Краткія сообщенія.

I. Е. С. Федоровъ. Формула Сезаро и полярно-зоноэдрическая.

Въ только что появившемся выпускѣ (№ 81) журнала The mineralogical magazine (September 1915) помѣщена замѣтка G. Césaro Sur une propriété numérique de l'ensemble des axes de symétrie situés dans les plans de symétrie d'un polyédre авторъ выводитъ слѣдующую формулу[1]):

$S(S-1) = Pp(p-1) + Qq(q-1) + Rr(r-1) = E$, откуда $(2S-1)^2 = 4E+1$, гдѣ S — число плоскостей симметріи, проходящихъ чрезъ оси симметріи наименованія p, q, r, число которыхъ соотвѣтственно P, Q, R.

Изъ самого заглавія статьи видно, что автора заинтересовало не примѣненіе формулы для опредѣленія плоскостей симметріи, *которое весьма ограничено*, такъ какъ относится только къ случаямъ, когда плоскости симметріи проходятъ чрезъ всѣ оси симметріи (то есть только къ зеркальнымъ видамъ симметріи, когда симметричныя фигуры могутъ быть воспроизведены въ гоноэдрическихъ зеркалахъ), а сама формула съ ея численными соотношеніями.

Напр. примѣнимъ ее къ додекаэдро-икосаэдрическому виду симметріи.

Въ этомъ случаѣ 6 пятерныхъ, 10 тройныхъ и 15 двойныхъ осей симметріи; слѣдовательно $E = 6 \cdot 5 \cdot 4 + 10 \cdot 3 \cdot 2 + 15 \cdot 2 \cdot 1 = 210$, $4E+1 = 841 = 29^2$, а отсюда $S = \frac{1}{2}(29+1) = 15$.

Въ случаѣ дитригонально-пирамидальнаго вида симметріи $E = 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$, $4E+1 = 25 = 5^2$ и $S = \frac{1}{2}(5+1) = 3$.

Но авторъ совершенно не зналъ, что эта именно формула была выведена авторомъ для весьма широкаго примѣненія для зоноэдровъ (и въ этомъ смыслѣ названа зоноэдрическою) и парногранниковъ (и тогда называется полярнозоноэдрическою) это сдѣлано въ „Началахъ ученія о фигурахъ“[2]) (Записки И. Минерал. Общ. XIX стр. 205 сл.) и потому характеризуетъ собственно не систему осей симметріи, а свойства упомянутыхъ многогранниковъ.

Въ первомъ смыслѣ S выражаетъ число поясовъ, а p, q, r... наименованіе граней (для четырехугольниковъ съ двумя парами сторонъ—$p = 2$, для шестиугольниковъ $p = 3$ и т. д.), P, Q, R . . . соотвѣтственныя числа паръ граней.

Напр. въ ромбическомъ додекаэдрѣ грани только четырехугольники и ихъ 6 паръ, а потому $p(p-1) = 6 \cdot 2 \cdot 1$, откуда $p = 4$.

Въ немъ дѣйствительно имѣются оси симметріи; но подвергнемъ его гомогенной деформаціи (сдвигомъ и растяженіямъ) и все таки многогранникъ (представляющій напр. комбинаціи пинакоидовъ триклиннаго кристалла изъ граней, символы которыхъ выражаются двумя единицами и нулемъ) и отъ осей симметріи не остается и слѣда, а формула сохраняетъ свое значеніе, пока многогранникъ остается зоноэдромъ.

---

[1]) Выводъ конечно весьма простъ. Если проведемъ одну плоскость симметріи чрезъ оси симметріи p, q, r, то по формулѣ Браве прямо выводятся всѣ плоскости симметріи, а именно

$$S - 1 = P(p-1) + Q(q-1) + R(r-1)$$

Распространивъ ее на всѣ плоскости симметріи и принявъ во вниманіе, что числа p, q и r и есть тѣ числа плоскостей симметріи, которыя пересѣкаются въ соотвѣтственныхъ осяхъ симметріи, суммированіемъ прямо получаемъ эту формулу.

[2]) То есть еще до 1880 г.

Во второмъ смыслѣ S выражаетъ число паръ граней, а p, q, r . . наименованіе поясовъ, составляемыхъ этими гранями, P, Q, R . . соотвѣтственныя числа этихъ поясовъ. Въ этомъ смыслѣ формула примѣнима ко всѣмъ вообще кристаллическимъ (и не кристаллическимъ) многогранникамъ, лишь бы они обладали центромъ обратнаго равенства.

Такъ какъ «Начало ученія о фигурахъ», по изложенію, написано для лицъ, нетолько не знакомыхъ съ элементами кристаллографіи, но вообще предполагается знакомство только съ обыкновеннымъ курсомъ элементарной геометріи, то для вывода формулъ пришлось удѣлить больше мѣста, чѣмъ это *по существу необходимо*.

Теперь я воспользуюсь случаемъ, чтобы воспроизвести сдѣланные тамъ выводы кратчайшимъ путемъ.

Начнемъ съ парногранника изъ четырехъ паръ параллельныхъ граней, которыя изобразимъ въ граммастереографической проекціи. Получаемъ на сферѣ четыре произвольныя дуги большаго круга[3]). Кристаллографически мы можемъ имъ приписать символы, состоящія только изъ 1-цъ. На діаграммѣ получимъ шесть паръ точекъ пересѣченія и въ каждой точкѣ пересѣкается двѣ дуги круга. Это соотвѣтствуетъ шести четырехграннымъ поясамъ.

По полярнозоноэдрической формулѣ $f \cdot (f-1) = 4 \cdot 3 = 6p_2 = 6 \cdot 2 \cdot 1$.

Ту же діаграмму примемъ за гномостереографическую проекцію. Дуги большого круга выражаютъ пояса, а точки—грани (полный четырехугольникъ на сферѣ).

По зоноэдрической формулѣ $p(p-1) = 4 \cdot 3 = 6f_2 = 6 \cdot 2 \cdot 1$. Эта діаграмма уже выразитъ 12-гранникъ (напр. ромбическій додекаэдръ), а именно зоноэдръ съ четырехугольными гранями, а кристаллографически грани выразятся символами изъ двухъ 1-цъ и нуля.

Изобразимъ этотъ же зоноэдръ снова въ граммастереографической проекціи.

Теперь уже получится шесть дугъ большого круга, изъ коихъ въ восьми точкахъ пересѣкаются по три дуги, а въ шести точкахъ по четыре дуги.

По полярнозоноэдрической формулѣ $f(f-1) = 6 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1$, такъ какъ теперь имѣется 4 шестигранные и 3 четырехгранные пояса.

Примемъ ту же діаграмму за гномостереографическую проекцію. Тогда по зоноэдрической формулѣ $p(p-1) = 6 \cdot 5 \cdot = 4 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1$. Вторая часть говоритъ о четырехъ парахъ шестиугольныхъ и трехъ парахъ четырехугольныхъ граней, и первая часть о шести поясахъ этого зоноэдра—притупленнаго октаэдра (то есть комбинацію октаэдра и куба).

И такой выводъ мы можемъ продолжать безгранично, снова вычерчивая притупленный октаэдръ въ граммастереографической проекціи и принимая его за парногранникъ прилагать къ нему полярнозоноэдрическую формулу и т. д. Теперь ясно, что эти формулы прямого отношенія къ элементамъ симметріи не имѣютъ.

15 октября 1915 г.

Тѣмъ же авторомъ и въ томъ же журналѣ (April 1916 p. 324) воспроизводится формула Миллера, приведенная въ этихъ Запискахъ (V 233).

4 мая 1916 г.

---

[3]) (Полный четырехсторонникъ на сферѣ).