Записки Горного Института. Т. VII. 1926.
Annales de l'Institut des Mines à Leningrade. T. VII. 1926.

P. 1025.

К вопросу о вычислении ошибок измерения базиса усовершенствованным прибором Иедерина.

Н. Келль.

Über die Bestimmung der Fehler der Basismessung nach dem Jäderinschen Verfahren mit Hilfe der Invardrähten

von N. Kell.

Просматривая русскую литературу, главным образом, З. В. Т. О. по вопросу об измерениях базиса прибором Иедерина, пришлось установить некоторую неправильность в вычислении средней квадратичной и вероятной ошибки измерения базиса во всех статьях, касающихся измерения базисов прибором Иедерина, где, по примеру Д. Д. Гедеонова (Измерение Казалинского базиса, ч. LXIII, отд. II), вычислялись ошибки по отдельным участкам. Вычисление ошибок по всему базису мы находим в первоначальной работе Гедеонова по Термезскому и Самаркандскому базисам (ч. LXII, отд. II), затем у И. И. Селиверстова (Измерение базисов Хабарского (старого), Иманского и др., ч. LXIX, отд. II), Репьева (Измерение Кызыл-Работского базиса на Памире, там же) и др., но нигде не подчеркнуто значение систематических ошибок от неверности меры, тогда как при вычислении ошибок по участкам, непринятие во внимание постоянства некоторой части ошибки значительно преувеличивает внутреннюю точность измерения базиса, особенно разительным в этом отношении примером являются вычисления Павлодарского базиса, (Н. Д. Павлов. Измерение Павлодарского базиса. ч. LXVIII, отд. II).

Для суждения о точности измерения базиса при установившемся методе измерения мы имеем:

1) тройные отсчеты каждой проволоки на каждом пролете (интервале),

2) измерение каждого пролета несколькими проволоками взад и вперед или многократно,

3) измерение каждого участка таким же образом и

4) измерение базиса в целом каждой проволокой взад, вперед или многократно.

Так как за неизменность кольев и целиков, отделяющих один пролет от другого, нельзя совершенно поручиться, то невозможно сравнивать результаты по пункту 2.

Гедеонов остановился на вычислении погрешностей по пункту 3, т.-е. по участкам, рассматривая их только, как случайные. Основания этого вычисления можно изложить следующим образом.

Обозначим через r — число отдельных участков, через $p_1, p_2 \ldots . p_r$ — число всех односторонних измерений в каждом участке.

$k_1, k_2 \ldots . k_r$ — число пролетов в каждом участке. $[v\,v]_i$ — сумма квадратов отклонений от среднего значения длины участка i, найденная для каждого участка отдельно по всем проволокам (число слагаемых p_i).

Средняя квадратичная ошибка измерения участка в одну сторону одной проволокой из измерений отдельных участков будет:

$$\omega_i = \pm \sqrt{\frac{[v\,v]_i}{p_i - 1}}$$

с весом $= p_i - 1$, а средняя квадратическая ошибка измерения одного пролета в одну сторону одной проволокой по закону накопления случайных погрешностей выразится равенством:

$$\mu_i = \pm \sqrt{\frac{[v\,v]_i}{(p_i - 1)\,k_i}}$$

с весом $= p_i - 1$.

Отсюда общая средняя квадратическая ошибка измерения пролета одной проволокой в одну сторону, принимая во внимание измерение всего базиса, представится следующим образом:

$$m_{\text{абс.}} = \frac{\mu_1^2 (p_1 - 1) + \mu_2^2 (p_2 - 1) + \ldots . + \mu_r^2 (p_r - 1)}{(p_1 - 1) + (p_2 - 1) + \ldots . + (p_r - 1)},$$

или

$$m_{\text{абс.}} = \pm \sqrt{\left[\frac{v\,v}{k}\right] \cdot \frac{1}{[p] - n}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Зная m и применяя тот же закон накопления случайных погрешностей, получаем среднюю квадратичную ошибку конечного результата отдельного участка:

$$M_i = \pm m_{\text{абс.}} \sqrt{\frac{k_i}{p_i}}$$

и среднюю квадратичную ошибку всего базиса:

$$M_{абс.} = \pm m_{абс.} \sqrt{\left[\frac{k}{p}\right]} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Помножив M на коэффициент 0,6745, получаем вероятную ошибку окончательной длины базиса в том виде, как она дается Гедеоновым:

$$M_{вер.} = \pm 0{,}6745\, m_{абс.} \sqrt{\left[\frac{k}{p}\right]} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Если p в различных участках одинакова, то формула (2) примет вид:

$$M_{абс.} = \pm m_{абс.} \sqrt{\frac{N}{p}} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

где N — число пролетов на всем базисе.

Относительная погрешность, равная $\frac{M_{абс.}}{lN}$, где l длина пролета (проволоки), выразится формулой:

$$M_{отн.} = \pm \frac{m_{абс.}}{l} \sqrt{\frac{1}{pN}} = \pm \sqrt{\frac{m^2_{отн.}}{pN}} \quad \ldots\ldots (5)$$

Такова зависимость между средней ошибкой измерения одной проволокой в одну сторону одного пролета и ошибкой базисов, если считать эти ошибки только случайными.

На самом деле измерение каждого пролета имеет в себе не только случайную погрешность, но и систематическую, зависящую, главным образом, от ошибки эталонирования проволоки.

Обозначим случайную часть относительной ошибки измерения одного пролета одной проволокой в одну сторону просто через m, а постоянную ошибку от неверности меры через M_0, тогда общая ошибка будет:

$$\omega = \pm \sqrt{m^2 + M_0^2}.$$

Если рассматривать общую ошибку ω исключительно, как случайную, то на основании формулы (5) относительная ошибка всего базиса будет:

$$Q = \pm \sqrt{\frac{m^2 + M_0^2}{pN}} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

На самом же деле она должна быть представлена в виде:

$$M = \pm \sqrt{\frac{m^2}{pN} + \frac{M_0^2}{q}} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

где q — число проволок, которыми базис измерен.

Формула (7) получается из обычной формулы погрешности измерения длин, где случайные погрешности пропорциональны корню квадратному из длины, а систематические растут пропорционально длине (относительные остаются постоянными).

Положим, что

$$m = aM_0 \text{ и } p = nq,$$

a — численный коэффициент, n — число измерений каждой проволокой, — тогда выражения для Q и M преобразуются:

$$\left.\begin{aligned} Q &= \pm M_0 \sqrt{\frac{a^2+1}{nqN}} \\ M &= \pm M_0 \sqrt{\frac{a^2+nN}{nqN}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Отсюда отношение M к Q покажет во сколько раз преуменьшает ошибку предположение, что при измерении базиса мы имеем дело только со случайными погрешностями:

$$V = \frac{M}{Q} = \sqrt{\frac{a^2+nN}{a^2+1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Как видим, V зависит от отношения a между случайной и систематической ошибкой одного пролета, от числа измерений каждой проволокой и от числа пролетов, но не зависит от числа проволок, ибо по отношению к каждой проволоке ошибка эталонирования является также случайной.

При измерениях каждой проволокой только взад и вперед, т.-е. при $n = 2$:

$$V = \sqrt{\frac{a^2+2N}{a^2+1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Для Павлодарского базиса, у которого $N = 695$ (без малого базиса), при $a = 1$:

$$V_1 = 26$$

при $a = 10$

$$V_{10} = 4.$$

Обычно a вряд ли больше десяти, поэтому в самом лучшем случае для Павлодарского базиса мы должны ожидать преуменьшения ошибки не менее, как в 4 раза.

Среднюю погрешность отсчитывания на одном конце проволоки, включая сюда и другие случайные ошибки, можно считать не менее, как

$$\mu_1 = 0{,}1 \text{ мм.}$$

Ошибка разности двух отсчетов по двум концам:

$$\mu_2 = \sqrt{0{,}02} = 0{,}15 \text{ мм}.$$

Если брать три отсчета, как принято, то средняя случайная ошибка измерения пролета одной проволокой в одну сторону будет:

$$m_{\text{абс.}} = \sqrt{\frac{0{,}02}{3}} = 0{,}08 \text{ мм},$$

а относительная ошибка:

$$m = \frac{0{,}08}{24.000} = \frac{1}{300.000}.$$

Относительную погрешность эталонирования Н. Д. Павлов считает равной:

$$M_0 = \frac{1}{3.000.000},$$

что нужно считать преувеличенной точностью, следовательно, a не более 10.

Для выделения вообще всех случайных погрешностей единственно правильным является исходить из измерений вперед и назад или многократных каждой проволокой отдельно по всему базису.

Для суждения о систематических ошибках необходимо сравнение измерений различными проволоками.

На основании этого абсолютная случайная ошибка измерения всего базиса выразится следующей формулой:

$$E_{\text{абс.}} = \pm \frac{1}{q} \sqrt{\frac{[\Delta D \,.\, \Delta D]}{n(n-1)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11),$$

где n — число измерений каждой проволокой.

$[\Delta D \,.\, \Delta D]$ — сумма квадратов отклонений каждого из n измерений отдельными проволоками от своего арифмет. среднего, взятая по всем q проволокам; таким образом в эту сумму входит слагаемых q групп по n в каждой группе.

q — число проволок.

Общая абсолютная ошибка всего базиса должна вычисляться по формуле:

$$M_{\text{абс.}} = \pm \sqrt{\frac{[\Delta\,\Delta]}{q(q-1)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12),$$

где $[\Delta\Delta]$ — сумма квадратов отклонений средних длин базиса по каждой проволоке от арифмет. среднего этих длин.

По (11) и (12) получаем систематическую ошибку.

$$P_{\text{абс.}} = \sqrt{M^2_{\text{абс.}} - E^2_{\text{абс.}}} \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

Из случайных ошибок можно выделить еще ошибку отсчитывания, если исходить из разностей тройных отсчетов на концах проволок, а именно, следующим образом:

Средняя ошибка отсчитывания при одном отложении проволоки для отдельных пролетов будет:

$$t_i = \pm\sqrt{\frac{[\delta\,\delta]_i}{3(3-1)}} = \pm\sqrt{\frac{[\delta\,\delta]_i}{6}},$$

или при другом числе s отсчетов

$$t_i = \sqrt{\frac{[\delta\,\delta]_i}{s(s-1)}}.$$

Средняя ошибка отсчитывания одного пролета из всего базиса —

$$\Pi = \sqrt{\frac{[t\,t]}{p\,N}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

(p и N имеют прежние значения).

Веса различных t нужно считать одинаковыми, так как увеличение для отдельных пролетов числа отсчетов s сверх трех вызывается значительной расходимостью отдельных разностей отсчетов по концам проволоки и служит для того, чтобы сделать точность измерения пролетов одинаковой.

Если p для различных участков неодинаково, то $p\,N$ заменяется суммой

$$p_1 k_1 + p_2 k_2 + \ldots + p_r k_r,$$

где

$$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots\ldots k_r = N,$$

и тогда получится:

$$\Pi = \pm\sqrt{\frac{[t\,t]}{[p\,k]}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Средняя же погрешность отсчитывания (абсолютная) для всего базиса будет:

$$T_{\text{абс.}} = \pm\sqrt{\frac{[t\,t]}{[p\,k]} \cdot \left[\frac{k}{p}\right]} \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

или при одинаковых p:

$$T_{\text{абс.}} = \pm \sqrt{\frac{[tt]}{pN} \cdot \frac{N}{p}} = \pm \frac{1}{p} \sqrt{[tt]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Относительная погрешность отсчитывания для всего базиса отсюда получится:

$$T_{\text{отн.}} = \pm \frac{1}{pNl} \sqrt{[tt]} \text{ или } = \pm \frac{1}{[pk]\,l} \sqrt{[tt]} \text{ [1)]} \quad . \quad . \quad . \quad (18),$$

где l — средняя длина пролета (длина проволоки).

Сравнивая $E_{\text{абс.}}$ с $T_{\text{абс.}}$ по формулам (11) и (17) можно судить, как велики другие случайные ошибки помимо ошибок отсчитывания.

Формулы (11), (12) и (13) могут быть применены и для отдельных участков, если они имеют различные n, q или $p = nq$, и затем результаты, найденные по этим формулам, суммированы с соответствующими весами для всего базиса.

Здесь нужно оговориться, что величины $E_{\text{абс.}}$ по (11) и $M_{\text{абс.}}$ по (12) получаются не с одинаковой долей вероятности. При небольшом числе q проволок в величине $M_{\text{абс.}}$ могут быть случайности, дающие в результате или преувеличенную, или преуменьшенную общую точность базиса; тогда как E всегда дает более близкую к действительной величину случайной погрешности; для нее всякие благоприятные и неблагоприятные случайности при большом числе N пролетов не могут иметь заметного влияния. В зависимости от M и систематическая ошибка P при малом числе проволок получается также мало надежной.

Для примера по приведенным формулам перечислим размеры ошибок Павлодарского базиса (З. В. Т. О., ч. LXVIII, отд. II), не принимая участка малого базиса, измеренного 6-ю проволоками по несколько раз.

Для всего базиса $n = 2$; $q = 2$ и $p = 2 \times 2 = 4$.

Число пролетов без малого базиса $N = 695$.

Проволока № 132

Вперед	695 пров.	+ 39,466,89 мм
Назад	695 „	+ 39.471,92 „
Разность:	$D_{1_н} - D_{1_в} =$	5,03 „
Средняя длина	$D_1 =$	16.720.213,75 „

[1)] T еще можно вывести на основании сравнения разностей отсчетов по различным проволокам в различных пролетах, ибо разности длин проволок можно считать постоянными.

Проволока № 133

Вперед	695 пров.	$+39.347{,}56$ *мм*
Назад	695 „	$+39.356{,}31$ „
Разность:	$D_{2_н} - D_{2_в}$	$= +8{,}75$ „
Средняя длина	D_2	$= 16.720.271{,}43$ „

$$D_2 - D_1 = \mathbf{57{,}68}\ мм.$$

Окончательная длина базиса $D = 16720242{,}59$ *мм*; вычислениями по участкам получено $D = 16720242{,}57$ *мм*.

Значит, в приведенных выше подсчетах не должно быть ошибки. По формуле (11)

$$E = \pm\frac{1}{4}\sqrt{(5{,}03)^2 + (8{,}75)^2} = \pm 2{,}5\ мм.$$

По формуле (12)

$$M = \pm\frac{1}{2} \cdot 57{,}68 = \pm 28{,}84\ мм.$$

По формуле (13)

$$P = \pm\sqrt{(28{,}84)^2 - (2{,}5)^2} = \pm 28{,}7\ мм.$$

Отсюда относительные погрешности:

	Средние	Вероятные
Систематическая	$\frac{1}{585.000}$	$\frac{1}{880.000}$
Случайная	$\frac{1}{6.500.000}$	$\frac{1}{9.750.000}$
Общая	$\frac{1}{580.000}$	$\frac{1}{870{,}000}$
У Н. Д. Павлова общая получилась	—	$\frac{1}{17.850.000}$

Настолько значительно расхождение — почти в 20 раз.

Из случайной ошибки E по формуле (4) обратно можно вычислить $m_{абс.}$ — случайную ошибку одного пролета одной проволокой в одну сторону

$$m_{абс.} = \pm E\sqrt{\frac{p}{N}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Для Павлодарского базиса это $m = \frac{5}{\sqrt{695}} = 0{,}19\ мм.$

Отсюда относительная случайная погрешность измерения одного пролета одной проволокой в одну сторону получается:

$$m = \frac{0{,}19}{24.000} = \frac{1}{126.000}.$$

Для систематической ошибки мы получаем слишком большую величину по формуле

$$M_0 = P\sqrt{q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20),$$

а именно, $M_0 = \frac{1}{410.000}$, отсюда $a = 3{,}3$, $V = 11$ по формуле (10).

По двум проволокам получаются, конечно, недостаточные данные для суждения о постоянных ошибках эталонирования.

Возвращаясь к формуле (7), легко в ней заметить, что второе слагаемое при значительной длине базиса является доминирующим. Поэтому, чтобы его уменьшить, нужно увеличить q, т.-е. взять все проволоки, имеющиеся в распоряжении. Лучше измерить 6-ю проволоками один раз [1]), чем тремя два раза и т. д. При этом нельзя не упомянуть о том, что все проволоки, проэталонированные на одном компараторе, всегда имеют некоторую постоянную по знаку и даже по величине часть ошибки эталонирования, которая зависит от неправильности нормальной меры, ошибок термометров, устройства компаратора, метода эталонирования и т. п. Чтобы обнаружить и исключить и эти постоянные ошибки, можно рекомендовать устроить базис — компаратор средней длины, как предлагает А. С. Васильев, на котором все, имеющие свои проволоки и компараторы, проверяли бы свои эталонирования. Кроме того, если в данном районе нужно измерить два базиса, друг друга поверяющих, то полезно измерение одного поручить одним, а измерение другого — другим, имеющим свой компаратор и свои проволоки; например, Омский, Иркутский отделы взаимно измеряют друг у друга контрольные базисы.

Вопрос об ошибках в этой заметке, конечно, не исчерпан. Выделена только главнейшая ошибка из постоянных, и указана важность этого выделения для правильного суждения о точности измерения базиса прибором Иедерина. Главной постоянной ошибкой является ошибка в данной длине проволоки. Другие ошибки: от неправильного учета температуры, наклона, от уклонения проволоки от оси базиса являются ничтожными.

Можно еще предполагать ошибки от перемещения целиков, иголок вместе со штативами или кольями и независимо от перемещения последних и другие еще неизвестные ошибки, главным образом, случайные.

Выделение ошибок отсчитывания по формулам (14) — (18) может помочь разобраться в значениях различных ошибок, к сожалению, ни в одном из описаний измерений базисов не приводятся журнальные записи отсчетов, а даются только средние из нескольких разностей.

---

[1]) Тремя вперед, тремя другими назад.

Во всяком случае имеющийся материал показывает: 1) уменьшение относительной погрешности с увеличением длины базиса для одной проволоки, 2) хорошее согласие результатов из измерений взад и вперед одной проволокой, что дает основание не искать иной систематической ошибки, кроме ошибок эталонирования проволок.

Отсутствие систематических ошибок в самом процессе измерения составляет главное достоинство метода измерения инварными проволоками значительной длины.

18 марта 1924 г.

Zusammenfassung.

Bei der Durchsicht der russischen Literatur, hauptsächlich der Notizen der Militär-Topographischen Abteilung (Sapiski Woienno-Topografitscheskogo Otdiela), bezüglich der Basismessungen nach dem Jäderinschen Verfahren, wurde eine gewisse Unrichtigkeit in der Berechnung des mittleren und wahrscheinlichen Fehlers der Basismessung festgestellt.

Nach dem Beispiele des Geodäsisten Gedeonoff wirg der Fehler der ganzen Basis nach den Fehlern der Einzelelemente der Basis berechnet, die mit mehreren Drähten, vorwärts und rückwärts, an einem Tage gemessen wurden. Dabei blieb die Zusammenwirkung unregelmässiger und regelmässiger Fehler unbeachtet. Dies ergab eine übergrosse Messungsgenauigkeit und verdeckte den Einfluss des Prüfungsfehlers (Aichungsfehlers) der Drähte, der bei den Basismessungen als regelmässiger, konstanter Fehler auftritt.

Es ist jedoch möglich den unregelmässigen Teil der Gesammtfehlers zu ermitteln, indem man die Ablesungsfehler eines Standortes (Messungintervalles) und ihr Fortpflanzungsgesetz in Betracht zieht.

Die nach diesem Gesichtspunkte ausgeführte Basismessung bei Pawlodar ergab anstatt des von Pawloff angegebenen relativen Gesammtfehlers von $\frac{1}{17.850.000}$, folgende Fehler:

der regelmässige Fehler $\frac{1}{585.000}$

„ unregelmässige „ $\frac{1}{6.500.000}$

„ Gesammtfehler $\frac{1}{580.000}$
