1}{2}(x_1'\,\tau+\cdots+\tau^n)-\frac{1}{2}\left[x_1'\left(\frac{y^2}{\tau}\right)+\cdots+\left(\frac{y^2}{\tau}\right)^n\right]_\tau} \tau^{-к-1}\,d\tau\right\}\right]_{y=0}.$$

$$= \frac{V_s\,(-x_1',-x_2',\ \ldots,\ -1)}{2^s\ .\ 1.2\ldots s}\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\,\beta}^{\infty\,\beta} e^{\frac{1}{2}(x_1'\,\tau+\cdots+\tau^n)_\tau}\,\tau^{-s-к-1}\,d\tau$$

$$= \frac{V_s\,(-x_1',-x_2',\ \ldots,\ -1)}{2^s\ .\ 1.2\cdots s}\ \frac{V_{к+s}\,(x_1',\ x_2',\ \ldots,\ 1)}{2^{к+s}\,\Gamma\,(k+s+1)}.$$

Таким образом получаем разложение (91).

имеем аналогичное разложение

$$(94)\qquad J_{\kappa}^{(m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{V_{\kappa+s}^{(m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot V_s(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)}{2^{\kappa+2s} \cdot \Gamma(k+s+1) \cdot 1 \cdot 2 \cdots s},$$

где

$$(95)\qquad \frac{V_r^{(m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{2^r\ \Gamma(r+1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty \cdot \alpha_m}^{\infty \cdot \alpha_{m+1}} e^{\frac{1}{2}(x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_n t^n)}\, t^{-r-1}\, dt.$$

Если $n = 1$, то в силу формулы Weierstrass'a

$$(96)\qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty \cdot \alpha'}^{\infty \cdot \alpha'} e^{t} \cdot t^{-r-1}\, dt = \frac{1}{\Gamma(r+1)},\ R(\alpha') < 0,$$

имеем

$$V_r^{(0)}(x_1) = x_1^{r}\ ^{1}).$$

Для $n = 2$ функции

$$\frac{V_r^{(m)}(x_1, x_2)}{2^r \cdot \Gamma(r+1)} = \frac{V_r^{(m)}\left(x, \frac{y}{2}\right)}{2^r \cdot \Gamma(r+1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mp\infty\,\alpha}^{\pm\infty\,\alpha} e^{\frac{x}{2} t + \frac{y}{4} t^2}\, t^{-r-1}\, dt,\ m = 0, 1,$$

или линейные комбинации их, встречаются у Appell'я при исследовании решений уравнения теории тепла [**4**, *a*]

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

Они выражаются чрез тот же интеграл [2]), как и функции параболического цилиндра

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\pi i} \int_{\mp\infty}^{\mp\infty} e^{-u^2 + 2ux}\ u^{-r-1}\, du.$$

---

[1]) $x_1^{r} = e^{r \log x_1}$ и $\log x_1$ принимает вещественные значения для вещественного положительного x_1.

[2]) Этот интеграл можно рассматривать как предельный случай интеграла для P функции Riemann'a [**3**, *a*. f].

В случае произвольного числа n переменных, в силу разложения

$$e^{\frac{1}{2}(x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_{n-1} t^{n-1})} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{V_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}{2^j \cdot 1 \cdot 2 \ldots j} t^j$$

и равенства [**48**, p. 248 — 250]

$$\int_{\infty \alpha_m}^{\infty \alpha_{m+1}} e^{\frac{x_n}{2} t^n} t^{j-r-1}\, dt = \frac{e^{\frac{2m(j-r)\pi i}{n}}}{n} \int_{\infty \alpha}^{\infty \alpha} e^{\frac{x_n}{2} u} u^{\frac{j-r}{n}-1}\, du,$$

можно представить [1]) функцию $\frac{V_r^{(m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{2^r \cdot \Gamma(r+1)}$ в виде ряда

$$(97) \qquad \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{\infty} e^{\frac{2m(j-r)\pi i}{n}} \frac{V_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \cdot x_n^{\frac{r-j}{n}}}{2^{j+\frac{r-j}{n}} \cdot 1 \cdot 2 \cdots j \cdot \Gamma\left(\frac{r-j}{n}+1\right)}$$

и проверить на нем, что эта функция $\frac{V_r^{(m)}}{2^r \cdot \Gamma(r+1)}$ получается из $\frac{V_r^{(0)}}{2^r \cdot \Gamma(r+1)}$ путем обхода переменным x_n m раз вокруг $x_n = 0$.

Сумма рядов (97), $m = 0, 1, \ldots, n-1$, приводится к ряду

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{2(j-r)\pi i} - 1}{e^{\frac{2(j-r)\pi i}{n}} - 1} \frac{V_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \cdot x_n^{\frac{r-j}{n}}}{2^{j+\frac{r-j}{n}} \cdot 1 \cdot 2 \ldots j \cdot \Gamma\left(\frac{r-j}{n}+1\right)}$$

для функции $\frac{V_r(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{2^r \cdot \Gamma(r+1)}$, представляющему обобщение выражения (38) на случай произвольного значения r [2]).

Для интегралов (92) и (95) непосредственно проверяются те же возвратные соотношения и уравнения с частными производными, каким удовлетворяют полиномы $V_r(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (§ 10)

---

[1]) О допустимости в рассматриваемом случае почленного интегрированья ряда между бесконечными пределами см. Замечание к § 22.

[2]) Для целого значения r дробь $\frac{e^{2(j-r)\pi i} - 1}{e^{\frac{2(j-r)\pi i}{n}} - 1}$ обращается в нуль при $j - r$ не кратном n и в n при $r - j = nj_n$, где j_n целое число.

$$\frac{\partial V_r}{\partial x_m} = 2^{m-1} \cdot r\,(r-1) \ldots (r-m+1)\; V_{r-m},\quad m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial x_m} = 2^{m-1}\,\frac{\partial^m V_r}{\partial x_1{}^m},\quad m = 2,\ 3,\ \ldots,\ n.$$

Интегрируя по частям, имеем затем

$$\int_a^b e^{\frac{1}{2}(x_1,\ t+x_2 t^2+\ldots+x_n t^n)}\; t^{-r-1}\,dt = \left[\frac{e^{\frac{1}{2}(x_1,\ t+x_2 t^2+\ldots+x_n t^n)}\; t^{-r}}{-r}\right]_a^b$$

$$+\frac{1}{2r}\int_a^b e^{\frac{1}{2}(x_1,\ t+x_2\ t^2+\ldots+x_n\ t^n)}\; t^{-r}\;(x_1+2x_2\ t+\ldots+nx_n\ t^{n-1})\,dt$$

и таким образом приходим к формуле

$$V_r = x_1\ V_{r-1} + 2\cdot 2\ (r-1)\ x_2\ V_{r-2} + 2^2\cdot 3\ (r-1)\ (r-2)\ x_3\ V_{r-3} + \ldots$$
$$+ 2^{n-1}\cdot n\ (r-1)\ (r-2)\ \ldots\ (r-n+1)\ x_n\ V_{r-n} + \ldots,$$

также установленной раньше для полиномов V_r.

Функции $V_r^{(m)}\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, $m = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, можно рассматривать еще как фундаментальную систему интегралов для следующей системы уравнений с частными производными

$$r\cdot V_r = x_1\frac{\partial V_r}{\partial x_1} + 2x_2\frac{\partial V_r}{\partial x_2} + \ldots + nx_n\frac{\partial V_r}{\partial x_n}, \tag{98}$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial x_g} = 2\,\frac{\partial^2 V_r}{\partial x_1 \partial x_{g-1}},\quad g = 2,\ 3,\ \ldots,\ n, \tag{99}$$

допускающей в окрестности каждой обыкновенной точки ее, т. е. точки отличной от $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \infty$ и $x_n = 0$, n линейно независимых голоморфных решений.

Для составления этих решений достаточно задать в рассматриваемой точке $x_1 = x_1{}^0,\ x_2 = x_2{}^0,\ \ldots,\ x_n = x_n{}^0$ значения $V_r{}^0$, $\frac{\partial V_r{}^0}{\partial x_1}$, $\ldots$, $\frac{\partial V_r{}^0}{\partial x_{n-1}}$ и вычислить последовательно из уравнений (98), (99) значения других производных различных порядков от V_r по $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ [1]).

---

[1]) Условия интегрируемости выполнены, как видно из выражений для производных от V_r через V_{r-m}, $m = 1,\ 2,\ \ldots$

Таким образом получится решение системы (98), (99) в виде ряда по степеням $x_1 - x_1^0$, $x_2 - x_2^0$, ..., $x_n - x_n^0$, линейно содержащего n произвольных постоянных.

Функции

$$U_r^{(m)} = V_r^{(0)} + \mu_m^{-1} V_r^{(1)} + \mu_m^{-2} V_r^{(2)} + \cdots + \mu_m^{-(n-1)} V_r^{(n-1)},$$

где

$$\mu_m = e^{\frac{-2\pi (r-m) i}{n}}, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1,$$

представляют фундаментальную систему интегралов уравнений (98), (99) в окрестности $x_n = 0$, каждый из которых при обходе переменным x_n вокруг $x_n = 0$ принимает значение, отличающееся от прежнего только на соответствующий постоянный множитель μ_m.

Пользуясь разложением (97) можно представить функцию $\frac{U_r^{(m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{2^r \Gamma(r+1)}$ в виде ряда

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{2(j-m)\pi i}{n}} - 1}{e^{\frac{2(j-m)\pi i}{n}} - 1} \frac{V_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\, x_n^{\frac{r-j}{n}}}{2^{j+\frac{r-j}{n}} \cdot 1 \cdot 2 \ldots j \cdot \Gamma\left(\frac{r-j}{n}+1\right)},$$

который приводится к следующему [1])

$$\left(\frac{x_n}{2}\right)^{\frac{r-m}{n}} \sum_{j'=0}^{\infty} \frac{V_{nj'+m}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \left(\frac{x_n}{2}\right)^{-j'}}{2^{nj'+m} \cdot 1 \cdot 2 \ldots (nj'+m)\, \Gamma\left(\frac{r-m}{n} - j' + 1\right)}, \quad \frac{j-m}{n} = j'.$$

Легко проверить затем разложение

$$I_k^{(m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{U_{k+s}^{(m+s)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot V_s(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)}{2^{k+2s} \cdot \Gamma(k+s+1) \cdot 1 \cdot 2 \ldots s},$$

$$m = 0, 1, \ldots, n-1.$$

21. Другое разложение функции S'_k. Исходя из интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\infty, \alpha}^{\infty, \beta} e^{\frac{x_1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) + \frac{x_2}{2}\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) + \ldots + \frac{x_n}{2}\left(t^n - \frac{1}{t^n}\right)} t^{-k-1} dt$$

---

[1]) В частном случае $n = 2$ и $r = 0$, $m = 1$ этот ряд обращается в следующий

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{j'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j'}}{1 \cdot 2 \ldots j'} \frac{\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}\right)^{2j'+1}}{2j'+1}, \quad x_2 = \frac{y}{2},$$

который встречается у Appell'я [4, *a*, p. 194]

можно получить выражения функций $J_\kappa^{(0)}$, $J_\kappa^{(1)}$, ..., $J_\kappa^{(n-1)}$ в виде кратных рядов из произведений обыкновенных функций Bessel'я, частный случай которых уже встречался для функции $J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (§ 8). Действительно, пользуясь разложением (§ 8)

$$e^{\frac{x_1}{2}(t-\frac{1}{t})+\frac{x_2}{2}(t^2-\frac{1}{t^2})+\ldots+\frac{x_{n-1}}{2}(t^{n-1}-\frac{1}{t^{n-1}})} = \sum_{\kappa_1=-\infty}^{+\infty}\ldots\sum_{\kappa_{n-1}=-\infty}^{+\infty} J_{\kappa_1}(x_1)\ldots J_{\kappa_{n-1}}(x_{n-1})\, t^{\kappa_1+2\kappa_2+\cdots+(n-1)\kappa_{n-1}},$$

имеем [1])

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty.\alpha_m}^{\infty.\alpha_{m+1}} e^{\frac{x_1}{2}(t-\frac{1}{t})+\frac{x_2}{2}(t^2-\frac{1}{t^2})+\ldots+\frac{x_n}{2}(t^n-\frac{1}{t^n})}\, t^{-\kappa-1}\,dt$$

$$= \sum_{\kappa_1=-\infty}^{+\infty}\ldots\sum_{\kappa_{n-1}=-\infty}^{+\infty} J_{\kappa_1}(x_1)\ldots J_{\kappa_{n-1}}(x_{n-1})\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty.\alpha_m}^{\infty.\alpha_{m+1}} e^{\frac{x_n}{2}(t^n-\frac{1}{t^n})}\, t^{-\kappa+\kappa_1+\cdots+(n-1)\kappa_{n-1}-1}\,dt.$$

Полагая $t^n = u$, представим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty.\alpha_m}^{\infty.\alpha_{m+1}} e^{\frac{x_n}{2}(t^n-\frac{1}{t^n})}\, t^{-h-1}\,dt, \quad h=k-k_1-2k_2-\cdots-(n-1)k_{n-1}$$

в виде [**48**, p. 248—250]

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{e^{-\frac{2mh\pi i}{n}}}{n}\int_{\infty.\alpha}^{\infty.\alpha} e^{\frac{x_n}{2}(u-\frac{1}{u})}\, u^{-\frac{h}{n}-1}\,du = \frac{e^{-\frac{2mh\pi i}{n}}}{n} J_{\frac{h}{n}}(x_n),$$ [2])

поэтому

$$J_\kappa^{(m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{\kappa_1=-\infty}^{+\infty}\ldots\sum_{\kappa_{n-1}=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2mh\pi i}{n}} J_{\kappa_1}(x_1)\ldots J_{\kappa_{n-1}}(x_{n-1})\, J_{\frac{h}{n}}(x_n). \tag{100}$$

---

[1]) О допустимости почленного интегрирования ряда между бесконечными пределами см. замечание к § 22.

[2]) Schläfli (согласно указанию Graf'a [**17**, p. 136]) и Sonine [**59**, p. 12].

Легко проверить отсюда, пользуясь равенством [1])

$$J_r(x \cdot e^{q\pi i}) = e^{rq\pi i} \cdot J_r(x), \quad q \text{ цельное число,} \tag{101}$$

что функция $J_k^{(m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ получается из $J_k^{(\sigma)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ путем обхода переменным x_n в отрицательном направлении m раз вокруг $x_n = 0$.

Почленное сложение равенств (100) дает [2])

$$J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{\kappa_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{\kappa_{n-1}=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2h\pi i} - 1}{e^{-\frac{2h\pi i}{n}} - 1} J_{\kappa_1}(x_1) \ldots J_{\kappa_{n-1}}(x_{n-1}) J_{\frac{h}{n}}(x_n) \tag{102}$$

На разложениях (100) и (102) снова непосредственно проверяется, что функции $J_k^{(m)}$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$, J_k удовлетворяют при всяком значении k уравнениям (61), (62).

Для целого значения k дробь $\frac{e^{-2h\pi i} - 1}{e^{-\frac{2h\pi i}{n}} - 1}$ принимает значение n при h кратном n и обращается в нуль при всех других значениях h.

Положим поэтому

$$\frac{\kappa - \kappa_1 - 2\kappa_2 - \ldots - (n-1)\kappa_{n-1}}{n} = \kappa_n, \quad \kappa_n \text{ целое число,}$$

тогда

$$\kappa_1 = \kappa - 2\kappa_2 - 3\kappa_3 - \ldots - n\kappa_n,$$

и равенство (102) обращается в прежнюю формулу (11).

Из разложения (100) и равенства (101) легко получить еще следующие

$$J_k^{(m)}(x_1 e^{q\pi i}, x_2 e^{2q\pi i}, \ldots, x_n e^{nq\pi i}) = e^{kq\pi i} \cdot J_k^{(m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

или

$$J_k^{(m)}(-x_1, x_2, -x_3, \ldots, (-1)^n x_n) = e^{k\pi i} J_k^{(m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{103}$$

---

[1]) См., напр., Niels Nielsen [44, c, p. 18].

[2]) Это разложение равносильно следующему

$$J_k(x_1, x_2 \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2(k-j)\pi i} - 1}{e^{-\frac{2(k-j)\pi i}{n}} - 1} J_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) J_{\frac{k-j}{n}}(x_n). \tag{102'}$$

и аналогичные равенства для $J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при целом значении k указанные для этой функции выше (§ 9, (36)).

Для функций $I_\kappa^{(m)}$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$, получаем на основании (100) следующее разложение

$$\frac{1}{n}\sum_{\kappa_1=-\infty}^{+\infty}\cdots\sum_{\kappa_{n-1}=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{2(m+h-k)\pi i}{n}}-1}{e^{-\frac{2(m+h-k)\pi i}{n}}-1}\,J_{\kappa_1}(x_1)\ldots J_{\kappa_{n-1}}(x_{n-1})\,J_{\frac{h}{n}}(x_n),$$

т. е.

$$(104)\quad \sum_{\kappa_2=-\infty}^{+\infty}\cdots\sum_{\kappa_{n-1}=-\infty}^{+\infty}\sum_{\kappa'=-\infty}^{+\infty} J_{m-2\kappa_2-\cdots-(n-1)\kappa_{n-1}-n\kappa'}(x_1)\cdot J_{\kappa_2}(x_2)\ldots J_{\kappa_{n-1}}(x_{n-1})\,J_{\frac{\kappa-m}{n}+\kappa'}(x_n),$$

где

$$\frac{m-\kappa_1-2\kappa_2-\ldots-(n-1)\kappa_{n-1}}{n}=\kappa'.$$

При целом значении k, для одного из значений $m = 0, 1, \ldots, n-1$, дробь $\frac{\kappa-m}{n}$ обращается в целое число и ряд (104) приводится к прежнему разложению (11) для $J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

22. Формула сложения. Заменим теперь в интегралах (78), (79), (80) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно через $x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n$, получим

$$S_\kappa(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b e^{\frac{x_1}{2}(t-\frac{1}{t})+\frac{x_2}{2}(t^2-\frac{1}{t^2})+\ldots+\frac{x_n}{2}(t^n-\frac{1}{t^n})}$$

$$\times e^{\frac{y_1}{2}(t-\frac{1}{t})+\frac{y_2}{2}(t^2-\frac{1}{t^2})+\ldots+\frac{y_n}{2}(t^n-\frac{1}{t^n})}\,t^{-\kappa-1}\,dt,$$

где a и b имеют значения, приведенные в § 18, и

$$(105)\qquad R[(x_n+y_n)\alpha^n]<0,\quad R[(x_n+y_n)\beta^n]<0.$$

Для каждого значения y_n можно выбрать постоянные α, β так, что одновременно с условиями (105) будут удовлетворяться еще следующие

$$R(y_n\alpha^n)<0,\quad R(y_n\beta^n)<0.$$

Для этого, в силу неравенств

$$R\left[y_n \alpha^n \left(1+\frac{x_n}{y_n}\right)\right] < o,\ R\left[y_n \beta^n \left(1+\frac{x_n}{y_n}\right)\right] < o,$$

достаточно допустить, что мод. $\frac{x_n}{y_n} < 1$.

Разложим тогда $e^{\frac{x_1}{2}(t-\frac{1}{t})+\frac{x_2}{2}(t^2-\frac{1}{t^2})+\ldots+\frac{x_n}{2}(t^n-\frac{1}{t^n})}$ в ряд по формуле (10), получим формулу сложения

$$S_к\ (x_1+y_1,\ x_2,+y_2,\ \ldots,\ x_n+y_n)$$

$$=\sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_a^b e^{\frac{y_1}{2}(t-\frac{1}{t})+\frac{y_2}{2}(t^2-\frac{1}{t^2})+\ldots+\frac{y_n}{2}(t^n-\frac{1}{t^n})} t^{p-к-1}\,dt$$

$$=\sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).\ S_{к-p}\ (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$$

при

(106) $$\text{мод. } x_n < \text{мод. } y_n.$$

Для $n=1$ она указана Schläfli [**55**, b, p, 135—137].

При целом значении k криволинейный путь интегрирования в интегральном выражении для $J_к\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ приводится к замкнутому контуру вокруг начала и условие (106) отпадает.

Как частный случай равенства

$$J_к\ (x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \ldots,\ x_n+y_n) =$$

$$=\sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).\ J_{к-p}\ (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),$$

если в нем положить

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_{n-1} = x_n = o,$$

вспомнить, что (§ 8, Замечание)

$$J_{к-p}\ (o,\ o,\ \ldots,\ o,\ y_n) = J_{\frac{к-p}{n}}\ (y_n)$$

при $к-p$ кратном n и

$$J_{к-p}\ (o,\ o,\ \ldots,\ o,\ y_n) = o$$

при всех других значениях $к-p$, и вместо y_n, изменяя обозначение, писать x_n, получим формулу Jekhowsk'oro [26, a, b]

$$J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\, J_{\frac{\kappa-p}{n}}(x_n)$$

$$= \sum_{q=-\infty}^{+\infty} J_{\kappa-nq}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\, J_q(x_n),$$

где $\kappa - p = nq$ [1]).

Замечание.

В этом §. как и в §§ 20 и 21, допустимость почленного интегрирования ряда между бесконечными пределами требует более строгого обоснования.

Для этой цели рассмотрим интеграл

$$\frac{V_\kappa^{(m)}(x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \ldots, x_n \pm y_n)}{2^\kappa\, \Gamma(\kappa \pm 1)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty\alpha_m}^{\infty\alpha_{m+1}} e^{\frac{1}{2}[(x_1+y_1)\,t + (x_2+y_2)\,t^2 + \ldots + (x_n+y_n)\,t^n]}\, t^{-\kappa-1}\, dt,$$

где, по предположению,

$$R(y_n \alpha^n) < 0,\ R\left[y_n \alpha^n \left(1 \pm \frac{x_n}{y_n}\right)\right] < 0.$$

Полагая

$$y_1 = \frac{y'_1}{y},\ y_2 = \frac{y'_2}{y^2},\ \ldots,\ y_{n-1} = \frac{y'_{n-1}}{y^{n-1}},\ y_n = \frac{1}{y^n} \text{ и } t = y\tau,$$

найдем

$$\frac{V_\kappa^{(m)}(x_1 \pm y_1, \ldots, x_n \pm y_n)}{2^\kappa\, \Gamma(\kappa \pm 1)}$$

$$= y^{-\kappa} \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty\gamma_m}^{\infty\gamma_{m+1}} e^{\frac{1}{2}[(y'_1 + x_1 y)\tau + \ldots + (y'_{n-1} + x_{n-1} y^{n-1})\tau^{n-1} + (1 + x_n y^n)\tau^n]}\, \tau^{-\kappa-1}\, d\tau,$$

где

$$\gamma_m = \gamma e^{\frac{2m\pi i}{n}} \text{ и } R(\gamma^n) < 0,\ R[(1 + x_n y^n)\gamma^n] < 0.$$

Оба последние неравенства могут быть удовлетворены одновременно при соблюдении условия $|x_n y^n| < 1$, т. е. $|x_n| < |y_n|$. При этом условии интеграл в правой части предыдущего равенства представляет

[1]) Равенство (102′) также можно рассматривать как частный случай формулы сложения.

аналитическую функцию от y и можно [**69**, § 5.32] получить коэффициенты разложения его в ряд Maclaurin'a по степеням y, производя дифференцирование под знаком интеграла.

Таким образом найдем

$$\frac{V_\kappa^{(m)}(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)}{2^\kappa\ \Gamma\ (\kappa+1)} = y^{-\kappa}\sum_{p=0}^{\infty} c_p y^p,$$

где

$$c = \frac{1}{1.2\ldots p}\left[\frac{d^p}{dy^p}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\gamma_m}^{\infty\gamma_{m+1}} e^{\frac{1}{2}[(y_1'+x_1 y)\tau+\ldots+(1+x_n y^n)\ \tau^n]}\ \tau^{-\kappa-1}\,d\tau\right\}\right]_{y=0}$$

$$= \frac{V_p\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}{2^p.1.2\ldots p} \times \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\gamma_m}^{\infty\gamma_{m+1}} e^{\frac{1}{2}(y_1'\tau+y_2'\tau^2+\ldots+y_{n-1}'\tau^{n-1}+\tau^n)}\ \tau^{-\kappa+p-1}\,d\tau$$

$$= \frac{V_p\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}{2^p.\ 1.2\ldots p}\ \ \frac{V_{\kappa-p}^{(m)}(y_1', y_2', \ldots, y_{n-1}', 1)}{2^{\kappa-p}\ \Gamma\ (\kappa-p+1)}.$$

Так как

$$y^{-\kappa+p}\ V_{\kappa-p}^{(m)}(y_1', y_2', \ldots, y_{n-1}', 1) = V_{\kappa-p}^{(m)}(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

то

$$\frac{V_\kappa^{(m)}(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)}{2^\kappa\ \Gamma\ (\kappa+1)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{V_p\ (x_1, \ldots, x_n)\ V_{\kappa-p}^{(m)}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{2^\kappa\ .\ 1\ .\ 2\ \ldots\ p\ .\ \Gamma\ (\kappa-p+1)}$$

Этот ряд, как и ряд по степеням y, из которого он получен, сходится равномерно для всех конечных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющих условию $|x_n| < |y_n|$. Можно вывести из него заключения, аналогичные сделанным в § 10 из формулы сложения для полиномов $V_\kappa\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ [1]).

В случае одного переменного этот ряд приводится к формуле бинома Ньютона для всякого показателя. При $x_n = y_1 = y_2 = \ldots = y_{n-1} = 0$ из него получается разложение (97).

---

[1]) Для $n = 2$ эта формула, подобно случаю целого значения k (§ 10), приводит к формуле сложения для функций Чебышев-Hermite'a второго рода.

См. об этих функциях [**28**, p. 357—362].

Рассмотрим затем интеграл

$$S_к\ (x_1 + y_1,\ \ldots,\ x_n + y_n)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{x_1+y_1}{2}(t-\frac{1}{t}) + \ldots + \frac{x_n+y_n}{2}(t^n - \frac{1}{t^n})}\ t^{-к-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(x_1, \ldots, x_n) e^{\frac{y_1}{2}(t-\frac{1}{t}) + \ldots + \frac{y_n}{2}(t^n - \frac{1}{t^n})}\ t^{p-к-1}\,dt,$$

$$|x_n| < |y_n|.$$

Для обоснования законности почленного интегрирования, когда путь интегрирования C простирается в бесконечность, разобьем [1]) этот путь на конечные части C_j ($j = o, \pm 1, \pm 2, \ldots$), примыкающие друг к другу в порядке последовательности своих значков, тогда предыдущий интеграл обращается в сумму

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{C_j} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(x_1, \ldots, x_n) e^{\frac{y_1}{2}(t-\frac{1}{t}) + \ldots + \frac{y_n}{2}(t^n - \frac{1}{t^n})}\ t^{p-к-1}\,dt,$$

или, после почленного интегрирования,

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(x_1, \ldots, x_n) \int_{C_j} e^{\frac{y_1}{2}(t-\frac{1}{t}) + \ldots + \frac{y_n}{2}(t^n - \frac{1}{t^n})}\ t^{p-к-1}\,dt.$$

Применим предыдущее рассуждение к равным образом сходящемуся [2]) интегралу

$$\int_C \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left| J_p(x_1, \ldots, x_n) \right| \left| e^{\frac{y_1}{2}(t-\frac{1}{t}) + \ldots + \frac{y_n}{2}(t^n - \frac{1}{t^n})} \right| \left| t^{p-к-1} \right| |dt|,$$

получим сходящийся двойной ряд, мажорантный для предыдущего.

---

[1]) [Courant und Hilbert, p. 393. 394].

[2]) Так как $|J_p(x_1, \ldots, x_n)| < A_p$, если

$$e^{\frac{|x_1|}{2}(t+\frac{1}{t}) + \ldots + \frac{|x_n|}{2}(t^n + \frac{1}{t^n})} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A_p t^p,$$

то рассматриваемый интеграл сходится, как и интеграл

$$\int_C e^{\frac{|x_1|}{2}(|t| + \frac{1}{|t|}) + \ldots + \frac{|x_n|}{2}(|t^n| + \frac{1}{|t^n|})} \times \left| e^{\frac{y_1}{2}(t-\frac{1}{t}) + \ldots + \frac{y_n}{2}(t^n - \frac{1}{t^n})} \right| \left| t^{-к-1} \right| |dt|.$$

Можно поэтому переставить знаки сумм, тогда получим ряд

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(x_1, \ldots, x_n) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{C_j} e^{\frac{y_1}{2}(t-\frac{1}{t})+\ldots+\frac{y_n}{2}(t^n-\frac{1}{t^n})} t^{p-k-1}dt,$$

т. е.

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p\ x_1,\ \ldots,\ x_n) \int_C e^{\frac{y_1}{2}(t-\frac{1}{t})+\ldots+\frac{y_n}{2}(t^n-\frac{1}{t^n})} t^{p-k-1}dt$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p\ (x_1,\ \ldots,\ x_n)\ S_{k-p}\ (y_1.\ \ldots,\ y_n)\ ^1)$$

---

[1]) Принимая в формулах сложения для $\frac{V_k^{(1)}(x_1, x_2, \ldots x_n)}{2^k\ \Gamma(k+1)}$ и $J^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переменные $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ равными нулю и $|x_n| < |y_n|$, и замечая, что

$$\frac{V_{k-p}^{(1)}(0, 0, \ldots, y_n)}{2^{k-p}\ \Gamma(k-p+1)} = \frac{1}{n}\ \frac{y_n^{\frac{k-p}{n}}}{2^{\frac{k-p}{n}}\ \Gamma(\frac{k-p}{n}+1)}\ (\S\ 20)$$

и

$$J_{k-p}^{(1)}(0, 0, \ldots, y_n) = \frac{1}{n}\ J_{\frac{k-p}{n}}(y_n)\ (\S\ 21),$$

из сходимости рядов

$$\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{V_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{2^p\ \Gamma(p+1)}\ \frac{y_n^{\frac{k-p}{n}}}{2^{\frac{k-p}{n}}\ \Gamma(\frac{k-p}{n}+1)}$$

или

$$\frac{1}{n}\sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ J_{\frac{k-p}{n}}(y_n)$$

заключаем, что при неограниченном возрастании положительных значений p отношения модулей функций $\frac{V_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{2^p\ \Gamma(p+1)}$ или $J_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ к модулям величин обратных от $\frac{y_n^{\frac{k-p}{n}}}{2^{\frac{k-p}{n}}\ \Gamma(\frac{k-p}{n}+1)}$ или $J_{\frac{k-p}{n}}(y_n)$ имеют пределом нуль. Порядок убывания рассматриваемых функций стоит в связи с родом n соответствующей производящей функции. См. [**49**, *a*] и [**19**, §§ 9, 10].

При неограниченном возрастании k и для $y > 0$, из асимптотического выражения для полиномов Чебышев—Hermite'a [**Адамов**] и [**Faber**], через которые выражаются полиномы $v_k(x, y) = \frac{V_k(x, y)}{2^k \cdot 1 \cdot 2 \ldots k}$ (§ 10), видно, что $\lim \frac{v_{k+1}(x,y)}{v_k(x, y)} = 0$, поэтому, на основании разложения (12), $\lim \frac{J_k(x, y)}{v_k(x, y)} = 1$.

23. Выражение функций $S_к''$, $S_к'''$ через $S_к'$. Обратимся к исследованию других решений $S_к''$, $S_к'''$ системы (61), (62). Мы покажем, что эти решения выражаются через $S_к'$.

Пусть для определенности $R(x_n) < 0$. Тогда положим $\alpha = 1$ и представим путь интегрирования следующим образом.

Построим окружность радиуса единицы с центром в начале координат. Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_{2n-1}$ будут точки, в которых пересекают эту окружность прямые, проходящие через начало и образующие с положительною вещественною осью углы $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{(2n-1)\pi}{n}$. Пусть B_p означает бесконечно далекую точку прямой из начала чрез A_p. Обозначая чрез C какой-нибудь путь интегрирования, положим для краткости

$$S(C) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{x_1}{2}(t - \frac{1}{t}) + \frac{x_2}{2}(t^2 - \frac{1}{t^2}) + \ldots + \frac{x_n}{2}(t^n - \frac{1}{t^n})} t^{-k-1} dt.$$

При этом обозначении имеем

$$J_к^{(m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = S(B_{2m} A_{2m} A_{2m+1} A_{2m+2} B_{2m+2}),$$

$$J_к^{(n+m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = S(O A_{2n-2m-3} A_{2n-2m-2} A_{2n-2m-1} O),$$

$$m = 0, 1, \ldots, n-1.$$

$$J_к(x_1, x_2, \ldots, x_n) = J_к^{(0)} + J_к^{(1)} + \ldots + J_к^{(n-1)} = S(B_0 A_0 A_1 \ldots A_{2n-1} A_0 B_0),$$

$$J_к^{(2n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = J_к^{(n)} + J_к^{(n+1)} + \ldots + J_к^{(2n-1)} = S(O A_{2n-1} A_0 \ldots A_{2n-2} A_{2n-1} O),$$

$$H_к(x_1, x_2, \ldots, x_n) = S(O A_{2n-1} A_0 B_0).$$

Легко найдем

$$S(OA_{2n-1} A_0 B_0 A_0 A_1 \ldots A_{2n-1} O) - S(B_0 A_0 A_1 \ldots A_{2n-1} O A_{2n-1} A_0 B_0) = S(0A_{2n-1} A_o B_o) - e^{-2k\pi i} S(OA_{2n-1} A_o B_o).$$

Отсюда

$$(107)\quad J_к^{(2n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_к(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1 - e^{-2k\pi i}) H_к(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Следовательно, $H_к(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выражается линейно через

$$J_к(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ J_к^{(2n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Возьмем затем интеграл

$$J^{(m)}_{-\kappa}(x_1, -x_2, \ldots, (-1)^{n-1}x_n)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\alpha_m\rho^{-(n-1)}}^{\infty\alpha_{m+1}\cdot\rho^{-(n-1)}} e^{\frac{x_1}{2}(t-\frac{1}{t})-\frac{x_2}{2}(t^2-\frac{1}{t^2})+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x_n}{2}(t^n-\frac{1}{t^n})} t^{\kappa-1}dt.$$

Если положить здесь $t = -\frac{1}{t_1} = \frac{e^{\pi i}}{t_1}$, $\frac{dt}{t} = -\frac{dt_1}{t_1}$, $t^\kappa = e^{\kappa\pi i}t_1^{-\kappa}$, то путь интегрирования $B_{2m+n+1}\,A_{2m+n+1}\,A_{2m+n+2}\,A_{2m+n+3}\,B_{2m+n+3}$ преобразуется в следующий: $OA_{2n-2m-1}\,A_{2n-2m-2}\,A_{2n-2m-3}\,O$.

Поэтому

$$J^{(m)}_{-\kappa}(x_1, -x_2, \ldots, (-1)^{n-1}x_n) = e^{k\pi i}\,S\,(OA_{2n-2m-3}\,A_{2n-2m-2}\,A_{2n-2m-1}\,O)$$
$$= e^{k\pi i}\,J^{(n+m)}_{\kappa}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

и

$$J_{-\kappa}(x_1, -x_2, \ldots, (-1)^{n-1}x_n) = e^{k\pi i}\,J^{(2n)}_{\kappa}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

На основании этого равенства формула (107) дает

(108) $H_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$= e^{-k\pi i}\,\frac{J_{-\kappa}(x_1, -x_2, \ldots, (-1)^{n-1}x_n) - e^{\kappa\pi i}\,J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{1 - e^{-2\kappa\pi i}}$$

$$= \frac{J_{-\kappa}(x_1, -x_2, \ldots, (-1)^{n-1}x_n) - e^{k\pi i}\,J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{2i\,\sin\,k\pi}$$

24. Обобщение функции Neumann'a. При произвольном значении k функции $J^{(p)}_\kappa$, $p = 0,1, \ldots 2n-1$, представляют $2n$ линейно независимых решений системы (61), (62) и общее решение ее выражается линейной комбинацией этих функций.

Исключение представляет случай целого значения k, тогда (§ 9)

$$J_{-\kappa}(x_1, -x_2, \ldots, (-1)^{n-1}x_n) = (-1)^\kappa J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

и функция $J^{(2n)}_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ совпадает с $J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Можно принять в этом случае за новое, независимое от прежних, решение системы (61), (62) функцию $H_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, или более простую следующую

(109) $Y_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$= \frac{\cos\,k\pi\,J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{-\kappa}(x_1, -x_2, \ldots, (-1)^{n-1}x_n)}{\sin\,k\pi},$$

которые представляют обобщение функций [1]) Hankel'я

[1]) [Niels Nielsen 44, c, p. 11, 16 и 124].

$$H_\kappa(x) = \frac{J_{-\kappa}(x) - e^{k\pi i} J_\kappa(x)}{2i \sin k\pi}$$

и Neumann'a

$$Y_\kappa(x) = \frac{\cos k\pi \cdot J_\kappa(x) - J_{-\kappa}(x)}{\sin k\pi}$$

на случай многих переменных.

Пользуясь равенством (102), легко разложить функции

$$H_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ и } Y_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

в кратные ряды из произведений обыкновенных цилиндрических функций, линейно выражающиеся через (100) и

$$(110) \qquad \frac{1}{n} \sum_{\kappa_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{\kappa_{n-1}=-\infty}^{+\infty} J_{\kappa_1}(x_1)\, J_{\kappa_2}(x_2) \ldots, J_{\kappa_{n-1}}(x_{n-1})\; Y_{\frac{h}{n}}(x_n)$$

и проверить на них, что эти функции удовлетворяют системе (61), (62) [1].

25. Интегралы между вещественными пределами для функции $J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Остановимся подробнее на интеграле

$$(90) \quad J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty\alpha}^{\infty\alpha} e^{\frac{x_1}{2}(t - \frac{1}{t}) + \frac{x_2}{2}(t^2 - \frac{1}{t^2}) + \ldots + \frac{x_n}{2}(t^n - \frac{1}{t^n})}\, t^{-\kappa-1}\, dt,$$

имея в виду преобразовать его так, чтобы путь интегрирования сделать вещественным.

Положим для этой цели

$$\alpha = e^{(\psi - 2\pi) i}$$

и построим, как раньше, окружность радиуса единицы с центром в начале координат. Обозначим через A точку пересечения этой окружности с прямой, проведенной из начала под углом ψ к вещественной

---

[1]) Функция $Y_j(x)$ содержит член с $\log x$, коэффициент у которого $J_j(x)$, поэтому ряд (110) содержит член с $\log x_n$, коэффициент у которого $J_\kappa^{(0)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Можно показать, что при целом значении k общее решение системы (S) содержит член с $\log x_n$, коэффициент у которого $J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Этот результат согласуется с теоремой Horn'a [24, *a*, p. 172].

положительной оси, а через B бесконечно далекую точку этой прямой. Можно представить тогда интеграл (90) в следующем виде

$$(111) \qquad J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2\pi i}\left[e^{2k\pi i}\int_B^A + \int_{(A,A)} + \int_A^B\right],$$

где путь интегрированья (A, A) означает окружность, которая обходится в положительном направлении от A до A, т. е. от $\varphi = \psi - 2\pi$ до $\varphi = \psi$, если на этом пути положить $t = e^{i\varphi}$.

Положим в первом и третьем интеграле правой части равенства (111) $t = e^{\theta + \psi i}$, тогда эти интегралы приведутся к следующему

$$-\frac{e^{k(\pi-\psi)i}\sin k\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{\frac{x_1}{2}\left(e^{\theta+\psi i} - e^{-\theta-\psi i}\right) + \frac{x_2}{2}\left(e^{2(\theta+\psi i)} - e^{-2(\theta+\psi i)}\right) + \ldots - k\theta} d\theta$$

где, по предположению, $R\left(x_n e^{n\psi i}\right) < o$.

Второй же интеграл правой части (111), если в нем положить $t = e^{i\varphi}$ и $\varphi = \psi - \pi + \sigma$, так что $\sigma = -\pi$ при $\varphi = \psi - 2\pi$ и $\sigma = \pi$ при $\varphi = \psi$, обращается в такой

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\psi-2\pi}^{\psi} e^{\frac{x_1}{2}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) + \frac{x_2}{2}(e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}) + \ldots + \frac{x_n}{2}(e^{ni\varphi} - e^{-ni\varphi}) - ki\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\psi-2\pi}^{\psi} e^{ix_1\sin\varphi + ix_2\sin 2\varphi + \ldots + ix_n \sin n\varphi - ki\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{e^{k(\pi-\psi)i}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix_1\sin(\psi+\sigma) + ix_2\sin 2(\psi+\sigma) - \ldots + (-1)^n ix_n \sin n(\psi+\sigma) - ki\sigma} d\sigma,$$

т. е., если привести пределы интегрированья к o и π,

$$\frac{e^{k(\pi-\psi)i}}{2\pi}\left\{\int_0^\pi e^{i\sum_{m=1}^{n}(-1)^m x_m(\sin m\psi\cos m\sigma + \cos m\psi\sin m\sigma) - ki\sigma} d\sigma\right.$$

$$\left. + \int_0^\pi e^{i\sum_{m=1}^{n}(-1)^m x_m(\sin m\psi\cos m\sigma - \cos m\psi\sin m\sigma) + ki\sigma} d\sigma\right\}$$

$$= \frac{e^{\kappa(\pi-\psi)i}}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-ix_1 \sin\psi \cos\sigma + ix_2 \sin 2\psi \cos 2\sigma - \ldots}$$

$$\times \cos(x_1 \cos\psi \sin\sigma - x_2 \cos 2\psi \sin 2\sigma + \ldots + \kappa\sigma) d\sigma.$$

Таким образом имеем окончательно

(112) $J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$= \frac{e^{k(\pi-\psi)i}}{\pi} \left[\int_0^{\pi} e^{-ix_1 \sin\psi \cos\sigma + ix_2 \sin 2\psi \cos 2\sigma - \ldots} \right.$$

$$\times \cos(x_1 \cos\psi \sin\sigma - x_2 \cos 2\psi \sin 2\sigma + \ldots + \kappa\sigma)\, d\sigma$$

$$\left. - \operatorname{Sin}\kappa\pi \int_0^{\infty} e^{\frac{x_1}{2}\left(e^{\theta+\psi i} - e^{-\theta-\psi i}\right) + \frac{x_2}{2}\left(e^{2(\theta+\psi i)} - e^{-2(\theta+\psi i)}\right) + \ldots - k\theta} d\theta \right].$$

Для $n = 1$ эта формула установлена Сониным [**59**, p. 14].

Она применима, при соответствующем выборе ψ, для всякого значения x_n, неравного нулю. Если положить в этой формуле $\psi = \pi$ или $\psi = 0$, то из нее получим следующие

(113′) $J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\kappa\sigma - x_1 \sin\sigma - x_2 \sin 2\sigma - \ldots - x_n \sin n\sigma)\, d\sigma$$

$$- \frac{\sin\kappa\pi}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x_1 \operatorname{sh}\theta + x_2 \operatorname{sh} 2\theta - \ldots + (-1)^n x_n \operatorname{sh} n\theta - k\theta} d\theta,$$

$$\operatorname{sh}\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2},$$

при $R[(-1)^n x_n] < 0$ и

$$(113'')\quad J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= \frac{e^{\kappa\pi i}}{\pi}\left\{\int_0^\pi \cos(\kappa\sigma + x_1 \sin\sigma - x_2 \sin 2\sigma + \ldots - (-1)^n x_n \sin n\sigma)\, d\sigma\right.$$

$$\left. - \sin\kappa\pi \int_0^\infty e^{x_1 \operatorname{sh}\theta + x_2 \operatorname{sh} 2\theta + \ldots + x_n \operatorname{sh} n\theta - \kappa\theta}\, d\theta\right\},$$

при $R(x_n) < o$, на которых легко проверяется равенство (103)

$$J_\kappa(-x_1, x_2, -x_3, \ldots, (-1)^n x_n) = e^{k\pi i} J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Эти формулы указаны для $n = 1$ Schläfli [**55**, *a*, p. 237; b, p. 148] и при k целом приводятся к интегралу (1) Schlömilch—Weierstrass—Appell'я.

В формуле (112) при $R(i^n x_n) < o$ можно положить $\psi = \frac{\pi}{2}$, а при $R[(-1)^n x_n] < o$ можно положить $\psi = \frac{3\pi}{2}$. Таким образом получатся интегралы

$$(114')\quad J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= \frac{i^\kappa}{\pi}\left\{\int_0^\pi e^{-ix_1\cos\sigma + ix_3\cos 3\sigma - \ldots} \cos(x_2 \sin 2\sigma - x_4 \sin 4\sigma + \ldots + \kappa\sigma)\, d\sigma\right.$$

$$\left. - \sin\kappa\pi \int_0^\infty e^{ix_1 \operatorname{ch}\theta + i^2 x_2 \operatorname{sh} 2\theta + i^3 x_3 \operatorname{ch} 3\theta + \ldots - k\theta}\, d\theta\right\}$$

и

$$(114'')\quad J_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= \frac{1}{\pi i^\kappa}\left\{\int_0^\pi e^{ix_1\cos\sigma - ix_3\cos 3\sigma + \ldots} \cos(x_2 \sin 2\sigma - x_4 \sin 4\sigma + \ldots + \kappa\sigma)\, d\sigma\right.$$

$$\left. - \sin\kappa\pi \int_0^\infty e^{-ix_1 \operatorname{ch}\theta + (-i)^2 x_2 \operatorname{sh} 2\theta + (-i)^3 x_3 \operatorname{ch} 3\theta + \ldots - k\theta}\, d\theta\right\},$$

где $\mathrm{ch}\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$, аналогичные двум предыдущим, на которых снова можно проверить равенство (103).

При k целом отсюда получается новое интегральное выражение функции $J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\frac{1}{\pi i^k} \int_0^{\pi} e^{i(x_1 \cos \sigma \quad x_3 \cos 3\sigma + \ldots)} \cos(x_2 \sin 2\sigma - x_4 \sin 4\sigma + \ldots + k\sigma)\, d\sigma,$$

для $n = 1$ данное Hansen'ом [**20**, *a*, p. 105].

Исходя из равенства (109) и интегральных выражений (113) и (114), нетрудно получить интегральные выражения для $Y_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, в случае одного переменного ($n = 1$) указанные для этой функции Schläfli [**55**, *b*, p. 143] и Heine [**21**, p. 131].

Мы не будем, однако, входить здесь в подробное рассмотрение этих интегралов.

(Окончание следует).

Представлено к напечатанию 11 марта 1926 г.

Редакция.