Записки Горного Института Т. VII. 1926.
Annales de l'Institut des Mines à Leningrade. T. VII. 1926.

Этюды по теории наименьших квадратов.

И. М. Бахурин.

Zur Theorie der Methode der kleinsten Quadrate

von I. M. Bachurin.

§ 1. Содержание настоящей статьи.

Содержание настоящей статьи можно разделить на две части: первая—вывод формулы (впервые предложенной мною) для средней погрешности уравновешенного значения всех измеренных, входящих в уравновешение величин, вторая — новый вывод формулы для средней погрешности одного наблюдения.

Как известно, существуют формулы для вычисления средней погрешности уравновешенного значения одной какой-нибудь измеренной, входящей в уравновешение величины. Вернее, — эти формулы легко могут быть получены из общих, приводимых в курсах теории случайных ошибок формул.

Выражения для таковой средней ошибки, в случае уравновешивания посредственных или условных наблюдений, как известно, отличаются сложностью, и определение средней ошибки, после уравновешивания требует дополнительных, более или менее сложных вычислений.

Между тем мы можем дать простое выражение для средней погрешности всех входящих в уравновешение измеренных величин после уравновешивания.

Эта формула по своему общему значению должна принадлежать к числу основных, излагаемых в курсах, формул теории уравновешивания.

Пользуясь этой формулой, мы можем дать новый, более простой, чем прежние, вывод также одной из основных формул теории слу-

чайных погрешностей — формулы для определения средней погрешности одного наблюдения.

§ 2. Вывод формулы для средней погрешности значений измеренных величин после уравновешивания, для случая уравновешения посредственных наблюдений.

Мы возьмем для простоты рассуждений, отчего общность их не пострадает, случай уравновешения трех величин, истинные значения которых назовем через X, Y и Z, приближенные через x, y и z, и уравновешенные через x_0, y_0 и z_0.

Пусть δx, δy и δz будут поправки, которые надо придать к приближенным значениям x, y и z, чтобы получить уравновешенные, т.-е. положим:

$$x_0 = x + \delta x, \qquad y_0 = y + \delta y, \qquad z_0 = z + \delta z.$$

Назовем далее через L_1', L_2', L_3' и т. д. (числом n) неизвестные нам истинные, через L_1, L_2, $L_3 \ldots$ — уравновешенные значения непосредственно измеренных величин l_1, l_2, l_3, и т. д.

Отклонение v_i непосредственно измеренной величины l_i от ее наивероятнейшего значения L_i выражается, как известно, формулой:

$$L_i - l_i = a_i \delta x + b_i \delta y + c_i \delta z + \varepsilon_i,$$

где

$$\varepsilon_i = F_i(x, y, z) - l_i;$$

коэффициенты же a_i, b_i, c_i суть производные функции F_i соответственно по x, y, z.

Предположим пока, что величины l_1, l_2, l_3 и т. д. были измерены с одинаковою точностью (с весом = 1) и напишем формулу для средней погрешности какой нибудь функции Φ от уравновешенных x_0, y_0, z_0.

Если f_1, f_2 и f_3 будут производными функции $\Phi(x, y, z)$ соответственно по x, y, z, то, как известно, средняя погрешность M_Φ уравновешенного значения функции Φ будет такова:

$$M_\Phi^2 = \frac{m^2}{D}\left\{\begin{array}{r} f_1 f_1 A_{[aa]} + 2 f_1 f_2 A_{[ab]} + 2 f_1 f_3 A_{[ac]} \\ + \; f_2 f_2 A_{[bb]} + 2 f_2 f_3 A_{[bc]} \\ + \; f_3 f_3 A_{[cc]} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Здесь D — определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных δx, δy, δz в нормальных уравнениях, $A_{[aa]}$, $A_{[ab]}$, $A_{[ac]}$, $A_{[bb]}$, $A_{[bc]}$ и $A_{[cc]}$ — миноры этого определителя по элементам 1-й, 2-й и 3-й

строк, m — средняя погрешность одного наблюдения. Если мы положим $\Phi = F_i$, то найдем среднюю погрешность M_{L_i} уравновешенного значения L_i наблюденной величины, заметив, что $f_1 = a_i$, $f_2 = b_i$ и $f_3 = c_i$.

$$M_{L_i}^2 = \frac{m^2}{D}\left\{\begin{array}{r} a_i a_i A_{[aa]} + 2a_i b_i A_{[ab]} + 2a_i c_i A_{[ac]} \\ + \; b_i b_i A_{[bb]} + 2b_i c_i A_{[bc]} \\ + \; c_i c_i A_{[cc]} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Взяв сумму квадратов $M_{L_i}^2$ для всех L_i, т.-е. для значений i от $i = 1$ до $i = n$, мы найдем:

$$\Sigma M_{L_i}^2 = \frac{m^2}{D}\left\{\begin{array}{l} [aa] A_{[aa]} + [ab] A_{[ab]} + [ac] A_{[ac]} \\ + [ab] A_{[ab]} + [bb] A_{[bb]} + [bc] A_{[bc]} \\ + [ac] A_{[ac]} + [bc] A_{[bc]} + [cc] A_{[cc]} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

По свойству определителей легко видеть, что:

$$[aa] A_{[aa]} + [ab] A_{[ab]} + [ac] A_{[ac]} = [ab] A_{[ab]} + [bb] A_{[bb]} + [bc] A_{[bc]} = \\ = [ac] A_{[ac]} + [bc] A_{[bc]} + [cc] A_{[cc]} = D.$$

Отсюда имеем:

$$\Sigma M_{L_i}^2 = 3m^2 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

и среднее значение одного M_L равно:

$$M_L = \pm m\sqrt{\frac{3}{n}} \quad \ldots \ldots \quad (4a)$$

Здесь 3—число нормальных уравнений и, следовательно, число необходимых наблюдений, n — число всех измерений. Мы можем сказать:

средняя погрешность уравновешенных величин

$$L_1,\ L_2,\ L_3 \ldots . L_n$$

равна средней погрешности одного наблюдения, помноженной на квадратный корень из отношения числа необходимых наблюдений к числу всех наблюдений.

То же самое можно сказать:

вес уравновешенного значения по сравнению с весом одного наблюдения увеличивается в среднем в отношении числа измеренных величин к числу необходимых наблюдений.

§ 3. Вывод формулы для средней погрешности одного наблюдения.

Обозначим через Δ_i отклонение непосредственно измеренного значения l_i от истинного значения той же величины, т.-е.

$$L_i' - l_i = \Delta_i,$$

или:

$$L_i - L_i + L_i - l_i = L_i - L_i + V_i = \Delta_i.$$

Возвышая в квадрат, получим:

$$(L_i' - L_i)^2 + v_i v_i + 2 v_i (L_i' - L_i) = \Delta_i \Delta_i.$$

Суммируя для i от $i=1$ до $i=n$, найдем:

$$\Sigma (L_i' - L_i)^2 + [vv] + 2\Sigma v_i (L_i' - L_i) = [\Delta\Delta].$$

Но сумма

$$\Sigma (L_i - L_i)^2 = \Sigma M_{L_i}^2 = 3m^2$$

и

$$[\Delta\Delta] = nm^2.$$

Положим далее $X = x_0 + dx$, $Y = y_0 + dy$, $Z = z_0 + dz$, т.-е. dx, dy и dz — поправки, которые надо придать к уравновешенным значениям x_0, y_0 и z_0, чтобы получить истинные значения x, y, z.

Тогда:

$$L_i' - L_i = F_i(x_0 + dx,\ y_0 + dy,\ z_0 + dz) - F_i(x_0,\ y_0,\ z_0) = a_i dx + b_i dy + c_i dz$$

$$(L_i' - L_i)\ v_i = (a_i dx + b_i dy + c_i dz)\ (a_i \delta x + b_i \delta y + c_i \delta z + \varepsilon_i) =$$
$$= dx [a_i a_i \delta x + a_i b_i \delta y + a_i c_i \delta z + a_i \varepsilon_i] + dy [a_i b_i \delta x + b_i b_i \delta y + b_i c_i \delta z + b_i \varepsilon_i] +$$
$$+ dz [a_i c_i \delta x + b_i c_i \delta y + c_i c_i \delta z + c_i \varepsilon_i].$$

Отсюда нетрудно видеть, что:

$$\Sigma (L_i' - L_i)\ v_i = 0,$$

ибо коэффициенты при dx, dy и dz обратятся в нули, представляя из себя левые части нормальных уравнений.

Напр., коэффициент при dx будет равен:

$$[aa]\delta x + [ab]\delta y + [ac]\delta z + [a\varepsilon]$$

и будет равен нулю в силу первого нормального уравнения.

Таким образом получим:

$$3m^2 + [vv] = nm^2$$

или

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-3}}$$

известные выражения для m.

Предложенный нами вывод проще, чем известные выводы этой формулы.

Кроме того, метод доказательства тожественен с тем, который применяется для вывода аналогичной формулы для случая простой и общей арифметической средины, благодаря чему достигается единство метода для всех случаев уравновешивания.

§ 4. Вывод формулы для средней погрешности функции уравновешенных величин в случае условных наблюдений.

Возьмем для простоты случай трех условных уравнений и предположим пока, что наблюденные величины измерялись все с одинаковою точностью.

Положив:

$$L_i = l'_i + \delta l_i + \delta_i,$$

где l'_i есть приближенное значение измеренной величины l_i, т.-е.

$$l_i = l'_i + \delta l_i$$

δ_i — поправка к l_i после уравновешивания, т.-е.

$$L_i = l_i + \delta_i.$$

Мы можем всякую функцию Φ от уравновешенных величин L_i представить в виде:

$$\Phi(L_1,\ L_2,\ L_3 \ldots . L_n) = \Phi_0 + [f\delta l] + [af]k_1 + [bf]k_2 + [cf]k_3,$$

где

$$a_i = \frac{\partial F_1}{\partial l_i},\quad b_i = \frac{\partial F_2}{\partial l_i},\quad c_i = \frac{\partial F_3}{\partial l_i},\quad f_i = \frac{\partial \Phi(l_1,\ l_2,\ l_3 \ldots .)}{\partial l_i}$$ и

F_1, F_2 и F_3 — функции, определяющие условные уравнения.

Корреляты k_1, k_2 и k_3 определяются следующими соотношениями:

$$k_1 = -\frac{1}{D}\{w_1 A_{[aa]} + w_2 A_{[ab]} + w_3 A_{[ac]}\}$$

$$k_2 = -\frac{1}{D}\{w_1 A_{[ab]} + w_2 A_{[bb]} + w_3 A_{[bc]}\}$$

$$k_3 = -\frac{1}{D}\{w_1 A_{[ac]} + w_2 A_{[bc]} + w_3 A_{[cc]}\}.$$

Величины w_1, w_2 и w_3 — невязки, определяемые по формулам:

$$w_1 = F_1(l_1,\ l_2 \ldots l_n) - F_1(L_1,\ L_2 \ldots L_n)$$
$$w_2 = F_2(l_1,\ l_2 \ldots l_n) - F_2(L_1,\ L_2 \ldots L_n)$$
$$w_3 = F_3(l_1,\ l_2 \ldots l_n) - F_3(L_1,\ L_2 \ldots L_n).$$

Отсюда имеем:

$$\frac{\partial w_1}{\partial l_i} = a_i \qquad \frac{\partial w_2}{\partial l_i} = b_i \qquad \frac{\partial w_3}{\partial l_i} = c_i.$$

Составим производную функции Φ от уравновешенных величин L_1, L_2, $L_3 \ldots$ по непосредственно измеренной величине l_i; получим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l_i} = f_i - \frac{1}{D}\{[af][a_i A_{[aa]} + b_i A_{[ab]} + c_i A_{[ac]}] +$$
$$+ [bf][a_i A_{[ab]} + b_i A_{[bb]} + c_i A_{[bc]}] + [cf][a_i A_{[ac]} + b_i A_{[bc]} + c_i A_{[cc]}]\}.$$

Суммируя квадраты производных и умножая на m^2, найдем:

$$M_\Phi^2 = m^2\left\{[ff] + \frac{1}{D^2}N^2 - \frac{2\Sigma f_i N_i}{D}\right\},$$

назвав для краткости через N выражение, стоящее в фигурных скобках предыдущей формулы.

Но, как известно:

$$N^2 = P \cdot D,$$

где

$$P = [af]^2 A_{[aa]} + 2[af][bf] A_{[ab]} + 2[af][cf] A_{[ac]}$$
$$+ [bf]^2 A_{[bb]} + 2[bf][cf] A_{[bc]}$$
$$+ [cf]^2 A_{[cc]} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

выражение, совершенно аналогичное стоящему в фигурных скобках формулы (1).

Нетрудно видеть, кроме того, что

$$\Sigma f_i N_i = P,$$

а отсюда получим:

$$M_\Phi^2 = m^2\left\{[ff] - \frac{P}{D}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

§ 5. Вывод формулы для средней погрешности значений измеренных величин после уравновешения для случая условных наблюдений.

Найдем значение M_Φ^2, полагая $\Phi(L_1,\ L_2 \ldots) = L_i$, т.-е. погрешность уравновешенного значения какой-либо одной из измеренных величин. В этом случае $f_1 = f_2 \ldots = 0$ и только $f_i = 1$

$$[af] = a_i \qquad [bf] = b \qquad [cf] = c \qquad [ff] = 1.$$

Получим:

$$M_{L_i}^2 = m^2\left\{1-\frac{1}{D}\left[\begin{array}{r} a_i a_i A_{[aa]} + 2a_i b_i A_{[ab]} + 2a_i c_i A_{[ac]} \\ + \; b_i b_i A_{[bb[} + 2b_i c_i A_{[bc]} \\ + \; c_i c_i A_{[cc]} \end{array}\right]\right\} \quad . \quad . \quad (7)$$

Суммируя $M_{L_i}^2$ для всех L, найдем аналогично § 2:

$$\Sigma M_{L_i}^2 = m^2(n-3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

или

$$M_L = \pm m\sqrt{\frac{n-3}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8а),$$

т.-е. средняя погрешность уравновешенного значения величин

$$L_1,\ L_2 \ldots .$$

равна средней погрешности одного наблюдения, помноженной на корень квадратный из отношения числа необходимых наблюдений к числу всех измерений.

Таким образом, этот замечательный результат оказывается справедливым для всех случаев уравновешивания (он справедлив и для случая арифметической средины).

§ 6. Вывод формулы для средней погрешности одного наблюдения (случай условных наблюдений).

Точно так же, как и в § 3, получим:

$$L'_i - L_i + L_i - l_i = \Delta$$

или

$$L'_i - L_i + \delta_i = \Delta_i .$$

Возводя это равенство в квадрат и суммируя для i от $i=1$ до $i=n$, найдем:

$$\Sigma(L'_i - L_i)^2 + [\delta\delta] + 2\Sigma\,\delta_i(L'_i - L_i) = [\Delta\Delta],$$

или на основании § 5:

$$(n-3)\,m^2 + [\delta\delta] + 2\Sigma\,\delta_i(L'_i - L_i) = nm^2.$$

Вместо δ_i вставим его выражение через корреляты:

$$\delta_i = a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3 .$$

Разницу между истинным и уравновешенным значениями измеренных величин назовем через dl_i, т.-е.

$$L'_i = L_i + dl_i .$$

Тогда получим:

$$\Sigma \delta_i (L'_i - L_i) = k_1 \Sigma a_i dl_i + k_2 \Sigma b_i dl_i + k_3 \Sigma c_i dl_i .$$

После уравновешения первое условное уравнение дает:

$$F_1 (L_1,\ L_2,\ L_3 \ldots L_n) - F_1 (L'_1,\ L'_2,\ L'_3 \ldots) = 0$$

или

$$a_1 dl_1 + a_2 dl_2 + \ldots + a_n dl_n = \Sigma a_i dl_i = 0.$$

Второе и третье условные уравнения дадут:

$$\Sigma b_i dl_i = 0 \qquad \Sigma c_i dl_i = 0,$$

а отсюда:

$$\Sigma \delta_i (L'_i - L_i) = 0.$$

Таким образом, получим:

$$(n-3)\, m^2 + [\delta\delta] = nm^2$$

или

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{3}}$$

известное выражение для средней погрешности одного наблюдения.

§ 7. Случай неравноточных наблюдений. Посредственные наблюдения.

Для вывода формулы, подобной (1) § 2, в случае неравноточных наблюдений выразим Ф—функцию уравновешенных величин через непосредственно измеренные величины:

$$\begin{aligned}\Phi = &- \frac{f_1}{D}\left\{ [pa\varepsilon]\, A_{[paa]} + [pb\varepsilon]\, A_{[pab]} + [pc\varepsilon]\, A_{[pac]} \right\} - \\ &- \frac{f_2}{D}\left\{ [pa\varepsilon]\, A_{[pab]} + [pb\varepsilon]\, A_{[pbb]} + [pc\varepsilon]\, A_{[pbc]} \right\} - \\ &- \frac{f_3}{D}\left\{ [pa\varepsilon]\, A_{[pac]} + [pb\varepsilon]\, A_{[pbc]} + [pc\varepsilon]\, A_{[pcc]} \right\}.\end{aligned}$$

В выражение для производной $\frac{\partial \Phi}{\partial l_i}$ вместо коэффициентов a_i, b_i и c_i войдут соответственно $p_i a_i$, $p_i b_i$ и $p_i c_i$ (p_i — вес наблюдения l_i). При возвышении производной в квадрат, получим при каждом коэффициенте множитель p_i^2. Квадрат производной множится на квадрат средней погрешности (наблюдения) m_i^2 величины l_i. Вынося за скобки p_i, мы получим за скобками $m_i^2\, p_i$, т.-е. квадрат средней погрешности m^2 наблюдения с весом $= 1$. В скобках будем иметь коэффициенты вида:

$$p_i a_i a_i,\ p_i a_i b_i \text{ и т д.}$$

Таким образом, для неравноточных наблюдений вместо формулы (1) § 2 получим следующее выражение:

$$M_{\Phi}^2 = \frac{m^2}{D}\left\{\begin{array}{r} f_1 f_1 A_{[paa]} + 2f_1 f_2 A_{[pab]} + 2f_1 f_3 A_{[pac]} \\ + f_2 f_2 A_{[pbb]} + 2f_2 f_3 A_{[pbc]} \\ + f_2 f_3 A_{[pcc]} \end{array}\right\}$$

Здесь m есть средняя погрешность наблюдения с весом $= 1$.

Рассуждая далее, как и в § 2, мы вместо формулы (4) § 2 получим следующее выражение:

$$\Sigma M_{L_i}^2 \; p_i = 3m^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Для доказательства теоремы § 3 надо помножить обе части исходного равенства

$$(L'_i - L_i)^2 + v_i v_i + 2v_i (L_i - L_i) = \Delta_i \Delta_i$$

на p_i и суммировать, как и раньше, полученные выражения. Легко видеть, что

$$\Sigma v_i p_i (L'_i - L_i) = 0,$$

ибо при dx, dy, dz (см. § 3) мы получим коэффициентами левые части нормальных уравнений.

Таким образом, найдем:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-3}}$$

среднюю погрешность одного наблюдения с весом $= 1$.

§ 8. Случай неравноточных наблюдений. Условные наблюдения.

Вводя веса наблюденных величин, мы найдем выражение для Φ уравновешенных значений L_i вместо выведенного в § 4 таковым:

$$\Phi(L_1, \; L_2 \ldots L_n) = \Phi_0 + [f\delta l] + \left[\frac{af}{p}\right] k_1 + \left[\frac{bf}{p}\right] k_2 + \left[\frac{cf}{p}\right] k_3.$$

Рассуждениями, совершенно аналогичными предыдущим, найдем вместо формулы (6) § 4 выражение:

$$M_{\Phi}^2 = m^2 \left\{\left[\frac{ff}{p}\right] - \frac{P_1}{D}\right\},$$

где выражение P_1 отличается от выражения P формулы (5) § 4 только тем, что вместо сумм $[af]$, $[bf]$, $[cf]$ войдут соответственно суммы $\left[\frac{af}{p}\right]$, $\left[\frac{bf}{p}\right]$, $\left[\frac{cf}{p}\right]$, и изменятся соответствующим образом наименования

миноров $A_{[aa]}$, $A_{[ab]}$ и т. д., вместо которых войдут $A\left[\frac{aa}{p}\right]$, $A\left[\frac{ab}{p}\right]$, ... и т. д.

Вместо формулы (8) § 5 найдем:

$$\Sigma M_{L_i}^2 \cdot p_i = m^2 (n-3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

При выводе средней погрешности одного наблюдения с весом $=1$ мы помножим на $\sqrt{p_i}$ исходное выражение § 6:

$$L'_i - L_i + \delta_i = \Delta_i.$$

Возводя в квадрат и суммируя от $i=1$ до $i=n$, найдем:

$$\Sigma (L'_i - L_i)^2 p_i + [p\delta\delta] + 2\Sigma \delta_i (L'_i - L_i) p_i = [p\Delta\Delta].$$

Но на основании формулы (10) имеем:

$$\Sigma (L'_i - L_i)^2 p_i = m^2 (n-3).$$

Кроме того, как и в § 6 докажем, что:

$$\Sigma \delta_i p_i (L'_i - L_i) = 0,$$

ибо

$$\delta_i = \frac{a_i}{p_i} k_1 + \frac{b_i}{p_i} k_2 + \frac{c_i}{p_i} k_3.$$

В результате получим:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{3}}.$$

§ 9. Доказательство формулы (4) § 2 другим путем.

Если нормальные уравнения мы решаем по Гауссу, то погрешность функции уравновешенных значений z_0, y_0, z_0 имеет, как известно, следующее значение:

$$M_\Phi^2 = m^2 \left\{ \frac{f_1 f_1}{[aa]} + \frac{[f_2 \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{[f_3 \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} \right\},$$

где f_1, f_2 и f_3 сохраняют те же значения, что в § 2, а остальные обозначения таковы:

$$[f_2 \cdot 1] = f_2 - \frac{[ab]}{[aa]} f_1 \qquad [f_3 \cdot 1] = f_3 - \frac{[ac]}{[aa]} f_1$$

$$[f_3 \cdot 2] = [f_3 \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [f_2 \cdot 1]$$

$$[bb \cdot 1] = [bb] - \frac{[ab]}{[aa]} [ab] \qquad [bc \cdot 1] = [bc] - \frac{[ac]}{[aa]} [ab]$$

$$[cc \cdot 2] = [cc \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bc \cdot 1] \qquad [cc \cdot 1] = [cc] - \frac{[ac][ac]}{[aa]}.$$

Определим погрешность $M^2_{L_i}$ (см. § 2); при этом, как и в § 2, имеем:

$$f_1 = a_i \qquad f_2 = b_i \qquad f_3 = c_i.$$

Получим:

$$M^2_{L_i} = m^2 \left\{ \frac{a_i\, a_i}{[aa]} + \frac{[b_i \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{[c_i \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} \right\}.$$

Суммируем теперь выражения $M^2_{L_i}$ от $i=1$ до $i=n$. Получаем:

1) $\Sigma \frac{a_i\, a_i}{[aa]} = \frac{[aa]}{[aa]} = 1.$

2) $\Sigma [b_i \cdot 1]^2 = \Sigma \left(b_i b_i + \frac{[ab]^2}{[aa]^2} a_i a_i - 2 a_i b_i \frac{[ab]}{[aa]} \right) = [bb] - \frac{[ab]}{[aa]} [ab] = [bb \cdot 1]$

или

$$\Sigma \frac{[b_i \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} = 1$$

3) $\Sigma [c_i \cdot 2]^2 = \Sigma \left\{ [c_i \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bc \cdot 1]} \cdot [b_i \cdot 1] \right\}^2 = \Sigma \left\{ [c_i \cdot 1]^2 + \right.$

$$\left. + \frac{[bc \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]^2} [b_i \cdot 1]^2 - \frac{2 [bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [c_i \cdot 1]\ [b_i \cdot 1] \right\}.$$

Первый член в фигурных скобках, аналогично преобразованию 2, будет равен:

$$\Sigma [c_i \cdot 1]^2 = [cc \cdot 1].$$

Во втором члене, как мы уже получили:

$$\Sigma [b_i \cdot 1]^2 = [bb \cdot 1],$$

отсюда:

$$\Sigma \frac{[bc \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]^2} \cdot [bb \cdot 1]^2 = \frac{[bc \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]}.$$

В третьем члене найдем:

$$\Sigma [c_i \cdot 1] \cdot [b_i 1] = [bc \cdot 1],$$

отсюда получим:

$$\Sigma [c_i \cdot 2]^2 = [cc \cdot 1] + \frac{[bc \cdot 1]\ [bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} = [cc \cdot 2],$$

или

$$\Sigma \frac{[c_i \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} = 1,$$

откуда и получается:

$$\Sigma M^2_{L_i} = 3m^2.$$

§ 10. Вывод формулы (8) § 5 другим путем. (Условные наблюдения).

Погрешность функции Ф уравновешенных величин может быть представлена, как известно, в виде:

$$M_{\Phi}^2 = m^2 \left\{ [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf\,.\,1]^2}{[bb\,.\,1]} - \frac{[cf\,.\,2]^2}{[cc\,.\,2]} \right\}.$$

Здесь $[af]$ и $[ff]$ имеют те же значения, что и в § 4, $[bb\,.\,1]$ и $[cc\,.\,2]$ имеют те же значения, что и в § 9.

Выражения $[bf\,.\,1]$ и $[cf\,.\,2]$ получаются по формулам § 9 для $[f_2\,.\,1]$ и $[f_3\,.\,2]$ заменою f_2 через $[bf]$ и f_3 через $[cf]$.

Отыскивая $M_{L_i}^2$ (см. § 5) и замечая, что $[ff]=1$, $[af]=a_i$, $[bf]=b_i$, $[cf]=c_i$, получим:

$$M_{L_i}^2 = m^2 \left\{ 1 - \frac{a_i\, a_i}{[aa]} - \frac{[b_i\,.\,1]^2}{[bb\,.\,1]} - \frac{[c_i\,.\,2]^2}{[cc\,.\,2]} \right\}.$$

Суммируя эти выражения от $i=1$ до $i=n$, найдем, согласно § 9:

$$\Sigma M_{L_i}^2 = m^2 (n-3).$$

§ 11. Примеры приложения формул § 2 (4а) и § 5 (8а).

Формулы 4а и 8а могут быть написаны в общем виде:

$$M_L^2 = m^2 \,.\, \frac{r}{n},$$

где r—есть число необходимых, а n—число всех наблюдений.

В случае уравновешения углов в треугольнике, в котором измерены с одинаковою точностью все три угла, число необходимых наблюдений есть 2, а число всех наблюдений $=3$, и мы получаем среднюю ошибку M угла треугольника после уравновешения по предыдущей формуле, равной:

$$M^2 = m^2 \,.\, \frac{2}{3},$$

результат который в курсах получается обычно более сложным путем (см., напр., курс Jordan'a).

В случае уравновешения полного четырехугольника, в котором измерялись с одинаковою точностью 8 углов [1]) вместо 4 необходимых, мы получаем среднюю погрешность всех уравновешенных углов равной

$$M^2 = m^2 \,.\, \frac{1}{2}.$$

---

[1]) Между диагональю и стороной.

Это же выражение дает среднюю погрешность уравновешенного значения одного угла в случае полной симметрии фигуры, т.-е., если четырехугольник есть квадрат.

§ 12. Смысл формул 9 и 10 § 7 и § 8.

Формулы 9 и 10 могут быть написаны в общем виде:

$$\Sigma M_{L_i}^2 . p_i = r . m^2,$$

где r—есть число необходимых наблюдений.

Если мы назовем вес уравновешенного значения L_i через p_i', то предыдущая формула дает:

$$\Sigma \frac{p_i}{p_i'} = r,$$

или

$$\frac{1}{n} \Sigma \frac{p_i}{p_i'} = \frac{r}{n},$$

т.-е. отношение числа необходимых к числу всех наблюдений равно среднему арифметическому отношению веса измеренных величин до уравновешения к весу их после уравновешения.

Zusammenfassung.

Die Ableitung der Formel für den mittleren Fehler der beobachteten Grössen bei der Ausgleichung der bedingten oder mittelbaren (indirecten) Beobachtungen ist sehr kompliziert. Eine einfachere Ableitung dieser Formel erhalten wir auf folgende Weise:

Stellen wir den Begriff des mittleren Fehlers der wahrscheinlichsten Werte aller beobachteten Grössen für den Fall der gleichgenauen Beobachtungen fest. Wir haben erwiesen, dass dieser Fehler gleich $m\sqrt{\frac{n_1}{n}}$ ist, wo m—der mittlere Fehler einer Beobachtung, n_1—die Zahl der Beobachtungsergebnisse, die zur einfachen, nicht versicherten Bestimmung der gesuchten Grössen erforderlich sind, und n—die Zahl aller überhaupt vorhandenen Bestimmungen ist. Für die ungleichgenauen Beobachtungen haben wir $\Sigma M^2{}_{L_i} p_i = n_1 m^2$, wo M_{L_i} der mittlere Fehler der wahrscheinlichsten Wertes ist, p_i das Gewicht des Beobachtungsergebnisses und m der mittlere Fehler mit dem Gewichte gleich=1.

Unter Benutzung dieser Beziehung geben wir eine neue einfache Ableitung der obenerwähnten für die Theorie der kleinsten Quadrate wichtigen Formel.
