IX. Я. Шохатъ. По поводу одной задачи Коркина-Золотарева.

Въ статьѣ: «Sur un certain minimum» (Nouvelles Annales de Mathematiques, 2-me série, T. XII 1873) Коркинъ и Золотаревъ рѣшаютъ слѣдующую задачу: Среди всѣхъ полиномовъ вида

$$(1) \ldots\ldots f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_n$$

найти тотъ, для котораго интегралъ

$$(2) \ldots\ldots \int_{-1}^{+1} [f(x)]\, dx$$

былъ minimum.

Авторы устанавливаютъ, что искомые полиномы имѣютъ n корней въ интервалѣ $(-1, +1)$ и выводятъ рядъ уравненій, которымъ эти корни удовлетворяютъ; изъ анализа этихъ уравненій выводится ими единственность рѣшенія задачи.

Въ настоящей замѣткѣ предлагается болѣе простое доказательство единственности рѣшенія, требующее знанія только ч и с л а корней искомыхъ полиномовъ въ интервалѣ $(-1, +1)$. Пріемъ доказательства можетъ съ успѣхомъ примѣняться во многихъ аналогичныхъ вопросахъ и болѣе общаго характера.

Допустимъ существованіе д в у х ъ искомыхъ полиномовъ (1) $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Обозначая minimum (2) черезъ L, имѣемъ:

$$(3) \ldots\ldots L = \int_{-1}^{+1} [f_1(x)]\, dx = \int_{-1}^{+1} [f_2(x)]\, dx.$$

Выбираемъ 2 числа p и q подъ условіемъ:

$$(4) \ldots\ldots p > 0,\ q > 0,\ p + q = 1,$$

и строимъ полиномъ $F(x) = pf_1(x) + qf_2(x)$. Онъ требуемаго вида (1) и притомъ

$$(5) \int_{-1}^{+1} [F(x)]\, dx \leqq \int_{-1}^{+1} p\,[f_1(x)]\, dx + \int_{-1}^{+1} q\,[f_2(x)]\, dx = L$$

Но $f_1(x)$ и $f_2(x)$ даютъ по условію рѣшеніе задачи. Поэтому при всякихъ p и q, удовлетворяющихъ (3), должно имѣть:

$$(5) \int_{-1}^{+1} \{[pf_1(x) + qf_2(x)]\} = dx \int_{-1}^{+1} \{p\,[f_1(x)] + q\,[f_2(x)]\}\, dx.$$

Но (5) возможно лишь при условіи:

(6) . . . . . $f_1(x) f_2(x) \geqslant 0$ во всемъ интервалѣ $(-1, +1)$.

Дѣйствительно, допустивъ существованіе интервала (α, β) такого, что въ немъ $f_1(x) f_2(x) < 0$ $(-1 \leqq \alpha < \beta \leqq +1)$ мы имѣли бы:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \{[pf_1(x) + qf_2(x)]\}\, dx < \int_{\alpha}^{\beta} \{p\,[f_1(x)]\, f_2(x)]\}\, dx.$$

что противорѣчитъ (5).

Полиномы $f_1(x)$ и $f_2(x)$ по доказанному Коркинымъ — Золотаревымъ имѣютъ каждый n корней въ интервалѣ $(-1, +1)$. Условіе (6) показываетъ, что всѣ корни для обоихъ полиномовъ общіе. Но тогда полиномъ n--1-ой (или низшей) степени $\varphi(x) = f_1(x) - f_2(x)$ имѣетъ n корней въ томъ же интервалѣ, т. е.

$\varphi(x) \equiv 0$, слѣд. $f_1(x) \equiv f_2(x)$ и т. д.

24 марта 1916.