V. Его-же. Символъ плоскости, проходящей чрезъ три атома.

По сущности основного закона кристаллохиміи положеніе каждаго отдѣльнаго атома выражается въ координатахъ $\frac{a_0'}{b_0'}$, $\frac{a_1'}{b_1'}$, $\frac{a_2'}{b_2'}$, гдѣ какъ числители, такъ и знаменатели цѣлыя числа, и притомъ знаменатели непремѣнно числа, большія чѣмъ числители, если точки находятся внутри элементарнаго параллелоэдра или на его поверхности.

Приведя эти дроби къ общему знаменателю и принявъ послѣдній за четвертое число раціональнаго отношенія, мы для координатъ любого атома получимъ выраженіе $a_0 : a_1 : a_2 : a_3$, гдѣ a_3 больше каждаго изъ первыхъ трехъ чиселъ; Слѣдовательно, по существу этотъ символъ не отличается отъ трехъ чиселъ: $x_0 = \frac{a_0}{a_3}$, $x_1 = \frac{a_1}{a_3}$ и $x_2 = \frac{a_2}{a_3}$.

Если даны двѣ точки (a) и (b), то, перенося начало координатъ въ первую изъ нихъ, для нея получимъ координаты (000), а для второй $x_0 = \frac{b_0}{b_3} - \frac{a_0}{a_3}$, $x_1 = \frac{b_1}{b_3} - \frac{a_1}{a_3}$, $x_2 = \frac{b_2}{b_3} - \frac{a_2}{a_3}$; отношеніе этихъ координатъ $(a_3b_0 - b_3a_0) : (a_3b_1 - b_3a_1) : (a_3b_2 - b_3a_2) = \begin{vmatrix} a_3b_3 \\ a_0b_0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3b_3 \\ a_1b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3b_3 \\ a_2b_2 \end{vmatrix}$ означивъ, ради краткости, эти числа $[b_0]$, $[b_1]$, $[b_2]$, получимъ прямую $x_0 : x_1 : x_2 = [b_0] : [b_1] : [b_2]$, и кристаллографическій символъ этой прямой есть $[b_0\ b_1\ b_2]$.

Если дана еще третья точка (c), то такими же операціями придемъ къ кристаллографическому символу прямой (ac) то есть $[c_0\ c_1\ c_2]$, а отсюда кристаллографическій символъ плоскости, проходящей чрезъ эти точки, получится $\begin{vmatrix} [b_0\ b_1\ b_2] \\ [c_0\ c_1\ c_2] \end{vmatrix}$ то есть, по развертываніи сокращенныхъ выраженій, получаемъ окончательно $p_0 : p_1 : p_2 =$

$$= \begin{vmatrix} a_3\ a_1\ a_2 \\ b_3\ b_1\ b_2 \\ c_3\ c_1\ c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0\ a_3\ a_2 \\ b_0\ b_3\ b_2 \\ c_0\ c_3\ c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0\ a_1\ a_3 \\ b_0\ b_1\ b_3 \\ c_0\ c_1\ c_3 \end{vmatrix} \quad \ldots (A)$$

Такъ просто и изящно выраженіе символа грани, опредѣляемой положеніемъ трехъ атомовъ.

Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ.

Въ сфалеритѣ двумъ атомамъ Zn можно придать символы (0102) и (0012), а атому S $(\bar{1}114)$. Этими тремя точками опредѣляется плоскость

$$\begin{vmatrix} 210 \\ 201 \\ 411 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 020 \\ 021 \\ \bar{1}41 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 012 \\ 0\ 2 \\ \bar{1}14 \end{vmatrix} = (011).$$

По тремъ атомамъ S $(\bar{1}114)$, $(1\bar{1}14)$ и $(11\bar{1}4)$ опредѣляется

$$\text{плоскость} \quad \begin{vmatrix} 411 \\ 4\bar{1}1 \\ 41\bar{1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \bar{1}41 \\ 141 \\ 14\bar{1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \bar{1}14 \\ 1\bar{1}4 \\ 114 \end{vmatrix} = (111).$$

Въ нашатырѣ по двумъ атомамъ Cl (1112), $(\bar{1}\bar{1}12)$ и атому N (0001) опредѣляется плоскость

$$\begin{vmatrix} 211 \\ 2\bar{1}1 \\ 100 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 121 \\ \bar{1}21 \\ 010 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 112 \\ \bar{1}\bar{1}2 \\ 001 \end{vmatrix} = (1\bar{1}0),$$

въ которой находятся и атомы H.

Но если возьмемъ два атома Cl $(\bar{1}\bar{1}12)$, $(1\bar{1}12)$ и атомъ H (1114), то получимъ плоскость

$$\begin{vmatrix} 211 \\ 2\bar{1}1 \\ 411 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \bar{1}21 \\ 121 \\ 141 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \bar{1}12 \\ 1\bar{1}2 \\ 114 \end{vmatrix} = (112).$$

Впрочемъ, нельзя не оговорить, что не всегда начало координатъ опредѣляется вполнѣ однозначно. Это связано съ положеніемъ элементарнаго параллелоэдра въ системѣ.

Въ простѣйшемъ случаѣ кристалловъ мѣди мы можемъ принять атомъ Cu въ центрѣ ромбическаго додекаэдра, но также можемъ принять его и во всѣхъ тетрагональныхъ вершинахъ. Этимъ различнымъ точкамъ во всей системѣ точекъ принадлежитъ одна и та же роль (полныхъ центровъ симметріи).

Такъ въ случаѣ сфалерита мы можемъ атомы Zn от-

нести къ всѣмъ тетрагональнымъ, а атомы S къ четыремъ тригональнымъ вершинамъ (или наоборотъ) или же помѣстить въ центрѣ тотъ или другой изъ этихъ атомовъ.

Но въ общемъ, кромѣ такихъ простѣйшихъ случаевъ выборъ системы координатъ весьма ограниченъ, особенно если имѣть въ виду два ограничивающія условія: 1) чтобы *положеніе основного параллелоэдра соотвѣтствовало имѣющимся* въ системѣ элементамъ симметріи и 2) чтобы система координатъ соотвѣтствовала той, которая принята для разсматриваемой правильной системы точекъ, потому, что иначе эти уравненія и не примѣнимы.

Въ частности, для симморфныхъ и гемисимморфныхъ системамъ за начала координатъ необходимо брать центры полной симметріи (то есть точки, въ которыхъ пересѣкаются всѣ оси симметріи).

Приведенное же уравненіе A) конечно сохраняетъ всегда свое значеніе, независимо отъ выбора системы кординатъ.

По отношенію къ системамъ гипогексагональнаго типа можно поступить различно.

Во первыхъ можно пользоваться тою же формулою, сначала примѣняя къ системѣ правила кубическаго типа и принимая за кристаллографическія оси тѣ три діагонали гексагональной призмы (тетрапараллелоэдра, какъ основного для такихъ системъ), которыя проходятъ чрезъ чередующіяся чрезъ одну вершины параллелоэдра (въ идеальномъ случаѣ эти три оси взаимно перпендикулярны).

По соотвѣтствующимъ символамъ атомовъ и этой формулѣ мы вычисляемъ индексы символа проходящей чрезъ нихъ плоскости, а затѣмъ преобразуемъ по детерминанту

$$\begin{vmatrix} 111 \\ 1\bar{2}1 \\ \bar{1}\bar{1}2 \end{vmatrix}.$$

Получаются три первые (изъ четырехъ) индекса гипогексагональнаго типа.

Къ тому же преобразованію мы придемъ, если перемѣнимъ кристаллографическія оси, замѣнивъ три раньше взятыя осями 1) [111], 2) [$1\bar{2}1$], 3) [$\bar{1}\bar{1}2$] и 4) [$\bar{2}11$].

По координатамъ одной изъ данныхъ точекъ и индексамъ кубическаго символа плоскости получимъ уравненія послѣдней, а въ пересѣченіи ея съ осями 1). 4) получимъ четыре точки и ихъ координаты; замѣнивъ ихъ обратными величинами, мы и получаемъ числа, прямо пропорціональныя индексамъ гипогексагональнаго символа.

Но въ сущности этотъ пріемъ слишкомъ сложенъ и требуетъ ряда промежуточныхъ операцій. Непосредственнымъ будетъ слѣдующій.

Въ замѣткѣ «Построеніе реберъ по символамъ въ кристаллахъ гипогексагональнаго типа» [1]) было объяснено, какъ составлять векторъ по данному ребру изъ четырехъ векторовъ по кристаллографическимъ осямъ, а въ замѣткѣ *Д. Н. Артемьева* «Соотношенія между символами граней и реберъ въ кристаллахъ гипогексагональнаго типа» [2]) было объяснено, какъ находить символъ грани по символамъ двухъ реберъ.

И вотъ, пользуясь этими результатами, мы по символамъ трехъ точекъ, легко уже непосредственно можемъ получить символъ проходящей чрезъ нихъ грани.

Мы принимаемъ за три послѣднія кристаллографическія оси перпендикуляры къ гранямъ шестиугольника сѣченія и считаемъ за координаты точки числа, пропорціональныя индексамъ радіуса-вектора, проходящаго чрезъ данную точку. Если координаты двухъ точекъ (P_0 P_1 P_2 P_3) и (P'_0 P'_1 P'_2 P'_3), то переносимъ начало координатъ въ первую точку, и тогда для второй получаемъ (P'_0-P_0, P'_1-P_1, P'_2-P_2, P'_3-P_3) = [r_0 r_1 r_2 r_3]; въ этомъ случаѣ координаты точки, *такъ понимаемыя*, пропорціональны индексамъ символа ребра, а по двумъ такимъ символамъ и формулѣ *Артемьева* прямо получаемъ символъ грани, что и требовалось.

Напр. для кварца [3]) кристаллографическія оси параллельны двойнымъ осямъ симметріи и какъ координаты атомовъ O (принимая центръ въ атомѣ Si) получимъ $\left(\frac{2}{3}\,\frac{1}{3}\,O\,\frac{\bar{1}}{3}\right)$ = [210$\bar{1}$3] и $\left(\frac{2}{3}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\,O\right)$ = [21103]. Ясно, что для символовъ точекъ атомовъ мы получаемъ теперь уже 5 индексовъ; но при рѣшеніи данной задачи пятый индексъ не играетъ никакой роли.

Отсюда символъ грани, проходящей чрезъ центръ и эти двѣ точки, по формулѣ *Артемьева* будетъ:

$$\frac{3}{2}r_0 : r_1 : r_2 : r_3 = \begin{vmatrix} 1111 \\ 01\bar{1}1 \\ 21\bar{0}1 \\ 2110 \end{vmatrix} = 3 : \bar{4} : \bar{2} : 2 \text{ то есть } [r_0 : r_1 : r_2 : r_3] = [1\bar{2}\bar{1}1].$$

3 февраля 1916 г.

---

[1]) Эти Записки IV 321. Въ этой замѣткѣ пропущенъ выводъ: если векторы по второй и третьей оси r_1 и r_2, то векторы по всѣмъ тремъ осямъ $2r_1 + r_2$, $r_1 + 2r_2$, $r_2 - r_1$; напр. если $r_1 = 1$ и $r_2 = 2$, то всѣ три вектора (451), если $r_1 = 3$, $r_2 = 2$, то три вектора (8, 7, $\bar{1}$); если $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, то всѣ векторы (121); если $r_1 = 1$, $r_2 = 0$, то всѣ векторы (2$\bar{1}$1) и т. д.

[2]) Эти Записки V 234.

[3]) Расположеніе атомовъ въ кварцѣ принимается то, которое показано на фиг. 2 статьи «Основной законъ кристаллохиміи» (Извѣстія И. Академіи наукъ 1916 стр. 443).

[4]) Эти $^2/_3$ получаются потому, что, какъ объяснено въ замѣткѣ о построеніи реберъ по символамъ, для вертикальной оси и реберъ за 1-цу нужно принять $^3/_2$.