9. О корреспонденціяхъ между точками двухъ поверхностей Римана.

(Замѣтка I).

Н. В. Липина.

(Доложено 30 ноября 1915 г.).

Hurwitz, въ мемуарѣ „Ueber algebraische Correspondenzen u. s. w. (Math. An. t. 28) ограничился разсмотрѣніемъ корреспонденцій, существующихъ между точками одной поверхности Римана; однако методы знаменитаго геометра могутъ быть примѣнены къ разсмотрѣнію корреспонденцій имѣющихъ мѣсто между точками двухъ поверхностей (F) и (F′) соотвѣтствующихъ родовъ $p \geqq p'$.

Вопросъ этотъ находится въ тѣсной связи съ задачей о приведеніи абелевыхъ интеграловъ, поставленной Абелемъ и служившей темой многочисленныхъ изслѣдованій вплоть до настоящаго времени.

Болѣе того, принципъ корреспонденцій между точками двухъ поверхностей Римана, можетъ быть разсмотрѣнъ какъ новая форма задачи о приведеніи, установленная Hurwitz'омъ, — позволяющая примѣнить трансцендентные методы изслѣдованія. При трактованіи задачи въ указанной формѣ, приходится встрѣчаться съ интегралами, допускающими полное приведеніе періодовъ; не останавливаясь на подробностяхъ, я укажу лишь главнѣйшіе результаты которые мнѣ удалось получить въ этомъ направленіи (см. мою замѣтку въ Comptes Rendus t. 161, p. 278 и другую, въ этихъ Запискахъ).

Въ дальнѣйшемъ приняты слѣдующія обозначенія: интегралы перваго вида поверхности (F) обозначены черезъ v_i, ихъ періоды черезъ ω_{ik} и точки этой поверхности черезъ x_i; соотвѣтствующіе элементы поверхности (F′) обозначены черезъ v'_i, ω'_{ik}, x'_i.

Принимая во вниманіе результаты полученные мною въ поименованныхъ выше замѣткахъ нетрудно установить слѣдующія предложенія.

Если между періодами интеграловъ перваго вида относящихся соотвѣтственно къ обѣимъ поверхностямъ, имѣютъ мѣсто билинейныя соотношенія съ цѣлыми коэффиціентами:

$$(1)\qquad I(\omega'_\alpha \mid \omega_\beta) = \sum_i^{p'} \left(\omega'_{\alpha i} \sum_k^{2p} c_{p'+i,k}\, \omega_{\beta k} - \omega'_{\alpha, p'+i} \sum_k^{2p} c_{ik}\, \omega_{\beta k} \right) = 0$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots p' ; \beta = 1, 2, \ldots p),$$

то существуютъ также соотношенія

$$\lambda'_{g1}\omega'_{1i} + \lambda'_{g2}\omega'_{2i} + \ldots + \lambda'_{gp'}\omega'_{p'i} = \sum_k^{2p} c_{ik}\,\omega_{gk}$$

$$(g = 1, 2, \ldots p ; i = 1, 2, \ldots 2p')$$

и имѣетъ мѣсто корреспонденція:

$$(2)\qquad v_g(x_1) + v_g(x_2) + \ldots + v_g(x_p) \equiv \sum_i^{p'} \lambda'_{gi}\, v'_i(x') + C'_i$$

Рангъ матрицы

$$(3)\qquad \left\| \begin{array}{cccc} C_{11}, & C_{12}, & \cdots & C_{1,2p} \\ C_{21}, & C_{22}, & \cdots & C_{2,2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{2p',1}, & C_{2p',2}, & \cdots & C_{2p',2p} \end{array} \right\|$$

есть всегда число четное $2q$, равное удвоенному числу общихъ интегралов приведенія; при этомъ періоды q общихъ интегралов приведенія поверхности (F) приводятся къ рангу q; то же обстоятельство имѣетъ мѣсто для сотовѣтствующихъ имъ интегралов поверхности (F'); Предложеніе это можетъ быть высказано въ слѣдующей формѣ:

Условіе необходимое и достаточное для того чтобы q интегралов перваго вида относящихся къ поверхности (F) *приводились къ интегралам поверхности* (F') *заключается въ томъ, чтобы между ихъ періодами существовали билинейныя соотношенія* (1) *и чтобы рангъ матрицы* (3) *былъ равенъ* $2q$.

При выполненіи условій предыдущей теоремы, приведеніе (2) можетъ быть представлено въ формѣ

$$(4)\qquad \left| \begin{array}{l} v_\alpha(x_1) + v_\alpha(x_2) + \cdots + v_\alpha(x_p) \equiv nv'_\alpha(x') + c'_\alpha \\ v_p(x_1) + v_\beta(x_2) + \cdots + v_\beta(x_p) \equiv c'_\beta \end{array} \right.$$

($\alpha = 1, 2, \cdots q$; $\beta = q+1, \cdots p$) если только измѣнить надлежащимъ образомъ обозначена. Повторяя разсужденія сдѣланныя мною при доказательствѣ одной теоремы, въ первой изъ поименованныхъ замѣтокъ, нетрудно доказать обратное предложеніе.

Если между двумя поверхностями существуетъ корреспонденція, дающая мѣсто сравненіямъ (4), *то сумма путей пройденныхъ группой сопряженныхъ точекъ на поверхности* (F), *соотвѣтствующихъ сомкнутому контуру пройденному точкой x' на поверхности* (F') *эквивалентна суммѣ вида*

$$n_1\varphi_1(\omega) + n_2\varphi_2(\omega) + \cdots + n_{2q}\varphi_{2q}(\omega)$$

гдѣ n; цѣлыя числа; соотвѣтственно этому интегралы v'_α приводятся къ рангу q и періодамъ $n^{-1}\Phi_i(\omega_\alpha) = \Omega'_{\alpha i}$ тогда какъ интегралы v_β къ рангу $p-q$, причемъ ихъ періоды удовлетворяютъ соотношеніямъ $\Phi_i(\omega_\beta) = 0$.

При надлежащихъ обозначеніяхъ можно предполагать что интегралы v_α также приводятся къ рангу q; отсюда слѣдуетъ существованіе билинейныхъ соотношеній (1) съ матрицей ранга $2q$.

Эта теорема вмѣстѣ съ тѣмъ рѣшаетъ вопросъ о приведеніи интегралов второго и третьяго вида. Число интегралов второго вида поверхности (F) приводящихся вдоль группы G къ интегралам поверхности (F') равно q.

Вообще, если I есть произвольный интегралъ поверхности (F), то сумма его значеній, взятая вдоль группы G, приводится къ интегралу поверхности (F') если только его періоды не удовлетворяютъ соотношеніямъ $\varphi_i(\omega) = 0$.

Наряду съ корреспонденціей (2) существуетъ корреспонденція съ матрицей (C'_{ik}) гдѣ

$$C'_{ki} = -C_{p'+i,\,p+k}\,;\; C'_{p+k,\,i} = C_{p'+i,\,k}\,;$$

$$C'_{k,\,p'+i} = C_{i,\,p+k}\,;\; C'_{p+k,\,p'+i} = -C_{ik}$$

Соотвѣтственно этому существуетъ на поверхности подвижная группа точекъ G' вдоль которой q интегралов перваго вида этой поверхности приводятся къ интегралам поверхности (F').