# 12. Теорема, аналогичная теоремѣ Паскаля, но относящаяся къ пространству.

**Е. С. Федорова.**

(Доложено 9 сентября).

Въ замѣткѣ „Циклы коллинеаціи и линейныя прямы конопримъ и коносекундъ“ (эти Записки V 398) было показано коренное различіе въ условіяхъ построенія тѣхъ и другихъ, отчего построеніе конопримъ является весьма простымъ, а построеніе коносекундъ сложнымъ.

Чрезвычайная сложность построенія коносекундъ по девяти точкамъ въ общемъ случаѣ, весьма ослабляется, если въ числѣ данныхъ есть четыре точки въ одной плоскости и становится прямо простою операціей, когда имѣется пять точекъ въ одной плоскости.

Въ послѣднемъ случаѣ мы просто проводимъ плоскость чрезъ любыя три изъ оставшихся точекъ, и пара точекъ пересѣченія (которая можетъ быть и мнимою) этой плоскости съ конопримою, полученною на первой плоскости, увеличиваетъ число данныхъ на ней точекъ до пяти то есть даетъ возможность легко построить и вторую коноприму сѣченія. И тогда всякая вообще плоскость, проходящая чрезъ оставшуюся девятую точку въ пересѣченіи съ двумя первыми конопримами даетъ пять точекъ на этой произвольной плоскости.

Отсюда видимъ, что вся сложность построенія выпадаетъ на построеніе первыхъ двухъ точекъ коносекунды въ какой-нибудь плоскости, проходящей чрезъ три точки, а для этого нужно умѣть находить точку на любой прямой, проведенной изъ одной изъ данныхъ точекъ.

Такъ какъ на плоскости аналогичная задача разрѣшается весьма просто на основаніи теоремы Паскаля, то весьма естественно, что мысль геометровъ упорно направлялась на отысканіе простого рѣшенія вопроса для пространства, а неудача подняла этотъ вопросъ на степень трудной проблемы. Напередъ ясно, что рѣшеніе должно быть простымъ; непонадобится даже прибѣгать къ построеніямъ второго порядка, такъ какъ рѣшеніе проблемы единично (неизвѣстная есть единственная точка на заданномъ лучѣ), и такъ какъ теорема, обусловливающая это рѣшеніе преслѣдуетъ задачу, вполнѣ аналогичную теоремѣ Паскаля, то въ этомъ смыслѣ ее и можно назвать согласно заглавію статьи.

Теорему Паскаля можно формулировать различнымъ образомъ, но, особенно съ точки зрѣнія современной геометріи, для которой она послужила одною изъ первыхъ основъ, эту формулировку приходится связывать съ коллинеаціей, а именно такою, которая преобразуетъ опредѣляемую пятью точками коноприму, въ самое себя.

Можно напр. выразить ее такъ: если дано пять точекъ, но четыремъ изъ нихъ A, B, A′, B′ мы устанавливаемъ такую коллинеацію, чтобы имъ были соотвѣтственно гомологичны точки A′, B′, A, B, и тогда шестая точка $C_1$, гомологичная пятой точкѣ C, принадлежитъ искомой конопримѣ.

Точка пересѣченія AA′ и BB′ есть центръ (инволюторной) коллинеаціи Z, двѣ другія точки пересѣченія діагоналей полнаго четырехугольника ABA′B′ принадлежатъ оси коллинеаціи, и тогда четвертая гармоническая $C_1$ на лучѣ ZC (принимая за двойныя точки Z и точку оси коллинеаціи на лучѣ), есть шестая искомая точка [1]).

[1]) Отсюда слѣдуетъ, что если возьмемъ шестиугольникъ ABC A′B′$C_1$ и примемъ за противоположныя AB съ A′B′, BC съ B′$C_1$ и CA′ съ $C_1$A, то точки пересѣченія

Принявъ теперь за соотвѣтственно гомологичныя $A, B, A', C_1$ и $A', C_1, A, B$, найдемъ седьмую точку $C_2$, гомологичную точкѣ $C$ и т. д.; словомъ, найдемъ сколь угодно точекъ, гомологичныхъ точкѣ $C$ на исходящихъ изъ нея лучахъ.

При такой формулировкѣ теоремы Паскаля, мы можемъ непосредственно перейти къ формулировкѣ теоремы, ей аналогичной, но относящейся къ пространству, а именно: если дано девять точекъ, по восьми изъ нихъ мы устанавливаемъ такую коллинеацію, чтобы $A, B, C, D, A'$ были соотвѣтственно гомологичны $A', B', C', D', A$, и тогда десятая точка $E_1$, гомологичная девятой точкѣ $E$, принадлежитъ искомой коносекундѣ.

Считать эту теорему за аналогичную Паскалевской недопустимо прежде всего потому, что она справедлива лишь въ особомъ спеціальномъ случаѣ, если заданная коллинеація приводитъ коносекунду къ самосовмѣщенію (какъ показано въ упомянутой замѣткѣ), что всегда имѣетъ мѣсто для конопримъ на плоскости и совершенно исключительно для коносекундъ; затѣмъ она всетаки не дала бы точки на заданномъ лучѣ и не разрѣшала бы поставленной проблемы.

Такъ какъ сущность разрѣшенія проблемы Паскаля сводится къ установленію по четыремъ точкамъ инволюторной коллинеаціи и отысканію на лучѣ черезъ пятую точку второй точки пары въ инволюціи, то аналогичная теорема для пространства должна установить такую инволюцію для всякаго заданнаго луча.

Начало, на которомъ можно установить такое построеніе, весьма просто. Вѣдь черезъ восемь точекъ проходитъ линейная прима коносекундъ (которая связана съ опредѣленной коллинеаціей), для чего достаточно построить двѣ изъ нихъ, и тогда дѣйствительно имѣемъ инволюцію на каждомъ лучѣ [1]).

Чтобы достичь наибольшей возможной простоты слѣдуетъ отдать предпочтеніе линейчатымъ поверхностямъ (которыя всегда присутствуютъ въ линейныхъ примахъ общаго характера [2]), такъ какъ онѣ могутъ быть представлены въ видѣ примы производящихъ.

Такое же построеніе извѣстно. Выбравъ произвольно (изъ восьми) шесть точекъ и построивъ по нимъ гексаприму [1]), мы изъ двухъ остальныхъ проведемъ хорды послѣдней; совокупность прямыхъ, проведенныхъ изъ точекъ гексапримы и пересѣкающихъ обѣ хорды, и составляетъ одну изъ искомыхъ поверхностей; построивъ другую такую поверхность (измѣнивъ составъ взятыхъ шести точекъ), мы имѣемъ все, что надо, такъ какъ каждый лучъ изъ девятой точки даетъ въ пересѣченіи съ обѣими поверхностями двѣ пары точекъ инволюціи, и на немъ легко найдемъ новую точку искомой коносекунды.

Такимъ образомъ получаемъ теорему: построивъ по восьми изъ девяти данныхъ точекъ два однополыхъ гиперболоида, мы на каждомъ лучѣ изъ девятой точки получаемъ инволюцію и въ ней точка, сопряженная данной, принадлежитъ искомой коносекундѣ.

Эта теорема, по заданію аналогичная Паскалевской, по построенію приближается къ теоремѣ Дезарга.

Умѣя находить точки на произвольныхъ лучахъ, мы сначала найдемъ двѣ точки въ одной изъ проходящихъ чрезъ три точки плоскостей, и тогда, по вышесказанному, мы легко построимъ коноприму въ этой плоскости, а равно и въ какой-нибудь другой изъ данныхъ плоскостей и притомъ обѣ плоскости пересѣкаются въ прямой, на которой опредѣлились двѣ общія точки $A$ и $A'$.

Для построенія на плоскости, можно сказать, нѣтъ никакихъ ограничивающихъ условій при выборѣ данныхъ четырехъ точекъ, хотя при извѣстныхъ совпаденіяхъ получимъ не коноприму общаго характера, а спеціальную.

Напр. если три точки $A, B, C$ придутся на одну прямую, то коноприма выродится въ пару прямыхъ.

Въ примѣненіи къ пространству вовсе нельзя считать достаточными такія девять точекъ, въ составъ которыхъ входитъ группа изъ восьми ассоціированныхъ [2]) точекъ, такъ какъ такая группа сводится къ семи независимо даннымъ точкамъ.

Въ обѣихъ плоскостяхъ, которыя пересѣкаются въ прямой $AA'$, всѣ соотвѣтственныя точки этихъ конопримъ находятся въ перспективномъ положеніи и значитъ будутъ проектироваться лучами

---

проти воположныхъ сторонъ лежатъ на одной прямой—оси коллинеаціи; это составляетъ обычную формулировку этой теоремы.

[1]) Ср. Reye. Geometrie der Lage III 32.

[2]) Спеціальныя коносекунды, начиная отъ октосекундъ и до шаровъ, какъ было объяснено въ прежнихъ статьяхъ (напр. V 182), образуютъ самостоятельныя системы.

[1]) Для этого, какъ извѣстно, сначала изъ одной, а потомъ изъ другой изъ данныхъ точекъ нужно чрезъ остальныя пять провести лучи и по нимъ построить два конуса. Гексаприма и есть кривыя пересѣченія этихъ двухъ конусовъ.

[2]) Напр., восемь вершинъ параллелепипеда или группы коллинеарно выведенныхъ изъ нихъ точекъ.

изъ одного общаго центра O, и для того, чтобы найти этотъ центръ, достаточно изъ касательной къ одной изъ нихъ провести плоскость, касательную къ другой, до пересѣченія съ полярою хорды AA′. Въ частности, лучи изъ O черезъ соотвѣтственныя точки конопримъ воспроизведутъ нѣкоторый конусъ, что общеизвѣстно относительно двухъ конопримъ, пересѣкающихся въ общей хордѣ.

Но здѣсь соотвѣтствіе не однозначно, а двузначно, такъ какъ изъ касательной къ конопримѣ мы можемъ провести къ другой двѣ касательныя плоскости, и такимъ образомъ получимъ два конуса съ центрами O и O′.

Рѣшеніе задачи приведено къ тому положенію, при которомъ во всѣхъ плоскостяхъ изъ любой точки коносекунды мы получаемъ пять точекъ (изъ коихъ одна или двѣ пары могутъ быть мнимыми), по которымъ въ этой плоскости можемъ вычертить сѣченіе коносекунды.

Мы можемъ считать напр. точку O за центръ инволюторной коллинеаціи, а, найдя на каждомъ лучѣ изъ O точку, раздѣляющую вмѣстѣ съ O пару соотвѣтственныхъ точекъ конопримъ гармонически, получимъ плоскость коллинеаціи, которая пройдетъ и чрезъ общую хорду AA′.

Въ сѣченіи плоскостью чрезъ O и еще какую нибудь изъ данныхъ точекъ коносекундъ мы какъ разъ осуществляемъ условія построенія конопримъ по теоремѣ Паскаля въ выше данномъ выраженіи и такимъ образомъ изъ каждой такой точки какъ пятой выведемъ сопряженную ей шестую въ каждомъ такомъ плоскомъ сѣченіи.

Съ того положенія построенія, которое мы достигли, мы можемъ считать коносекунду, опредѣляемую данными девятью точками, вполнѣ извѣстною и по отношенію къ ней устанавливать полярность Напр. проведя плоскость чрезъ OO′ и какую-нибудь изъ данныхъ точекъ и считая обѣ плоскости, касательныя въ точкахъ A и A′, за сопряженныя, мы сначала легко найдемъ четверную гармоническую плоскость; затѣмъ, означивъ точку пересѣченія прямой AA′ первою плоскостью чрезъ P′, а послѣднею чрезъ P, найдемъ, что P и P′ гармонически раздѣляютъ AA′, а плоскость OO′P′, которую отмѣтимъ буквою S, есть поляра точки P.

Поэтому можемъ установить другую инволюторную коллинеарность, принимая P за центръ и S за плоскость коллинеаціи, по отношенію къ которой коносекунда также самогомологична; въ частности, самогомологична и коноприма K, находящаяся въ плоскости S. Поэтому, если проведемъ изъ A какую-нибудь плоскость, касательную къ этой конопримѣ, то линія ея пересѣченія съ S есть самогомологичная касательная къ K; въ ней пересѣкаются обѣ гомологичныя плоскости изъ A и изъ A′.

Для установленія коллинеарности достаточно четырехъ такихъ паръ гомологичныхъ плоскостей, а въ нашемъ распоряженіи таковыхъ даже не пять, а безконечное множество, а именно пересѣкающихся въ касательныхъ къ K, причемъ каждая пара такихъ плоскостей имѣетъ только одну общую точку конопримы K (точку касанія).

Отсюда заключаемъ, что если отъ коллинеарности перейдемъ къ коррелятивности, опредѣляемой лучами изъ A и плоскостями изъ A′, проходящими чрезъ точки касанія въ плоскости S, то на послѣдней получаемъ полярную систему, опредѣляемую конопримой K. Слѣдовательно, нашу коносекунду можно опредѣлить и коррелятивностью лучей изъ A и плоскостей изъ A′, перспективныхъ съ полюсами и полярами на плоскости S.

Въ частности, лучу AA′ коррелятивна плоскость, касательная къ коносекундѣ въ точкѣ A′, двумя точками конопримы K, находящимися въ плоскости AOA′ опредѣляются два, проходящихъ чрезъ нихъ, луча изъ A и сама плоскость; этимъ же лучамъ коррелятивны двѣ плоскости изъ A′, пересѣкающіяся въ касательной къ коносекундѣ въ точкѣ A′ и плоскости AO′A′; лучу AO коррелятивна плоскость AO′A′, и лучу AA′ коррелятивна плоскость, касательная въ точкѣ A′ то есть проходящая чрезъ центръ O.

Также докажемъ вообще, что плоскости AOA′ коррелятивна прямая, касательная при A′ въ плоскости AO′A′, а плоскости AO′A′ коррелятивна прямая, касательная при A′ въ плоскости AOA′.

Такимъ образомъ мы перешли къ общеизвѣстному изъ руководствъ способу Зейдевица построенія точекъ коносекундъ то есть показали, какъ перейти къ примѣненію этого способа по девяти произвольно даннымъ точкамъ коносекунды.

Если мы возьмемъ плоское сѣченіе чрезъ ось OO′ то есть поляру прямой AA′, то въ немъ получимъ двѣ инволюціи и слѣдовательно полярную систему; одну инволюцію составляетъ OO′ какъ поляра прямой AA′—оси инволюціи плоскостей; другую инволюцію составятъ основанія лучей изъ A въ плоскости, касательной къ коносекундѣ въ точкѣ A, такъ какъ каждой такой точкѣ проективенъ лучъ, проведенный изъ основанія прямой AA′. Двѣ инволюціи опредѣляютъ линейную приму конопримъ; если же дана еще хоть одна точка, то коноприма сѣченія опредѣляется вполнѣ и однозначно. Напр.

въ плоскости OO'B такою опредѣляющею точкою является B.

Теперь, располагая разнообразными пріемами построенія точекъ коносекунды, мы можемъ перемѣнить положеніе центровъ A и A', взявъ напр. за таковые два конца діаметра [1]). Принявъ Z и Z' за концы діаметра и установивъ коррелятивность лучей и плоскостей въ этихъ точкахъ, мы на экстраплоскости, какъ сопряженной съ діаметромъ, можемъ построить коноприму полярности. Принявъ за центръ конуса, соотвѣтствующаго этой конопримѣ, точку Z, мы найдемъ, что этотъ конусъ параллеленъ конусу ассимптотическому. Найдя полярную (по отношенію къ конусу) плоскость, соотвѣтствующую какому-нибудь лучу изъ Z, мы проведемъ плоскость, параллельную ей чрезъ точку Z', и она на лучѣ отмѣтитъ искомую вторую точку коносекунды.

Отсюда слѣдуетъ, что коносекунда вполнѣ и однозначно опредѣляется ассимптотическимъ конусомъ и одною изъ точекъ коносекунды [2]).

Какъ въ конопримахъ сопряженные діаметры, такъ въ коносекундахъ ассимптотическіе конусы могутъ быть вещественными или мнимыми.

Изъ всѣхъ мнимыхъ конусовъ выдѣляется по своему значенію главный конусъ вращенія (съ прямымъ угломъ растворенія). Въ немъ каждому лучу полярна перпендикулярная плоскость (изотропная секунда), а потому такой конусъ, совмѣстно съ точкою Z', воспроизводитъ шаръ, по отношенію къ которому ZZ' есть діаметръ.

Если ассимптотическій конусъ веществ енъ, то получаются гиперболоиды двухъ различныхъ разрядовъ, смотря потому, находится ли точка Z' внутри или внѣ его; въ первомъ случаѣ получаются гиперболоиды двуполые, во второмъ—однополые. Если Z' окажется на самомъ конусѣ, то самъ конусъ и будетъ представлять искомую коносекунду.

Если данныя девять точекъ находятся на параболоидѣ, коноприма въ экстраплоскости вырождается въ точку, а потому лучамъ изъ Z коррелятивны плоскости, параллельныя одной и той же прямой. При производствѣ операціи это обстоятельство раскрываетъ спеціальность случая, а попутно опредѣляется и десятая точка, а именно экстраточка параболоида.

Въ этомъ случаѣ для установленія коррелятивности нужно брать уже не экстра-, а обыкновенную плоскость.

Выводя вторую теорему, мы достигли всѣхъ тѣхъ цѣлей, которыя на плоскости достигаются теоремою Паскаля. Но то, что на плоскости объединяется въ одно, въ случаѣ пространства разъединяется и выражается двумя различными теоремами. Собственно аналогичная теоремѣ Паскаля основная теорема даетъ возможность по девяти даннымъ точкамъ построить сколько-угодно точекъ коносекунды, въ томъ числѣ и на лучахъ, исходящихъ изъ одной изъ данныхъ точекъ. Вторая теорема даетъ возможность найти вторую точку коносекунды на любомъ лучѣ, исходящемъ изъ одной данной точки.

Ясно, что для плоскости можно прямо перенести теорему, аналогичную второй теоремѣ и разрѣшающей аналогичную задачу, независимо отъ теоремы Паскаля.

Коноприма вполнѣ и однозначно опредѣляется парою двойныхъ сопряженныхъ діаметровъ и еще одною точкою [1]).

Напр., если двойные сопряженные діаметры мнимы и взаимноперпендекулярны, всякая пара лучей образуетъ прямой уголъ (изотропная прима сопряженныхъ лучей). Коноприма, а именно кругъ, воспроизводится въ этомъ случаѣ проведеніемъ лучей изъ A и перпендикуляровъ къ нимъ изъ A'.

Въ случаѣ параболы нельзя брать за сѣкущую экстрапрямую, а только прямую обыкновенную, но за то попутно опредѣляется, что коноприма есть

---

[1]) Напр. такъ коллинеарно преобразуемъ коносекунду, чтобы плоскость O, проходящая чрезъ OO', преобразовалась въ экстраплоскость; въ такомъ случаѣ центръ преобразованной коносекунды находится на прямой, преобразованной изъ AA', и слѣдовательно эта прямая есть діаметръ новой коносекунды. Если примемъ коллинеацію за инволюторную, то по сѣченію преобразованной коносекунды плоскостью o заключаемъ о сѣченіи данной коносекунды экстраплоскостью, что служитъ для ея характеристики.

[2]) Но всегда нужно имѣть въ виду, что точка Z не есть центръ поверхности.

Поэтому, задача, рѣшаемая на основаніи этой теоремы отличается отъ той, для которой данными являются истинный ассимптотическій конусъ и точка; чтобы отъ одной задачи перейти къ другой, нужно точку A, какъ центръ конуса, перемѣстить въ положеніе центра поверхности, причемъ точки A и A' конечно остаются на мѣстѣ.

[1]) Здѣсь конечно подразумѣвается, что если Z и Z' концы діаметра конопримы и чрезъ Z проходятъ прямыя, проведенныя параллельно двойнымъ сопряженнымъ діаметрамъ (ассимптотамъ), то на любомъ лучѣ изъ Z найдемъ вторую точку конопримы, если изъ Z проведемъ лучъ, сопряженный и параллельный ему изъ точки Z' до пересѣченія съ первымъ.

Примѣчаніе, сдѣланное для соотвѣтственной теоремы въ пространствѣ, относится и сюда; извѣстный простой способъ построенія точекъ гиперболы по ассимптотамъ (вещественнымъ двойнымъ сопряженнымъ діаметрамъ) и одной точкѣ, сюда не относится.

парабола и находится шестая принадлежащая ей точка, а именно экстраточка.

Построеніе по теоремѣ, аналогичной Паскалевской, переносится во всѣ геометрическія системы, въ частности, и въ систему плоскостей, но послѣдняя теорема, какъ теорема непозиціоннаго характера переносится только на родственныя системы, а напр., на систему плоскостей не переносится, также какъ для системы лучей на плоскости не примѣнимо только-что приведенная теорема непозиціоннаго характера.

Такимъ образомъ, построеніе десятой плоскости коносекунды по девяти даннымъ, завершается слѣдующею операціей. Когда опредѣлена инволюція плоскостей при точкѣ, произвольно взятой на прямой OO′ (аналогично сѣкущей плоскости предыдущаго случая) какъ центрѣ инволюціи (полярной системѣ въ секундѣ лучей и плоскостей) то есть опредѣлился конусъ плоскостей, каждой изъ которыхъ полярен касательный лучъ конуса, мы можемъ каждой плоскости секунды найти полярный лучъ. Если въ плоскости A дана произвольная прямая и требуется опредѣлить плоскость коносекунды (десятую), проходящую чрезъ эту прямую, мы сначала чрезъ эту прямую и центръ инволюціи проведемъ плоскость, находимъ ей полярный лучъ изъ центра, а изъ основанія этого луча на плоскости A′ проводимъ искомую плоскость чрезъ данную прямую въ плоскости A.

Въ этомъ случаѣ взятую точку (какъ центръ инволюціи) мы не можемъ взять въ экстраплоскости.

Если приведенное рѣшеніе проблемы и не представляется слишкомъ простымъ, то все-таки оно аналогично по ходу идей сравнительно простому способу рѣшенія аналогичной проблемы на плоскости, а потому не можетъ не быть отнесено къ сравнительно простымъ рѣшеніямъ.

На ряду съ этимъ мнѣ приходилось натыкаться и на весьма сложныя рѣшенія. Приведу примѣръ.

Даны девять точекъ и прямая $l$, проходящая чрезъ точку A. Проводимъ плоскость чрезъ какую-нибудь точку B и $l$. Въ распоряженіи остается 7 точекъ, которыя должны на плоскости опредѣлить линейную секунду конопримъ, полярныхъ по отношенію къ искомой конопримѣ сѣченія въ этой плоскости.

На произвольную группу изъ пяти точекъ мы можемъ смотрѣть какъ на опредѣляющую нѣкоторую полярную систему, то есть коноприму на взятой плоскости. Для этого достаточно взять четыре раза по парѣ точекъ, а основанія прямыхъ этихъ паръ на плоскости считать за полюсы основаній плоскостей, опредѣляемыхъ тремя остающимися точками пятиугольника.

Такъ какъ кромѣ первыхъ взятыхъ пяти точекъ въ нашемъ распоряженіи остается еще двѣ точки, то мы еще два раза можемъ группировать различные независимые пятиугольники, а изъ каждаго вывести независимую коноприму на плоскости, и такимъ образомъ получимъ три независимыя конопримы, которыми опредѣляется упомянутая линейная секунда конопримъ. Однако, изъ этой секунды только прима проходитъ чрезъ точку B. Для опредѣленія этой примы, достаточно найти двѣ изъ конопримъ, а онѣ на прямой $l$ отмѣтятъ инволюцію, двойныя точки которой опредѣлить очень легко.

Затѣмъ повторяемъ второй разъ всѣ эти операціи на плоскости AC и $l$, выключая изъ семи остальныхъ точекъ точку C, но зато включая точку B.

Получимъ вторую линейную приму конопримъ, пересѣкающихся въ точкѣ C, а вмѣстѣ съ тѣмъ и вторую инволюцію на прямой $l$; двѣ эти инволюціи складываются (по Штейнеру) въ одну производную, для которой пары двойныхъ точекъ двухъ первыхъ становится обыкновенными сопряженными парами инволюціи. Получивъ обѣ двойныя точки инволюціи на $l$, мы по точкѣ A находимъ искомую десятую точку, какъ сопряженную въ этой инволюціи.

Изъ литературы мнѣ вовсе неизвѣстны рѣшенія этой проблемы. Но вѣроятно о рѣшеніяхъ, непомѣрно сложныхъ, подобныхъ второму приведенному, говоритъ Рейе въ „Geometrie der Lage“ III (стр. 25): „Знаменитая проблема построить поверхность II порядка (то есть коносекунду) по девяти даннымъ точкамъ, рѣшается исчерпывающимъ образомъ въ томъ случаѣ, если будетъ найдено построеніе десятой точки на прямой, проведенной чрезъ одну изъ девяти данныхъ точекъ. Я знаю нѣсколько такихъ построеній, но они слишкомъ непомѣрно сложны (zu verwickelt), чтобы я могъ ими удовлетвориться; они не выдерживаютъ даже намека на сравненіе съ простотою Паскалевскаго построенія“.

---

Въ заключеніе приведу пріемъ, въ высшей мѣрѣ сокращающій построеніе точекъ коносекунды.

Мы видѣли выше, что изъ точки O, простымъ проектированіемъ лучами, точки конопримы, опредѣленныя на одной изъ двухъ плоскостей, пересѣкающихся въ общей оси AA′, переносимъ на другую. Обѣ конопримы имѣютъ въ точкахъ A и A′ по двѣ касательныя, которыя опредѣляютъ плоскости, касательныя къ коносекундѣ въ этихъ точкахъ.

Теперь распространимъ это простое проектированіе на всѣ плоскости примы, имѣя въ виду, что прямая $f$ пересѣченія касательныхъ плоскостей есть совокупность проектирующихъ центровъ. Для начертанія полной конопримы на одной изъ этихъ плоскостей достаточно одной единственной точки F [1]), а эту точку можемъ получить на любомъ лучѣ изъ A, проведенномъ въ этой плоскости.

Получивъ точку F, мы изъ нея проводимъ конусъ чрезъ вычерченную коноприму до пересѣченія съ прямою $f$ то есть OO'; обѣ полученныя точки на ней и есть искомые центры проектирующихъ конусовъ.

Совокупность точекъ F можетъ составить любая коноприма, не проходящая чрезъ точки A и A'.

Но и эта высшая степень сокращенія въ построеніи точекъ коносекундъ сводится къ проектированію безконечнаго множества конопримъ съ помощью лучей изъ одной вычерченной.

Если же коносекунда представляетъ линейчатую поверхность, для чего критерій указанъ выше (вещественный ассимптотическій конусъ и точка Z' внѣ этого конуса), то представляется возможность еще высшаго сокращенія операцій—вычерчиванія прямыми.

Въ этомъ случаѣ ассимптотическій конусъ, помѣщенный какъ въ точкѣ A (какъ было принято выше), такъ и въ точкѣ A', имѣетъ съ коносекундою общую касательную, и обѣ эти касательныя есть направляющія гиперболоида. Имѣя же двѣ направляющія, мы получимъ производящую изъ любой изъ оставшихся свободными точекъ, пересѣкая ихъ изъ этихъ точекъ лучами.

Какъ извѣстно, достаточно трехъ производящихъ, чтобы воспроизвести всѣ остальныя.

16 іюля 1915 г.

---

[1]) Потому что въ плоскости конопримы мы имѣемъ двѣ точки A и A' и еще двѣ касательныя въ этихъ точкахъ.