13. Нѣкоторыя слѣдствія изъ теоремы, аналогичной теоремѣ Паскаля.

Е. С. Федорова.

(Доложено 9 сентября).

При примѣненіяхъ теоремы Паскаля весьма заманчивымъ представляется то обстоятельство, что, пользуясь ею, можно строить конопримы нетолько по пяти точкамъ, но и по четыремъ, съ проходящею чрезъ одну изъ нихъ прямою, и по тремъ съ двумя проходящими чрезъ двѣ изъ нихъ прямыми, и тогда эти прямыя оказываются касательными, какъ будто прямыя замѣняетъ точку, безконечно-близкую къ нѣкоторой другой точкѣ.

Теперь обратимся къ аналогичнымъ построеніямъ въ пространствѣ, являющимся слѣдствіемъ теоремы, аналогичной теоремѣ Паскаля.

Такъ какъ въ основаніи построенія по этой теоремѣ находится построеніе двухъ гиперболоидовъ линейной примы, къ которой принадлежитъ и искомая коносекунда, а для этого нужно построить двѣ гексапримы, то ясно, что данными могутъ являться такія касательныя совокупно съ точками касанія на нихъ, которыя достаточны для построенія гексапримъ.

Но, какъ извѣстно, гексапримы можно построить нетолько по шести точкамъ, но также по пяти точкамъ и прямой, проходящей чрезъ одну изъ нихъ, по четыремъ точкамъ и двумъ такимъ прямымъ и наконецъ по тремъ точкамъ и тремъ такимъ прямымъ.

Въ первомъ случаѣ каждый изъ двухъ конусовъ мы можемъ построить по лучамъ чрезъ четыре остальныя точки и плоскости, проходящей чрезъ прямую, которая станетъ касательной къ конусу.

Во второмъ случаѣ конусы можемъ построить по лучамъ чрезъ три остальныя точки и двумъ плоскостямъ, которыя также будутъ касательны къ конусамъ.

Въ третьемъ случаѣ построеніе конуса какъ въ предъидущемъ, но лучъ дается прямой, проходящей чрезъ центръ конуса.

Если имѣется гексаприма, то еще по двумъ точкамъ можно построить гиперболоидъ, проведя изъ нихъ двѣ соотвѣтственныя хорды, которыя и будутъ направляющими гиперболоида.

Но гиперболоидъ можно построить и тогда, когда дана прямая a съ находящеюся на ней точкою A.

Чрезъ A проводимъ хорду гексапримы, а чрезъ хорду и прямую a проводимъ плоскость, которая можетъ пересѣчь гексаприму только въ одной точкѣ A′; совокупность хордъ, проведенныхъ изъ точекъ прямой AA′ и есть прима производящихъ гиперболоида,

въ которомъ прямая a также находится въ касательной плоскости, какъ данныя прямыя въ всѣхъ предъидущихъ случаяхъ.

Отсюда видимъ, что мы можемъ построить два гиперболоида даже тогда, когда даны четыре точки и проходящія чрезъ нихъ прямыя (касательныя). Въ этомъ случаѣ по a съ A, b съ B и c съ C построимъ гексаприму, изъ D проведемъ хорду гексапримы, а чрезъ нея и d плоскость и такимъ образомъ найдемъ точку гексапримы, которая съ точкою D даетъ направляющую гиперболоида. Затѣмъ построимъ гексаприму напр. по b съ B, c съ C и d съ D, изъ A проведемъ хорду, а чрезъ послѣднюю и прямую a плоскость, и найдемъ еще точку гексаприму и направляющую прямую чрезъ A.

Итакъ коносекунду можно построить нетолько 1) по девяти точкамъ, но также 2) по восьми точкамъ и касательной, проходящей чрезъ одну изъ нихъ, 3) по двумъ касательнымъ съ точками касанія на нихъ и еще пяти точкамъ, 4) по тремъ касательнымъ съ точками касанія на нихъ и еще тремя точкамъ и наконецъ 5) по четыремъ касательнымъ съ точками касанія на нихъ и еще одной точкѣ.

Если кромѣ восьми точекъ дана прямая, не проходящая ни чрезъ одну изъ нихъ, то, такъ какъ въ плоскости, проведенной чрезъ нея, мы имѣемъ двѣ конопримы, опредѣляющія ихъ линейную приму, а изъ этой примы прямая касательна къ двумъ изъ нихъ, то по этимъ даннымъ можно построить двѣ коносекунды, касательныя къ данной прямой.

Если кромѣ восьми точекъ дана плоскость, то, такъ какъ вообще изъ коносекундъ линейной примы къ одной плоскости касаются три, то значитъ въ общемъ случаѣ задача имѣетъ три рѣшенія.

Но теперь разсмотримъ еще случай, когда кромѣ восьми точекъ дана плоскость, проходящая чрезъ одну изъ нихъ напр. A. Такъ какъ въ этомъ случаѣ точка, находящаяся въ данной плоскости, есть общая для всѣхъ коносекундъ прямы, то въ каждой плоскости сѣченія чрезъ эту точку мы получаемъ линейную приму конопримъ, имѣющихъ эту и значитъ покрайней мѣрѣ еще одну точку общими, и задача сводится къ нахожденію той конопримы, которая касательна къ слѣду данной плоскости во взятой плоскости сѣченія. Такая задача имѣетъ конечно единичное рѣшеніе.

Если за плоскость сѣченія мы возьмемъ такую, которая кромѣ этой точки, проходитъ еще чрезъ двѣ изъ восьми данныхъ точекъ, то мы получимъ линейную приму конопримъ, имѣющихъ постоянными четыре точки, а слѣдовательно содержащую въ себѣ три спеціальныя, представленная парами прямыхъ (противолежащихъ сторонъ четырехугольника).

Трехугольникъ, образуемыми тремя остальными точками (кромѣ A), принимаемъ за треугольникъ проективности.

Такъ какъ, съ одной стороны каждая коноприма проективна съ касательной къ ней въ одной изъ постоянныхъ точекъ (въ данномъ случаѣ A), а съ другой, каждой таковой коррелятивна одна точка на плоскости, а всѣмъ конопримамъ линейной примы точки одной прямой [1]), то, имѣя три спеціальныя кривыя, то есть пары точекъ, а съ ними три касательныя, проходящія чрезъ точку A, мы найдемъ четвертую точку на той же полярѣ точкѣ A (по отношенію къ трехугольнику), коррелятивную слѣду данной плоскости какъ касательной къ конопримѣ, а по этой точкѣ опредѣлимъ и искомую коноприму, касательную къ слѣду въ точкѣ A. Еще проще примѣнить теорему Паскаля, имѣя четыре точки и касательную проходящую чрезъ одну изъ нихъ.

Но достаточно имѣть хоть одну точку этой касательной конопримы то есть сѣченія касательной къ плоскости коносекунды, чтобы по ней воспроизвести всѣ точки коносекунды.

Итакъ 6) коносекунду можно построить по восьми точкамъ и одной касательной плоскости въ одной изъ этихъ точекъ.

Но отсюда непосредственно слѣдуетъ, что для построенія коносекунды можетъ быть дано, кромѣ касательной плоскости, проходящей чрезъ одну ея точку, еще 7) шесть точекъ и касательная въ одной изъ нихъ, 8) пять точекъ и касательныя въ двухъ изъ нихъ и наконецъ 9) четыре точки и касательныя въ трехъ изъ нихъ.

Такимъ образомъ, слѣдствія, выводимыя изъ теоремы, аналогичной теоремѣ Паскаля, еще разнообразнѣе тѣхъ, которыя выводятся изъ самой теоремы, что и должно имѣть мѣсто для теоремъ, относящихся къ пространству.

Такъ какъ всѣ эти слѣдствія позиціоннаго характера, то могутъ быть перенесены на всѣ геометрическія системы не ниже третьей ступени.

Въ частности, для системы плоскостей, мы прямо получимъ формулировку соотвѣтственныхъ теоремъ,

---

[1]) Эта прямая не что иное какъ поляра точки A по отношенію къ трехугольнику.

если вездѣ слово „точки“ замѣнимъ словомъ „плоскости“ и обратно.

Какъ извѣстно, пять произвольныхъ плоскостей своими пересѣченіями опредѣляютъ десять точекъ — вершинъ полнаго пятигранника; на каждой грани находится шесть вершинъ полнаго четырехсторонника, а каждыя двѣ грани пересѣкаются въ ребрѣ, несущемъ на себѣ три вершины, такъ какъ это ребро есть общая сторона двухъ полныхъ четырехсторонниковъ на этихъ граняхъ, и слѣдовательно девять изъ десяти вершинъ располагаются на двухъ граняхъ.

Поэтому, если мы зададимся такими девятью точками какъ опредѣляющими коносекунду, то получимъ тотъ спеціальный ея видъ, который представленъ парою плоскостей.

Такъ какъ линейная прима коносекундъ опредѣляется двумя произвольными изъ нихъ, въ томъ числѣ и парами плоскостей, то значитъ четырехгранникъ (сфеноидъ) опредѣляетъ линейную приму (линейчатыхъ) коносекундъ, имѣющихъ общими двѣ пары его реберъ.

Въ самомъ дѣлѣ, чрезъ каждую точку A въ линейной примѣ проходитъ только одна поверхность (конечно, кромѣ точекъ, общихъ для всѣхъ), а общія прямыя раздѣляются на двѣ пары противолежащихъ (не пересѣкающихся). Если изъ A проведемъ два луча, пересѣкающіе обѣ эти пары, то получимъ пару прямыхъ касательной плоскости къ одному изъ гиперболоидовъ линейной примы. Каждый изъ этихъ лучей, какъ третій, пересѣкающій пару производящихъ, составляетъ третью направляющую, а этими тремя опредѣляются всѣ производящія гиперболоида.

Если двѣ пары плоскостей мы подберемъ такъ, чтобы образовался тетрагональный сфеноэдръ [1]), то совокупность коносекундъ, составляющая ихъ линейную приму, должна обладать тѣми же элементами симметріи, что и опредѣляющія ее пары плоскостей. Въ составъ одной изъ коносекундъ примы должны войти и оси симметріи, такъ какъ каждая изъ нихъ пересѣкаетъ пару прямыхъ и представляетъ третью направляющую, которая опредѣляетъ всѣ производящія. Такъ какъ въ данномъ случаѣ всѣ три направляющія параллельны одной и той же плоскости, то относящаяся сюда коносекунда есть гиперболическій параболоидъ, и притомъ его поверхность должна обладать всѣми элементами симметріи тетрагональнаго сфеноэдра и значитъ этотъ параболоидъ есть ортогональный. Но четверная ось сложной симметріи въ его составъ не входитъ, такъ какъ она не пересѣкаетъ ни одной изъ паръ направляющихъ; по той же причинѣ она не входитъ въ составъ поверхности ни одного изъ гиперболоидовъ линейной примы. Она проходитъ чрезъ центръ симметріи (вершину) параболоида и перпендикулярна къ касательной плоскости, заключающей обѣ двойныя оси симметріи.

Если двѣ пары плоскостей мы подберемъ такъ, чтобы образовался тетраэдръ (чрезъ вершины и центры граней котораго проходятъ тройныя оси симметріи), то мы уже нетолько получаемъ приму гиперболоидовъ, содержащую и одинъ ортогональный гиперболическій параболоидъ, но, вращая около тройныхъ осей симметріи, можемъ воспроизвести три тождественныя такія примы, и у всѣхъ гиперболоидовъ всѣхъ трехъ примъ будутъ общими вершины тетраэдра и по двѣ пары его противолежащихъ реберъ.

Подвергая такую систему произвольной коллинеаціи, найдемъ: по одному четырехграннику (сфеноиду) можно воспроизвести три такія линейныя примы гиперболоидовъ, въ которыхъ каждый изъ нихъ проходитъ чрезъ всѣ четыре вершины и черезъ двѣ пары противолежащихъ реберъ.

Произвольная плоскость разсѣкаетъ каждую изъ такихъ линейныхъ примъ въ полномъ четырехугольникѣ, двѣ пары противоположныхъ сторонъ котораго представляютъ сѣченія спеціальныхъ коносекундъ въ видѣ паръ плоскостей, а третья пара принадлежитъ гиперболоиду, для котораго взятая плоскость есть касательная [1]). Исключеніе составляютъ плоскости четырехгранника, въ которыхъ двѣ стороны трехугольника есть общія прямыя всѣхъ

---

[1]) Такъ въ кристаллографіи называется четырехгранникъ, грани котораго равнобедренные трехугольники, а ихъ основанія находятся на парѣ противолежащихъ реберъ. Чрезъ среднія точки основаній проходитъ четверная ось сложной симметріи; чрезъ среднія точки другихъ паръ противолежащихъ реберъ проходятъ двѣ взаимноперпендикулярныя, двойныя оси симметріи, а чрезъ четверную ось и оба основанія проходятъ двѣ взаимноперпендикулярныя плоскости симметріи, раздѣляющія пополамъ прямые углы между двойными осями симметріи.

[1]) Противорѣчіе съ теоремою, по которой каждой плоскости въ линейной примѣ коносекундъ касательны вообще три изъ нихъ (пара можетъ быть мнимою) есть кажущееся, потому что, при опредѣленномъ толкованіи, можно принять, что къ парѣ плоскостей, какъ спеціальной коносекундѣ, касательны всѣ плоскости. Если отвлечься отъ этого толкованія, то для разсматриваемой спеціальной линейной примы выведется теорема, что каждая плоскость пространства касается только одной ея коносекунды.

гиперболоидовъ примы. Такъ какъ экстраплоскость касательна только къ одной изъ коносекундъ примы, то значитъ послѣдняя содержитъ только одинъ гиперболическій параболоидъ.

Тѣ изъ выведенныхъ теоремъ, которыя имѣютъ позиціонный характеръ, могутъ быть непосредственно перенесены во всякую другую систему, въ томъ числѣ и въ систему плоскостей.

Если мы опредѣлимъ коносекунду плоскостей по девяти изъ десяти граней полнаго пространственнаго пятиугольника, то окажется, что она вырождается въ двѣ линейныя секунды, имѣющія своими центрами двѣ изъ вершинъ пятиугольника. Въ каждой изъ этихъ вершинъ сходится по шести граней, образующихъ грани полнаго четырехугольника лучей при одномъ центрѣ; три изъ этихъ граней принадлежатъ и другой линейной секундѣ и всѣ три пересѣкаются въ прямой, соединяющей оба центра.

Двѣ такія спеціальныя линейныя секунды то есть въ сущности двѣ пары точекъ или вершины четырехгранника опредѣляютъ линейную приму коносекундъ. Но, переходя къ этой примѣ линейчатыхъ коносекундъ, мы уже не переносимъ теоремы изъ одной системы въ другую, а возвращаемся къ уже выведеннымъ теоремамъ съ обращеніемъ, такъ сказать, преимущественнаго вниманія на плоскости, какъ на элементы разсматриваемой системы.

Въ заключеніе о свойствахъ разсматриваемой линейной примы упомянемъ, что на основаніи выведеннаго построенія ея гиперболоидовъ слѣдуетъ: полная совокупность всѣхъ производящихъ и направляющихъ гиперболоидовъ той спеціальной линейной примы есть двойная совокупность (секунда) лучей двухъ осевыхъ коллинеацій; въ каждомъ отдѣльномъ гиперболоидѣ изъ линейной примы лучей, имѣющей центръ на одной изъ осей, представленъ только одинъ лучъ.

Если въ каждой плоскости пару лучей разовьемъ въ линейную приму лучей, то получимъ полную терцію лучей нулевой системы, и значитъ всѣ лучи разсмотрѣнной системы входятъ въ составъ этой терціи.

Для установленія коррелятивности нулевой системы достаточно имѣть двѣ противолежащія пары реберъ четырехгранника.

Каждой точкѣ пространства коррелятивна плоскость двухъ исходящихъ изъ нея лучей, пересѣкающихъ постоянныя пары реберъ.

Этимъ же опредѣляется и сама нулевая система.

Чтобы понять, почему теоремѣ Паскаля, а слѣдовательно и ей аналогичной, принадлежитъ основное значеніе, достаточно указать на то, что эти теоремы только частныя выраженія глубочайшей и важнѣйшей основной теоремы новой геометріи, по которой въ двухъ проективныхъ системахъ линейнымъ совокупностямъ соотвѣтствуютъ линейныя, квадратичнымъ квадратичныя, вообще совокупностямъ n-го порядка совокупности того же порядка. При этомъ пересѣченіямъ соотвѣтствуютъ пересѣченія, касаніямъ касанія, инволюціямъ инволюціи.

4 августа 1915 г.