Записки Горного Института. Т. VII — 2. 1928.
Annales de l'Institut des Mines à Leningrade. V. VII — 2. 1928.

О кубическом характере числа $1-\rho$ [1]).

А. Журавский.

On the cubic character of the number $1-\rho$.

By A. Jouravsky.

В нашей работе „Закон взаимности кубических вычетов“ [2]) мы показали, как можно чисто арифметическим путем определить кубический децедент числа $1-\rho$. При этом мы пользовались законом взаимности кубических вычетов, который установлен наперед.

Не трудно однако показать, что кубический характер числа $1-\rho$ по отношению к числу $m=a+b\rho$, взаимно простому с ним, можно получить непосредственно. Мы это сейчас и сделаем. Для большей определенности предположим сначала, что число m ограничено условием $2b \geqq a \geqq b > 0$ и вместо $1-\rho$ возьмем союзное с ним число $2+\rho$.

Введем два способа разбиения чисел на классы по модулю m.

В первом случае, в качестве основной области вместо шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, вершины которого определяются числами

$$A_1 \ldots\ldots \frac{a+b}{3}+\frac{2b-a}{3}\rho \qquad A_4 \ldots\ldots \frac{a+b}{3}+\frac{2b-a}{3}\rho$$

$$A_2 \ldots\ldots \frac{2a-b}{3}+\frac{a+b}{3}\rho \qquad A_5 \ldots\ldots \frac{2a-b}{3}+\frac{a+b}{3}\rho$$

$$A_3 \ldots\ldots \frac{a-2b}{3}+\frac{2a-b}{3}\rho \qquad A_6 \ldots\ldots \frac{2b-a}{3}+\frac{b-2a}{3}\rho$$

возьмем область $S \ldots\ldots A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4B_4A_5B_5A_6B_6$, получаемую из шестиугольника прибавлением треугольников $A_1B_1A_2$, $A_3B_3A_4$, $A_5B_5A_6$ и отнятием треугольников $A_2B_2A_3$, $A_4B_4A_5$, $A_6B_6A_1$ (черт. 1).

---

[1]) Число ρ есть корень уравнения: $\rho^2+\rho+1=0$ с положительной мнимой частью.

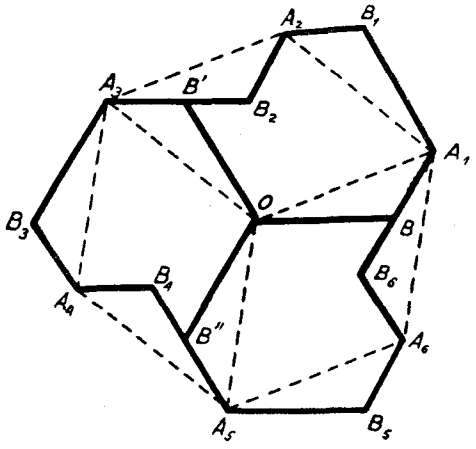
[2]) Журнал Ленинградского Физико-Математического Общества. Т. 2. 1927.

Все треугольники равны между собой и равны треугольнику OBA_1, вершины которого изображают соответственно числа O . . . . O

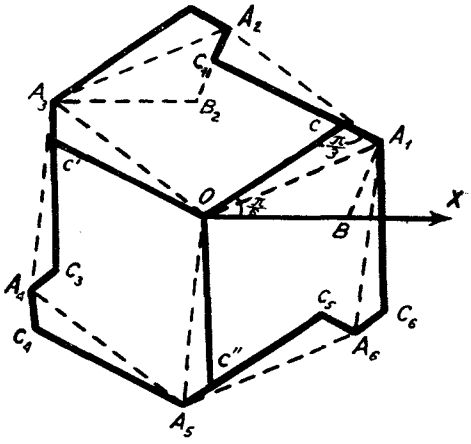
$$B \ldots\ldots\ldots \frac{2a-b}{3}$$

$$A_1 \ldots\ldots\ldots \frac{a+b}{3}+\frac{2b-a}{3}\rho.$$

Целые точки линий A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_5B_5, A_6B_6 причислим к области S. Целые точки области S разобьем на три класса, относя к первому, второму и третьему классам точки областей $A_1B_1A_2B_2$ $B'OBA_1$, $OB'A_3B_3A_1B_1B''O$ и $OB''A_5B_5A_6B_6BO$ соответственно. Целые точки линии BO, A_1B_1, A_2B_2 относятся к первому классу. Целые точки



Черт. 1.



Черт. 2.

линий OB', A_3B_3, A_1B_1 относятся ко второму классу. Целые точки линий OB'', A_5B_5, A_6B_6 относятся к третьему классу. Треугольники $OB'A_3$, $OB''A_5$ равны треугольнику OBA_1.

Назовем разбиение через A.

Примем теперь за основную область T область $A_1C_1A_2C_2A_3C_3A_4C_4$ — $-A_5C_5A_6C_6A_1$. Область T получается из шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ путем присоединения треугольников $A_2C_2A_3$, $A_4C_4A_5$, $A_6C_6A_1$ и удаления треугольников $A_1C_1A_2$, $A_3C_3A_4$, $A_5C_5A_6$ (черт. 2). Все треугольники равны треугольнику OA_1C. Вершины треугольника соответствуют числам O. . . . O,

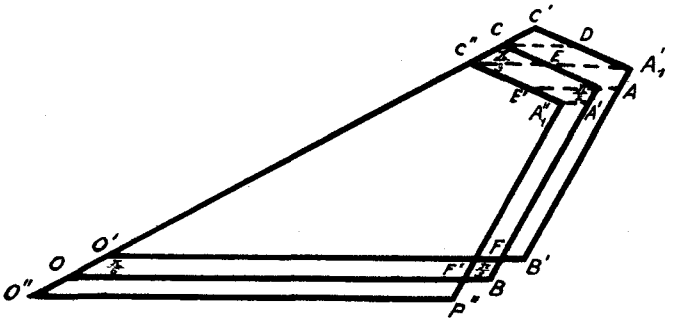
$$A_1 \ldots\ldots \frac{a+b}{3}+\frac{2b-a}{3}\rho$$

$$C \ldots\ldots \frac{2b}{3}+\frac{b}{3}\rho.$$

Углы $\angle COX$ и $\angle A_1CO$ равны соответственно $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{2\pi}{3}$.

Целые точки линий A_1C_1, C_1A_2, A_3C_3, C_3A_4, A_5C_5, C_5A_6 причислим к области T. Область T разобьем на классы. К первому классу отнесем целые точки области $OCC_1A_2C_2A_3C'O$, причисля к ней целые точки на линиях OC, A_1C_1, C_1A_2. Ко второму классу отнесем целые точки области $OC'C_3A_1C_1A_5C''O$, причисля к ней точки линий OC' A_3C_3, C_3A_4. К третьему классу отнесем целые точки области $OC''C_5A_6C_6A_1CO$, причисля к ней целые точки линий OC'', A_5C_5, C_5A_6. Треугольники $OC'A_3$, $OC''A_5$ равны треугольнику OCA_1.

Новое разбиение назовем B. Обозначим через τ и τ' число целых точек, принадлежащих треугольникам OCA_1 и $A_3C_2A_2$ соответственно. Целые точки линии OA_1 принадлежат треугольнику OA_1C.



Черт. 3.

Через σ и σ' обозначим соответственно число целых точек, принадлежащих треугольникам OBA_1, $A_3B_2A_2$. Целые точки линии OB отнесем к первому, целые точки линии A_3B_2 отнесем ко второму треугольнику. Называя через $D_{(A,\ B)}\ (2+\rho,\ a+b\rho)$ обобщенный децедент числа $2+\rho$ по отношению числа $m = a+b\rho$, соответствующий разбиениям A и B, можем написать соотношение:

1) $D\ (2+\rho,\ a+b\rho) \equiv D_{(A,\ B)}\ (2+\rho, a+b\rho) + \sigma - \sigma' + \tau - \tau'$. (мод. 3) [1]).

Подсчитаем сначала величину $\sigma - \sigma' + \tau - \tau'$. Числа $\sigma + \tau$ и $\sigma' + \tau'$ изображают число целых точек, принадлежащих областям OBA_1CO и $A_3B_2A_2C_2A_3$ соответственно. Целые точки линии OB причисляются к первой, а целые точки линии A_3B_2 относятся ко второй области (чер. 2). Различим два случая:

Первый случай: $a+b \equiv -1$ . . . . . (мод. 3).

Перенесем фигуру $A_3B_2A_2C_2A_3$, передвигая ее параллельно самой себе так, чтобы точка A_3 совпала с точкой O' . . . . . $\frac{2+\rho}{3}$.

[1]) А. Журавский: „Закон взаимности кубических вычетов". Теорема 3.

Перемещение произведено на целый вектор:

$$\frac{2+\rho}{3}-\left(\frac{a-2b}{3}+\frac{2a-b}{3}\cdot\rho\right).$$

Число целых точек, принадлежащих области $O'B'A'_1C'O'$ равно числу целых точек области $A_3B_2A_2C_2A_3$.

Обозначим через μ число целых точек на линии OB. Через ν число целых точек, принадлежащих $FB'A'_1C'CA_1F$. Целые точки линий FB', FA_1, A_1C причисляются к области.

Не трудно видеть, что

$$\sigma-\sigma'+\tau-\tau'=\mu-\nu. \tag{2}$$

Число μ находится непосредственно по числу, соответствующему точке B.

$$\mu=\frac{2a-b-1}{3}. \tag{3}$$

Замечая, что фигура $O'B'A'_1C'O'$ может быть получена из фигуры OBA_1CO перемещением ее на вектор $\frac{2+\rho}{3}$, легко заметим, что целые точки области $FB'A'_1\ C'CA_1F$ все принадлежат параллелограмму A'_1DCE, т. е. что вне этого параллелограмма нет целых точек области.

Длина линии $A_1'E$ равна единице. Принимая в расчет числа, соответствующие C и A'_1 ($C\ \ldots\ \frac{2b}{3}+\frac{b}{3}\rho$), $A'_1\ \ldots\ \frac{a+b}{3}+\frac{2b-a}{3}\rho+\frac{2+\rho}{3}$), легко подсчитать число целых точек параллелограмма A'_1DCE.

$$\nu=\begin{cases}\left[\frac{a-b-1}{3}\right] & b\equiv 0,\ a\equiv -1\\ \left[\frac{a-b-1}{3}\right]+1 & b\equiv a\equiv 1\\ \left[\frac{a-b-1}{3}\right] & b\equiv 1,\ a\equiv 0\end{cases} \quad \ldots \text{ (мод. 3).} \tag{4}$$

Возьмем второй случай $a+b\equiv 1$ . . . . . (мод. 3).

В этом случае переместим фигуру $A_3B_2A_2C_2A_3$ параллельным перенесением в новое положение так, чтобы точка A_3 попала в точку $-\frac{2+\rho}{3}$. Перемещение произведено на целый вектор $-\frac{a-2b+2}{3}-\frac{2a-b-1}{3}\rho$. Число целых точек области $A_3B_2A_2C_2A_3$ равно числу целых точек области $OB''A_1''C''O$ (чер. 3).

Обозначим через λ число целых точек области $BA'_1CC''A''_1F'B$. Целые точки линий $F'B$, $F'A''_1$, A''_1C'' относятся к этой области.

Отметим, что область $O''B''A''_1C''O''$ может быть получена из области OBA_1CO перемещением ее на вектор $-\frac{2+\rho}{3}$.

Принимая в расчет сделанное предположение, можно сказать, что все целые точки области $BA_1CC''A''_1F'B$ принадлежат параллелограмму $A_1EC''E'$. Сторона A_1E' равна 1. Вершины C'' и A'_1 соответствуют числам $\frac{2b-2}{3}+\frac{b-1}{3}\rho$ и $\frac{2a-b}{3}+\frac{2b-a}{3}\rho$.

Число λ равно:

$$(5)\qquad \lambda=\begin{cases}\dfrac{a-b}{3} & a\equiv b\equiv -1\\ \dfrac{a-b+1}{3} & a\equiv 0,\ b\equiv +1\\ \dfrac{a-b-1}{3} & a\equiv 1,\ b\equiv 0\end{cases}\quad\ldots\ldots\ (\text{мод. } 3).$$

Таким образом для числа $\triangle=\sigma-\sigma'+\tau-\tau'$ находим окончательно:

$$(6)\qquad \triangle=\begin{cases}\dfrac{a}{3} & a\equiv 0,\ b\equiv -1\\ \dfrac{a+1}{3} & a\equiv -1,\ b\equiv 0\\ \dfrac{a-1}{3} & a\equiv b\equiv 1\\ \dfrac{a-b}{3} & a\equiv b\equiv -1\\ \dfrac{a-b+1}{3} & a\equiv 0,\ b\equiv +1\\ \dfrac{a-b-1}{3} & a\equiv 1,\ b\equiv 0\end{cases}\quad\ldots\ldots\ (\text{мод. } 3).$$

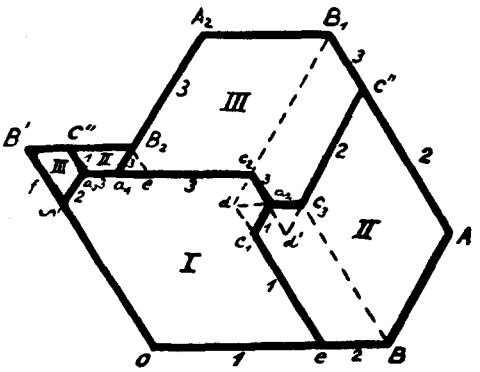
Обратимся к определению величны $D_{(A,\ B)}(2+\rho,\ a+b\rho)$.

Для решения этого вопроса надлежит разбить область первого класса (A) на части так, чтобы целые точки, принадлежащие одной и той же части, по умножении на $2+\rho$ давали бы числа одного и того же класса по модулю $a+b\rho$.

Это можно сделать следующим образом. Область первого класса разбиения (A) покрываем областями, получаемыми из областей первого, второго и третьего классов разбиения (B), при помощи геометрического преобразования, соответствующего деления на $2+\rho$.

Числа, соответствующие вершинам преобразованных областей, получатся из вершин областей 1, 2 и 3-го классов разбиения (B) делением на $2+\rho$. Целые точки каждой отдельной части имеют одина-

ковый характер. На чертеже 4 видно, как разбивается область первого класса разбиения A на части указанным способом. Области, целые точки которых относятся к первому классу, отмечены цифрой 1; области, целые точки которых относятся ко второму и третьему классам соответственно отмечены цифрами II и III. Цифрами 1, 2, 3 отмечены те пограничные линии, целые точки которых относятся соответственно к первому, второму и третьему классам. Задача приводится, таким образом, к подсчету точек в отдельных областях. Произвести подсчет точек не представляет большого затруднения, так как границы отдельных областей параллельны линиям параллелограмматической сети, изображающей целые числа $u+v\rho$ квадратичной области. Для произведения подсчета нужно знать положение вершин отдельных областей. Определить их положение не трудно, помня способ образования областей. Ниже мы приводим числа, соответствующие отдельным вершинам в виде таблички.



Черт. 4.

$c \ldots \frac{b}{3}$,	$c_1 \ldots \frac{b}{3}+\frac{2b-a}{3}\rho$,
$a_3 \ldots \frac{a-b}{3}+\frac{a}{3}\rho$,	$c' \ldots \frac{b}{3}\rho$,
$c'' \ldots \frac{a+b}{3}+\frac{3b-a}{3}\rho$,	$c_3 \ldots \frac{2a-b}{3}+\frac{b}{3}\rho$,
$a_4 \ldots \frac{2a-2b}{3}+\frac{a}{3}\rho$,	$B_2 \ldots a-b+\frac{2a-b}{3}\rho$,
$a_2 \ldots \frac{a}{3}+\frac{b}{3}\rho$,	$c_2 \ldots \frac{a}{3}+\frac{b}{3}\rho$
$B \ldots \frac{2a-b}{3}$,	$A_1 \ldots \frac{a+b}{3}+\frac{2b-a}{3}\rho$
$B_1 \ldots \frac{a+b}{3}+\frac{a+b}{3}\rho$,	$A_2 \ldots \frac{2a-b}{3}+\frac{a+b}{3}\rho$
$c''' \ldots \frac{a-b}{8}+\frac{2a-b}{3}\rho$.	$B' \ldots \frac{2a-b}{3}\rho$.

Обозначим через m число ц. точек внутри области (с $BA_1c''c_3a_2c_1c$) и на линиях cBA_1c'', $c''c_3$, c_3a_2; через m′ — число ц. точек внутри $a_3a_4B_2c'''$; через n — число ц. точек внутри $a_2c_3c''B_1A_2a_4c_2a_2$ и на линиях

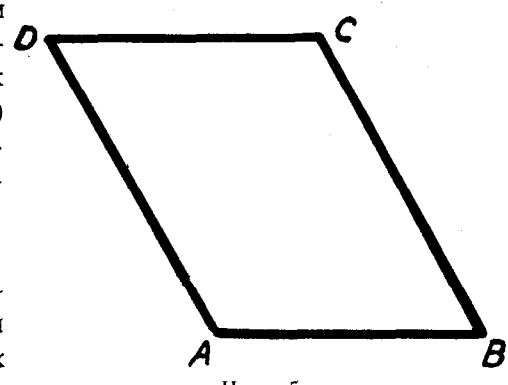
$c''B_1$, A_2a_4, a_4c_2, c_2a_2; через n' — число ц. точек внутри $c'a_3c'''B'$; через μ и ν число ц. точек на линиях $c'a_3$ и a_3a_4 соответственно. Числа m, m', n, n', μ, ν легко найдутся с помощью следующих предложений.

Предложение 1-ое.

Если стороны параллелограмма ABCD параллельны линиям параллелограмматической сети, а вершины A, B, C, D изображают числа $\alpha+\beta\rho$, $\alpha'+\beta\rho$, $\alpha'+\beta'\rho$, $\alpha+\beta'\rho$ или $\alpha+\beta(1+\rho)$, $\alpha'+\beta'(1+\rho)$, $\alpha'+\beta'(1+\rho)$, $\alpha+\beta'(1+\rho)$ или наконец $\alpha(1+\rho)+\beta\rho$, $\alpha'(1+\rho)+\beta\rho$, $\alpha'(1+\rho)+\beta'\rho$, $\alpha(1+\rho+\beta'\rho)$, то число целых точек параллелограмма S равно

(1) $$S=([\beta']-[\beta])\ ([\alpha']-[\alpha])\quad (\beta'>\beta),\ \alpha'>\alpha).$$

Целые точки линий BC и CD причисляются к параллелограмму. Не трудно понять, как нужно видоизменить равенство (1) для случаев, когда точки граничных линий причисляются к области ABCD по иному правилу.



Черт. 5.

Предложение 2-ое.

Если стороны равностороннего треугольника параллельны линиям сети, то число S ц. точек треугольника ABC, вершины которого соответствуют числам: $\alpha+\beta\rho$, $\alpha+h+(\beta+h)\rho$, $\alpha+h+\beta\rho$ равно:

$$\text{I}\quad S=\begin{cases}\frac{1}{2}([\beta+h]-[\beta]+1)\ ([\beta+h]-[\beta]), & \{a+h\}\leqq\{\beta+h\}\ ^*)\\ \frac{1}{2}([\beta+h]-[\beta]-1)\ ([\beta+h]-[\beta]), & \{\alpha+h\}>\{\beta+h\}\end{cases}$$

когда h положительно и ц. точки AB и BC относятся к треугольнику.

$$\text{II}\quad S=\begin{cases}\frac{1}{2}([\beta]-[\beta-h]+1)\ ([\beta]-[\beta-h]), & \{\alpha-h\}\geqq\{\beta-h\}\\ \frac{1}{2}([\beta]-[\beta-h])\ ([\beta]-[\beta-h]-1), & \{\alpha-h\}<\{\beta-h\}\end{cases}$$

Доказательство предложения проводится без всякого труда. Возьмем для примера случай, когда h положительно и

$$\{\alpha+h\}>\{\beta+h\}.$$

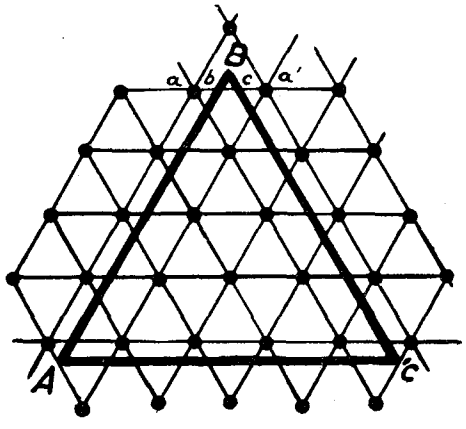
В этом случае отрезки ac и $cB=bc$ имеют длину, равную соответственно $\{\alpha+h\}$ и $\{\beta+h\}$ и длина отрезка $ac>bc=cB$ больше

*) $\{\lambda\}=\lambda-[\lambda]$.

длины cB. На линии aa′ нет ц. точек, лежащих внутри треугольника. Число линий сети, параллельных AC и пересекающих стороны AB, BC, равно $[\beta+h]-[\beta]$. На одной из них нет ц. точек внутри треугольника. Отсюда сейчас же следует, что число ц. точек S, лежащих внутри треугольника, равно:

$$S=\tfrac{1}{2}([\beta+h]-[\beta]-1)([\beta+h]-[\beta]).$$

Аналогично можно разобрать и остальные случаи. При ином способе отнесения границ к области не трудно сообразить, как следует видоизменить приведенные формулы.



Черт. 6.

Приложим эти предложения к вычислению числа ц. точек m, m′, n, n′. Область $cBA_1c''c_3a_2c_1c$ дополним равносторонним треугольником c_1a_2d. Число ц. точек треугольника обозначим через m_1. Ц. точки линий da_2, c_1a_2 отнесем к треугольнику.

Область $dcBA_1c''c_3a_2d$ разобьем линией Bc_3 на два параллелограмма. Ц. точки линии Bc_3 отнесем к параллелограмму cBc_3d. Число ц. точек того и другого назовем через m_2 и m_3. Имеем с помощью доказанных предложений:

$$(7)\quad m_2=\left(\left[\frac{b}{3}\right]+1\right)\left(\left[\frac{2a-b}{3}\right]-\left[\frac{b}{3}\right]\right),\quad m_3=\left(\left[\frac{a+b}{3}\right]-\left[\frac{2a-b}{3}\right]\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\left[\tfrac{2}{3}(b-a)\right]-\left[\frac{b-2a}{3}\right]\right),\quad m_1=\tfrac{1}{2}\left[\frac{a-b}{3}\right]\left(\left[\frac{a-b}{3}\right]+1\right).$$

Область $a_2c_3c''B_1A_2a_4c_2a_2$ дополним равносторонним треугольником $c_3d'a_2$. Область $d'c_3c''B_1A_2a_4c_2d'$ разобьем на два параллелограмма линией B_1c_2. Число ц. точек параллелограмма $d'c''B_1c_2$ обозначим через n_1, число ц. точек параллелограмма $a_4c_2B_1A_2$ обозначим через n_2. Ц. точки линии B_1c_2 отнесем к первому параллелограмму. Через n_3 обозначим число ц. точек треугольника $a_2\cdot d'c_3$. Ц. точки линий a_2c_3, a_2d' отнесем к треугольнику.

Числа n_1, n_2, n_3 равны

$$(8)\quad n_1=-\left[\frac{2(b-a)}{3}\right]\left(\left[\frac{a+b}{3}\right]-\left[\frac{a}{3}\right]+e_a\right),\quad e_a=\begin{cases}0, & a\text{ не}\equiv 0\\ 1, & a\equiv 0\end{cases}\ (\text{мод. }3)$$

$$n_2=\left[\frac{2b-a}{3}\right]\left(\left[\frac{a+b}{3}\right]-\left[\frac{a}{3}\right]+e_a\right)$$

$$n_3 = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{a-b}{3}\right] + h_{a-b}\right)\left(\left[\frac{a-b}{3}\right] + h_{a-b} + 1\right)$$

где

$$h_{a-b} = \begin{cases} 1, & b - a \equiv 1 \\ 0, & b - a \equiv -1 \\ -1, & b - a \equiv 0 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(мод 3).}$$

Числа m и n равны соответственно

$$m = m_2 + m_3 - m_1, \quad n = n_1 + n_2 - n_3. \tag{9}$$

Для определения числа m′ дополняем область $a_3a_4B_2c'''$ равносторонним треугольником a_4eB_2. Обозначим через m'_1, число ц. точек параллелограмма a_3eB_2c''', через m'_2 число ц. точек треугольника a_4eB_2

$$m' = m_1 - m_2.$$

Числа m_1 и m_2 равны соответственно:

$$\begin{aligned} m_1 &= \left(\left[\frac{2a-b}{3}\right] - \left[\frac{a}{3}\right]\right)\left(a - b - 1 - \left[\frac{a-b}{3}\right]\right) \\ m_2 &= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{a-b}{3}\right] + g_{a-b}\right)\left(\left[\frac{a-b}{3}\right] + g_{a-b} + 1\right) \end{aligned} \tag{10}$$

где $g_{a-b} = 0$, когда $a \equiv -1$, $b \equiv 0$ . . . . . (мод. 3) и $g_{a-b} = -1$ во всех остальных случаях.

Наконец, разбивая область $a_3c'''B'c'$ на параллелограмм $a_3c'''B'f$ и равносторонний треугольник a_3fc' и называя через n'_1, n'_2 число ц. точек того и другого, найдем:

$$\begin{aligned} n' &= n'_1 - n_2 \\ n'_1 &= \left[\frac{a-b}{3}\right]\left(\left[\frac{2a-b}{3}\right] - \left[\frac{a}{3}\right]\right) \\ n'_2 &= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{a-b}{3}\right] - 1 + e_a\right)\left(\left[\frac{a-b}{3}\right] + e_a\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Числа μ и ν равны соответственно

$$\mu = \begin{cases} 0, & b \text{ не} \equiv 0 \\ \left[\dfrac{a-b}{3}\right], & b \equiv 0 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(мод. 3)}$$

(12)

$$\nu = \begin{cases} 0, & a \text{ не} \equiv 0 \\ \left[\dfrac{a-b}{3}\right] + 1, & a \equiv 0,\ b \equiv 1 \\ \left[\dfrac{a-b}{3}\right], & a \equiv 0\ b \equiv -1 \end{cases} \quad \ldots\ldots \text{(мод. 3).}$$

Величина $D_{(A,\ B)}\ (2+\rho,\ a+b\rho)$ дается сравнением

$$D_{(A,\ B)}\ (2+\rho,\ a+b\rho)\equiv m+m'+\mu-n-n'-\nu \quad \ldots \text{(мод. 3).} \tag{13}$$

Подставляя в сравнение (13) вместо чисел m, m', n, n', μ, ν их выражения после простых преобразований, найдем для каждого случая следующее выражение $D_{(A,\ B)}\ (2+\rho,\ a+b\rho)$.

$$D_{(A,\ B)}\ (2+\rho,\ a+b\rho)\equiv \begin{cases} \dfrac{2a}{3}, & a\equiv 0,\ b\equiv 1 \\ \dfrac{2b-2a+2}{3}, & a\equiv 1,\ b\equiv 0 \\ \dfrac{b+1}{3}, & a\equiv b\equiv -1 \\ \dfrac{b-a+1}{3}, & a\equiv 0,\ b\equiv -1, \\ -\dfrac{b}{3}, & a\equiv -1,\ b\equiv 0 \\ \dfrac{-2a+2}{3}, & a\equiv b\equiv 1 \end{cases} \pmod 3 \tag{14}$$

(мод. 3).

Принимая в расчет сравнения (1), (6) и (14), получим окончательно:

$$D\,(2+s,\ a+bs)\equiv \begin{cases} \dfrac{-b+1}{3}; & a\equiv 0,\ b\equiv 1 \\ \dfrac{b-a+1}{3}; & a\equiv 1,\ b\equiv 0 \\ \dfrac{a+1}{3}; & a\equiv b\equiv -1 \\ \dfrac{b+1}{3}; & a\equiv 0,\ b\equiv -1 \\ \dfrac{a-b+1}{3}; & a\equiv -1,\ b\equiv 0 \\ \dfrac{-a+1}{3}; & a\equiv b\equiv 1 \end{cases} \pmod 3 \tag{15}$$

(мод. 3).

Справедливость сравнений (15) доказана при ограничительных предположениях:

$$2b\geqq a\geqq b\geqq 0. \tag{16}$$

Чтобы снять это ограничительное предположение, прежде всего заметим, что условию (16) всегда удовлетворяет одно из 12 чисел союзных и сопряженных с данным.

Предположим сначала, что одно из чисел союзных с $m=a+b\rho$ удовлетворяет условию (16). Пусть это число $m'=a'+b'\rho$ равно $m'=m\ (1+\rho)^h$. Для числа m' сравнения (15) имеют место и

$$D\ (2+\rho,\ m)=D\ (2+\rho,\ m').$$

Выражая числа a' и b' через a и b и пользуясь уже полученным результатом, убедимся в справедливости сравнений (15) для числа m.

Предположим теперь, что одно из чисел, союзных с сопряженным числом $m=a+b\rho^2$, удовлетворяет условию (16).

В силу только что сказанного, следует, что для числа m сравнения (15) справедливы.

Пользуясь же соотношением:

$$D\ (2+\rho.\ a+b\rho)\equiv -D\ (2+\rho^2,\ a+b\rho^2)\equiv$$

$$\equiv -D\ (2+\rho;\ a-b-b\rho)-\frac{N\ (a+b\rho)-1}{3}$$

сейчас же убедимся, в справедливости сравнений (15) для числа m. Так, например, для того случая, когда m дано в примарной форме ($a\equiv -1$, $b\equiv O$ (мод. 3), имеем:

$$\frac{N\ (a+b\rho)-1}{3}\equiv\frac{a+b+1}{3}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{(мод. 3)}$$

$$D\ (2+\rho;\ a-b-b\rho)\equiv\frac{a-b+b+1}{3}=\frac{a+1}{3}\ .\ .\ \text{(мод. 3)}.$$

Откуда следует:

$$D\ (2+\rho,\ a+b\rho)\equiv\frac{-2a-b-2}{3}\equiv\frac{a-b+1}{3}\ .\ .\ .\ \text{(мод. 3)}.$$

Сравнения (15) справедливы вообще.

Зная характер числа $2+\rho$, легко получить характер числа $1-\rho$. Так для случая, когда $a+bs$ задано в примарной форме, имеем:

$$D\ (1-\rho,\ a+b\rho)\equiv D\ (2+\rho,\ a+b\rho)+\frac{a+b+1}{3}\ .\ .\ \text{(мод. 3)}$$

или

$$D\ (1-\rho,\ a+b\rho)=\frac{2(a+1)}{3}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{(мод. 3)}. \tag{17}$$

Summary.

The present paper gives a purely arithmetical method to obtaining the cubic character of the number $1-\rho$.

The method is based on the well-known lemma of Gauss. The author for a better evidence represents the numbers

$$\alpha+\beta\rho,$$

where α and β are real, as points of a plane.

The problem is thus reduced to finding the number of lattice points in a certain region.

The aimed at result is got by the particular choice of the fundamental region and its correspondent subdivision into parts.