III. Его-же. Тройственность установки тригоналоидныхъ кристалловъ.

Эта тема была уже исчерпана въ моихъ прежнихъ работахъ и здѣсь я имѣю въ виду ограничиться лишь, какъ мнѣ кажется, болѣе простымъ выводомъ, употребляемымъ мною на лекціяхъ.

Разсмотримъ обыкновенную кубическую рѣшетку, которую мы можемъ съ одинаковымъ правомъ выразить какъ символомъ $5\overset{4h}{4}\cdot$, такъ и символомъ $5\overset{3h}{4}\cdot$; различіе въ символахъ въ данномъ случаѣ сводится къ различію въ представляемой оріентировкѣ: въ первомъ случаѣ вертикальною представляется ось [001], во второмъ—ось [111].

Прибавимъ мысленно къ точкамъ пространственной рѣшетки еще точки въ центрахъ кубовъ; такъ какъ прибавленная точка относится къ вертикальнымъ рядамъ точекъ пространственной рѣшетки во второмъ положеніи, то мы сейчасъ же замѣчаемъ двойственность толкованія полученной рѣшетки.

Во первыхъ, прибавленіе такихъ точекъ знаменуетъ переходъ отъ гексаэдрической структуры къ октаэдрической то есть переходу отъ $5\overset{3h}{4}\cdot$ къ $5\overset{30}{4}\cdot$; во вторыхъ вторая пространственная рѣшетка можетъ быть получена изъ первой сжатіемъ по направленію вертикальному ровно вдвое и тогда очевидно, что гексаэдрическая структура какъ бы сохраняется, но комплексъ становится отрицательнымъ, а именно главное число пріобрѣтаетъ величину $35.\overset{3h}{}$ ($\operatorname{tang} 54^\circ = 2 \operatorname{tang} 35.^\circ$).

Итакъ, символы $5\overset{30}{4}\cdot$ и $35.\overset{3h}{}$ выражаютъ одно и то же. При этомъ мы можемъ существенно сохранить ту же діаграмму, но въ ея точкахъ перемѣнить символы, напр. по детерминанту $\begin{vmatrix} \bar{1}11 \\ 1\bar{1}1 \\ 11\bar{1} \end{vmatrix}$. Въ частности, получимъ слѣдующую перемѣну индексовъ:

старымъ	100	110	$1\bar{1}0$	111	$11\bar{1}$	. . .
соотвѣтствуютъ новые	$\bar{1}11$	001	$\bar{1}10$	111	$\bar{1}1\bar{3}$	. . .

Теперь, исходя изъ символа $35.\overset{3h}{}$ измѣнимъ пространственную рѣшетку въ обратномъ смыслѣ то есть какъ бы растянемъ ее ровно вдвое; тогда очевидно, что мы возвращаемся къ первоначальной кубической рѣшеткѣ, выражаемой символомъ $5\overset{3h}{4}\cdot$.

Но такъ какъ до этого измѣненія рѣшетка могла разсматриваться какъ $5\overset{30}{4}\cdot$ и значитъ плотности съ двумя нечетными индексами должны были увеличиваться вдвое (квадраты плотности вчетверо), то послѣ измѣненія намъ эти плотности нужно уменьшить вдвое, то есть все равно, что увеличить всѣ остальныя вдвое кромѣ тѣхъ, въ составъ которыхъ входили два нечетные индекса, а сейчасъ легко доказать, что всѣ эти остальныя формы есть именные тѣ, которыя въ новыхъ символахъ выражаются тремя нечетными индексами, какъ это имѣетъ мѣсто въ додекаэдрической структурѣ.

Будемъ означать нечетные индексы буквою h, а четные—буквою r.

Тогда увидимъ, что гранямъ, выражаемымъ старыми индексами (h_1, h_2, h_3), равно какъ и тѣмъ, которыя выражаются (h, r_1, r_2) одинаково будутъ соотвѣтствовать новые символы съ тремя нечетными индексами; гранямъ же (h_1, h_2, r) могутъ соотвѣтствовать различные символы, но только не съ тремя нечетными.

Чтобы сдѣлать это яснымъ, замѣнимъ букву h выраженіемъ $2p+1$, гдѣ p какое-нибудь цѣлое число.

Получаемъ (для h_1 h_2 r согласно детерминанту):

$$(-2p_1-1+2p_2+1+r;\ 2p_1+1-2p_2-1+r;$$

$$2p_1+1+2p_2+1-r)=(-2p_1+2p_2+r;2p_1-2p_2+r;2p_1+2p_2+2-r).$$

Сокративъ на 2, получимъ $(-p_1+p_2+p_3,\ p_1-p_2+p_3\ p_1+p_2+1-p_3)$.

Это выраженіе и служитъ доказательствомъ сдѣланнаго утвержденія: если сумма $p_1+p_2+p_3$ есть число нечетное, то получимъ (hhr); если же эта сумма даетъ число четное, то получимъ (rrh), но ни въ какомъ случаѣ не (hhh).

Итакъ, символы $35.\overset{3d}{}$ выражаетъ совершенно то же самое, что $5\overset{3h}{4}\cdot$.

Изъ этой тройственности мы и выводимъ необходимость ограниченія для главныхъ чиселъ символа комплекса то есть, что для октаэдрической структуры нельзя принимать число, большее чѣмъ $63^1/_2{}^\circ$, для гексаэдрической можно принимать лишь числа въ предѣлахъ $45^\circ - 63^1/_2{}^\circ$, а для додекаэдрической только числа бо́льшія чѣмъ 45°.

5 ноября 191[illegible] г.