Записки Ленинградского Горного Института. Том XI, вып. 3, 1938
Annales de l'Institut des Mines à Léningrad. Vol. XI, liv. 3, 1938

О предельных сопротивлениях, измеримых на мостиках Уитстона и Томсона с заданной точностью

Асс. А. В. Подопригора

Über die Gränzwiderstände, die messbar sind mit der fixierten Genauigkeit mit Hilfe der Wheatstoneschen und Thomsonschen Brücke

Ass. A. W. Podoprigora

§ 1. Введение

Обыкновенно задача мостика Уитстона или Томсона состоит в отыскании таких условий, при некоторых заданных, чтобы чувствительность схемы оказалась наибольшей. Между тем, известно, что при измерении больших и очень малых сопротивлений чувствительность схемы падает, и может случиться, что даже наивысшая возможная чувствительность при таких сопротивлениях будет ниже требуемой. Поэтому представляется интересным выяснить какие наименьшее и наибольшее сопротивления можно измерить с требуемой относительной точностью на мостике Уитстона или Томсона и каковы должны быть соответственно сопротивления в остальных ветвях при некоторых заданных условиях. Относительную точность мы будем характеризовать отношением:

$$\varepsilon = \frac{R}{\Delta r_1}. \tag{1}$$

Здесь R —значение искомого сопротивления r_1, при котором в гальванометре нет отклонения, и Δr_1—приращение искомого сопротивления, вызывающее в гальванометре ток I_g, являющийся пределом чувствительности гальванометра (для стрелочных гальванометров этот предел равен 10^{-5}—10^{-7} А и для зеркальных 10^{-8}—10^{-11} А). Величина Δr_1 есть часть абсолютной погрешности, допускаемой нами при измерении r_1, зависящая от неточности отсчета по гальванометру. Из формулы мостика Уитстона

$$r_1 \cong \frac{r_2 r_3}{r_4} \tag{2}$$

видно, что абсолютная погрешность, зависящая от неточности значений r_2, r_3, r_4, будет равна:

$$\Delta' r_1 = r_1\left(\frac{\Delta r_2}{r_2} + \frac{\Delta r_3}{r_3} + \frac{\Delta r_4}{r_4}\right),$$

где Δr_2, Δr_3, Δr_4 возможные неточности r_2, r_3, r_4.

Общая абсолютная погрешность при измерении r_1 будет равна:

$$\Delta r_1 + \Delta' r_1. \tag{3}$$

Обратная величина:

$$\frac{1}{\Delta r_1 + \Delta' r_1} \tag{4}$$

есть *абсолютная точность измерения* r_1.

Соответственно, величины

$$\frac{\Delta r_1 + \Delta' r_1}{R} \tag{3'}$$

и

$$\frac{R}{\Delta r_1 + \Delta' r_1} \tag{4'}$$

суть относительная погрешность и относительная точность измерения r_1.

Легко видеть, что определенная таким образом точность будет расти и уменьшаться вместе с числом, ее выражающим. Величина $\varepsilon = \frac{R}{\Delta r_1}$ будет характеризовать точность измерения в той мере, в которой она зависит от чувствительности схемы. Поэтому, как уже указано, мы будем понимать в дальнейшем под относительной точностью величину ε, определенную формулой (1).

В конце этой статьи будет показано, что при измерении очень малых сопротивлений мостики Томсона и Уитстона могут быть применены с равным успехом. Поэтому указанная выше задача в отношении измерения очень малых сопротивлений будет решена для обоих мостиков. Наоборот, для больших сопротивлений мы решим нашу задачу только для мостика Уитстона, так как мостик Томсона никогда не употребляется для измерения больших сопротивлений.

Решим нашу задачу определения минимального и максимального сопротивления, измеримого на мостике Уитстона или Томсона с требуемой точностью ε, при следующих условиях:

1) при заданной электродвижущей силе батареи E и ее внутреннем сопротивлении r_0;

2) при заданной силе тока, проходящей через искомое сопротивление;

3) при заданной мощности, расходуемой на искомом сопротивлении;

4) при заданной мощности, потребляемой всем мостиком.

Во всех четырех случаях предполагается заданной относительная точность ε, предельная чувствительность I_g и внутреннее сопротивление гальванометра r_g.

Первый случай, как более сложный, мы рассмотрим только для мостика Уитстона.

§ 2. О некоторых соотношениях в мостике Уитстона

Переходя к рассмотрению первого случая, установим сначала некоторые соотношения, справедливые для мостика Уитстона при заданном источнике тока, относительной точности ε и сопротивлении гальванометра r_g.

Уравнение мостика при обозначениях рис. 1 будет иметь вид:

$$I_g = \frac{E(r_1 r_4 - r_2 r_3)}{r_g r_0 (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + r_g (r_1 + r_2)(r_3 + r_4) + r_0 (r_1 + r_3)(r_2 + r_4) + \rightarrow}$$
$$\rightarrow \frac{E(r_1 r_4 - r_2 r_3)}{+ r_1 r_2 (r_3 + r_4) + r_3 r_4 (r_1 + r_2)}. \tag{5}$$

Под I_g будем понимать, как уже указывалось, минимальный ток, чувствуемый еще гальванометром (вообще говоря, I_g можно уменьшить повторением наблюдений).

В числителе вместо r_1 подставим его значение $R + \Delta r_1$, которое r_1 принимает при прохождении тока I_g через гальванометр. Тогда числитель примет вид:

$$E \Delta r_1 r_4 \tag{6}$$

вследствие стационарного уравнения мостика:

$$Rr_4 = r_2 r_3. \tag{7}$$

Заменяя в (6) Δr_1 через $\frac{R}{\varepsilon}$ [из (1)], найдем, что числитель (5) равен $E\frac{Rr_4}{\varepsilon}$.

Переворачивая формулу (5), раскрывая скобки, пользуясь равенством (7) и равенством

$$r_1 = R + \Delta r_1 = R\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{8}$$

и деля почленно числитель на знаменатель, получим:

$$\frac{E}{\varepsilon I_g} = r_g r_0\left[\frac{1}{r_1}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]+r_g+$$
$$+r_g\left[\frac{r_3}{r_4}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)+\frac{r_4}{r_3}\right]+r_0\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)+r_0+r_0\left[\frac{r_2}{r_4}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)+\frac{r_4}{r_2}\right]+$$
$$+r_1+r_2\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)+r_3\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)+r_4. \tag{9}$$

Пренебрегая здесь малой величиной $\frac{1}{\varepsilon}$ по сравнению с 1, получим:

$$\frac{E}{\varepsilon I_g} = r_g r_0\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)+r_g\left(\frac{r_3}{r_4}+\frac{r_4}{r_3}\right)+$$
$$+r_0\left(\frac{r_2}{r_4}+\frac{r_4}{r_2}\right)+r_1+r_2+r_3+r_4+2(r_g+r_0) \tag{10}$$

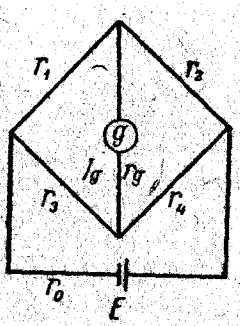


Рис. 1.

или

$$K = r_g r_0\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)+r_g\left(\frac{r_3}{r_4}+\frac{r_4}{r_3}\right)+$$
$$+r_0\left(\frac{r_2}{r_4}+\frac{r_4}{r_2}\right)+r_1+r_2+r_3+r_4, \tag{10'}$$

если мы положим

$$\frac{E}{\varepsilon I_g} - 2(r_g+r_0) = K = \text{const}. \tag{10''}$$

Замечая, что минимальное значение сумм $\frac{r_3}{r_4}+\frac{r_4}{r_3}$ и $\frac{r_2}{r_4}+\frac{r_4}{r_2}$ есть 2, получаем следующие неравенства:

$$r_1+r_2+r_3+r_4+4(r_0+r_g) < \frac{E}{\varepsilon I_g}, \tag{11}$$

$$r_1 < \frac{E}{\varepsilon I_g}. \tag{11'}$$

Если, например, $E = 2$ V, $I_g = 10^{-6}$ A и желаемая относительная точность $\varepsilon = 10^2$, то из (11) легко заключить, что сумма всех 6 составляющих мостик сопротивлений должна быть менее 20 000 Ω. Следовательно, тем более одно сопротивление r_1 должно быть менее 20 000 Ω, для того чтобы оно могло быть измерено с точностью $\varepsilon = 10^2$ при вышеуказанных данных.

В случае измерения малых сопротивлений вместо неравенства (11) можно написать неравенство:

$$r_g r_0\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)+4(r_0+r_g) < \frac{E}{\varepsilon I_g}. \tag{12}$$

Следовательно, измеримое сопротивление будет во всяком случае больше чем

$$r_1 > \frac{r_0 r_g \varepsilon I_g}{E}. \tag{12'}$$

Замечая далее, что сумма $\frac{r_g r_0}{r_1}+r_1$ имеет minimum при $r_1=\sqrt{r_0 r_g}$, т. е. $\min\left(\frac{r_g r_0}{r_1}+r_1\right)=2\sqrt{r_0 r_g}$, $\min\left(\frac{r_g r_0}{r_2}+r_2\right)=2\sqrt{r_0 r_g}$ и т. д., получим:

$$\frac{E}{\varepsilon I_g}\geqslant 4(r_0+r_g+2\sqrt{r_0 r_g}). \tag{13}$$

Вводя величину K, получим вместо (13):

$$K\geqslant 2(r_0+r_g+4\sqrt{r_0 r_g}). \tag{14}$$

Из (13) находим:

$$\varepsilon\leqslant\frac{E}{4I_g\left(r_0+r_g+2\sqrt{r_0 r_g}\right)}. \tag{15}$$

Неравенство (15) дает максимальную точность, достижимую на мостике Уитстона в случае 1. Эта максимальная точность достигается при равенстве всех четырех сопротивлений: $r_1=r_2=r_3=r_4=\sqrt{r_0 r_g}$.

Если $r_g\gg r_0$ (это обычно выполняется), то приближенно можно положить вместо (15):

$$\varepsilon\leqslant\frac{E}{4I_g r_g}, \tag{15'}$$

т. е. максимальная точность ε_0 равна:

$$\varepsilon_0=\frac{E}{4I_g r_g}. \tag{15''}$$

Но $I_g r_g$ есть предельная чувствительность гальванометра к напряжению. Следовательно, *максимальная точность измерения на мостике приближенно равна отношению ЭДС батареи к учетверенной предельной чувствительности гальванометра к напряжению.*

Пример. Пусть $I_g=10^{-6}$ A; $r_g=200\ \Omega$; $E=2$V; $r_0=0{,}5\ \Omega$. Тогда по формуле (15) находим $\varepsilon<2300$. В предельном случае должно быть $r_1=r_2=r_3=r_4=\sqrt{r_0 r_g}=10\ \Omega$.

Возвращаясь к формуле (14), видим, что знак равенства имеет здесь место в том исключительном случае, когда $r_1=r_2=r_3=r_4=\sqrt{r_0 r_g}$ и точность максимальная. Вообще же K значительно более правой части (14), в особенности при очень малых и больших r_1. Поэтому вводимое нами предположение о выполнимости неравенств

$$K\gg r_0;\quad K\gg r_g \tag{16}$$

практически не нарушает общности задачи.

§ 3. Функция $\varepsilon(r_1)$

Heaviside [1]) показал, что при известном приблизительно искомом сопротивлении r_1 для придания мостику наивысшей чувствительности (или наивысшей точности в нашем определении) остальные сопротивления r_2, r_3, r_4 должны быть выбраны следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} r_2&=\sqrt{r_g r_1\frac{r_0+r_1}{r_g+r_1}}\\ r_3&=\sqrt{r_0 r_1\frac{r_g+r_1}{r_0+r_1}}\\ r_4&=\sqrt{r_0 r_g}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

[1]) Heaviside, Phil. Mag. (4), 45, p. 114, 1873.

Подставляя эти значения r_2, r_3, r_4 в уравнение (10), получим точность ε в виде функции от r_1, причем *эта точность будет максимально достижимой при всяком заданном* r_1.

Попробуем представить графически ход функции $\varepsilon(r_1)$. Для построения этого графика мы можем воспользоваться тремя известными нам точками. Именно из уравнения (10) видно, что при $r_1 = 0$ и при $r_1 = \infty$ величина $\frac{E}{\varepsilon I_g}$ будет равняться бесконечности, т. е. будет $\varepsilon = 0$. Далее, как уже указывалось, ε будет иметь maximum при $r_1 = \sqrt{r_0 r_g}$. Таким образом можно построить кривую, изображенную на рис. 2. Докажем, *что функция* $\varepsilon(r_1)$ *монотонно убывает по обе стороны от своего максимального значения.*

Пусть в общем случае

$$r_1 = N\sqrt{r_0 r_g}, \tag{18}$$

где N — некоторое положительное число от 0 до ∞. Докажем, что если $N > 1$, то при любом значении N ε будет меньше своего максимального значения, причем тем меньше, чем больше N. Если же $N < 1$, то ε будет тем меньше, чем меньше N.

При (18) для r_2 и r_3 на основании (17) получаем:

$$\left.\begin{aligned} r_2 &= \sqrt{r_g N\sqrt{r_0 r_g}\,\frac{r_0 + N\sqrt{r_0 r_g}}{r_g + N\sqrt{r_0 r_g}}} \\ r_3 &= \sqrt{r_0 N\sqrt{r_0 r_g}\,\frac{r_g + N\sqrt{r_0 r_g}}{r_0 + N\sqrt{r_0 r_g}}} \end{aligned}\right\}. \tag{19}$$

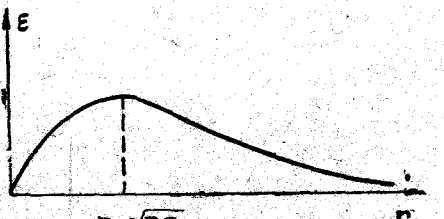


Рис. 2.

При $N = 1$, очевидно, $r_2 = r_3 = \sqrt{r_0 r_g}$.

При $N > 1$ r_2 и r_3 будут больше, чем $\sqrt{r_0 r_g}$ и притом тем больше, чем больше N. В самом деле, вместо (19) можно написать:

$$\left.\begin{aligned} r_2 &= \sqrt{r_g\sqrt{r_0 r_g}\,\frac{r_0 + N\sqrt{r_0 r_g}}{\frac{r_g}{N} + \sqrt{r_0 r_g}}} \\ r_3 &= \sqrt{r_0\sqrt{r_0 r_g}\,\frac{r_g + N\sqrt{r_0 r_g}}{\frac{r_0}{N} + \sqrt{r_0 r_g}}} \end{aligned}\right\}. \tag{20}$$

При увеличении N числитель под корнем будет увеличиваться, а знаменатель уменьшаться, следовательно, r_2 и r_3 будут непрерывно увеличиваться с увеличением N.

Далее, при $N < 1$ r_2 и r_3 будут меньше $\sqrt{r_0 r_g}$ и притом тем меньше, чем меньше N, что также легко видеть из (20).

Таким образом, можно положить, вместе с (18):

$$r_2 = L\sqrt{r_0 r_g}; \quad r_3 = M\sqrt{r_0 r_g}. \tag{21}$$

L и M будут функциями от N, причем они будут увеличиваться и уменьшаться вместе с увеличением и уменьшением N; когда $N = 1$, то и $L = M = 1$. Подставим теперь значения r_1, r_2, r_3, из (18) и (21) в (10). Вместо r_4 подставим его наиболее благоприятное значение $\sqrt{r_0 r_g}$. Тогда мы получим вместо уравнения (10):

$$\frac{E}{\varepsilon I_g} = 2(r_g + r_0 + \sqrt{r_0 r_g}) + \sqrt{r_0 r_g}\left(\frac{1}{N} + N\right) + \sqrt{r_0 r_g}\left(\frac{1}{L} + L\right) +$$
$$+ \sqrt{r_0 r_g}\left(\frac{1}{M} + M\right) + r_g\left(\frac{1}{M} + M\right) + r_0\left(\frac{1}{L} + L\right). \tag{22}$$

Обозначая постоянную сумму $2(r_g+r_0+\sqrt{r_0 r_g})$ через α и собирая члены, получим:

$$\frac{E}{\varepsilon I_g}=\alpha+\sqrt{r_0 r_g}\left(\frac{1}{N}+N\right)+(r_g+\sqrt{r_0 r_g})\left(\frac{1}{M}+M\right)+$$

$$+(r_0+\sqrt{r_0 r_g})\left(\frac{1}{L}+L\right). \qquad (23)$$

Каждая из сумм $\frac{1}{N}+N$, $\frac{1}{M}+M$, $\frac{1}{L}+L$ представляет собой монотонно возрастающую функцию по обе стороны от единичного значения аргументов, при котором она имеет свой minimum, поскольку аргументы N, M, L по своему физическому смыслу могут иметь только положительные значения. При возрастании N от 1 и выше, каждое слагаемое правой части (23) (кроме конечно α) будет непрерывно увеличиваться, следовательно, будет непрерывно увеличиваться и вся правая часть (23). Точно также при уменьшении N от 1 и ниже правая часть (23) будет непрерывно расти, т. е. ε будет по обе стороны от максимума непрерывно уменьшаться. Тем самым высказанная выше теорема доказана.

Доказанная теорема позволяет заключить, что „наименьшее“ и „наибольшее“ сопротивления, измеренные с заданной точностью, имеют вполне однозначный смысл.

Легко видеть, что искомые нами наименьшее и наибольшее сопротивления лежат на кривой $\varepsilon(r_1)$ (изображенной на рис. 2), удовлетворяющей в каждой своей точке условиям Heaviside (17). Пусть, например, нам надо определить наименьшее сопротивление, которое может быть измерено с точностью ε'. Искомое сопротивление r_1' будет, очевидно, то, при котором функция $\varepsilon(r_1)$, удовлетворяющая условиям Heaviside, достигает значения ε'. В самом деле, всякая другая функция $\bar{\varepsilon}(r_1)$, не удовлетворяющая условиям Heaviside, будет при любом значении r_1 ниже функции $\varepsilon(r_1)$ и, следовательно, она будет достигать заданного значения ε' не при r_1', а при несколько большем значении r_1'' (или совсем не будет достигать значения ε'). Но r_1'' не является наименьшим значением, измеримым с точностью ε', с этой точностью можно измерить еще меньшее сопротивление r_1'. То же самое можно повторить и для определения наибольшего значения. Таким образом наибольшее и наименьшее сопротивления обязательно лежат на кривой $\varepsilon(r_1)$, удовлетворяющей условиям Heaviside.

§ 4. Первое приближение для наименьшего и наибольшего значения r_1

Из уравнения (10′) видно, что для того чтобы r_1 достигло возможно меньшего значения, необходимо, чтобы член $\frac{r_g r_0}{r_1}$ составлял возможно значительную часть K — постоянного значения всей суммы правой части (10′). Можно доказать, что при соблюдении неравенств (16), r_2, r_3, r_4 могут быть выбраны так, что член $\frac{r_g r_0}{r_1}$ будет по своей величине доминировать над остальными членами правой части (10′) и, следовательно, он будет близок к K. *Если это будет доказано, то можно с очевидностью заключить, что для наименьшего возможного r_1 член $\frac{r_g r_0}{r_1}$ будет тем более близок к K.*

Для доказательства положим, что

$$\left.\begin{aligned} r_2&=r_0\sqrt{\frac{r_g}{K}}\\ r_3&=r_g\sqrt{\frac{r_0}{K}}\\ r_4&=m\sqrt{r_0 r_g}\end{aligned}\right\}, \qquad (24)$$

Отсюда, на основании условия мостика $r_1 r_4 \cong r_2 r_3$, получим также r_1:

$$r_1 = \frac{r_0 r_g}{mK}. \tag{25}$$

Здесь m — неопределенный пока коэфициент, который необходимо выбрать так, чтобы было удовлетворено уравнение (10′). Очевидно m должно быть менее единицы, так как всегда $K > \frac{r_0 r_g}{r_1}$.

Подставив значения r_1, r_2, r_3, r_4 из (24) и (25) в уравнение (10′), получим после сокращений и расположения всех членов по степеням m:

$$m^2(K+\sqrt{r_g K}+\sqrt{r_0 K}+\sqrt{r_0 r_g}) -$$
$$-m\left(K-\sqrt{Kr_g}-\sqrt{Kr_0}-r_0\sqrt{\frac{r_g}{K}}-r_g\sqrt{\frac{r_0}{K}}\right)+$$
$$+\left(r_g\sqrt{\frac{r_g}{K}}+r_0\sqrt{\frac{r_0}{K}}+\sqrt{r_0 r_g}+\frac{r_0 r_g}{K}\right). \tag{26}$$

В первых скобках сумма $\sqrt{r_g K}+\sqrt{r_0 K}+\sqrt{r_0 r_g}$ мала по сравнению с K на основании неравенств (16). Обозначим эту сумму через δ_1. Во вторых скобках сумма четырех последних членов мала по сравнению с первым. Обозначим эту сумму через δ_2. Последнюю скобку, малую по сравнению с K, обозначим через δ_3.

Тогда получим вместо (26):

$$m^2(K+\delta_1) - m(K-\delta_2)+\delta_3 = 0$$

или

$$m^2 - m\frac{K-\delta_2}{K+\delta_1} + \frac{\delta_3}{K+\delta_1}. \tag{27}$$

Отсюда:

$$m = \frac{1}{2}\frac{K-\delta_2}{K+\delta_1} \pm \sqrt{4\left(\frac{K-\delta_2}{K+\delta_1}\right)^2 - \frac{\delta_3}{K+\delta_1}}. \tag{28}$$

Выберем только положительный знак перед корнем. Тогда после простых преобразований получим:

$$m = \frac{1}{2}\frac{K-\delta_2}{K+\delta_1} + \frac{K}{2(K+\delta_1)}\sqrt{1-\frac{2(\delta_2+2\delta_3)}{K}+\frac{\delta_2-4\delta_1\delta_3}{K^2}}. \tag{29}$$

Воспользовавшись тем, что δ_1, δ_2, δ_3 малы по сравнению с K, разложим это выражение в ряд, ограничившись первыми степенями членов вида $\frac{\delta_1}{K}$, $\frac{\delta_2}{K}$, $\frac{\delta_3}{K}$:

$$m = 1 - \frac{\delta_1+\delta_2+\delta_3}{K}. \tag{30}$$

Вследствие малости величин δ_1, δ_2, δ_3 по сравнению с K, можно положить в первом приближении $m \cong 1$ и следовательно, на основании (25), будем иметь в первом грубом приближении:

$$r_{1\,\min} \cong \frac{r_0 r_g}{K}. \tag{31}$$

Для того чтобы выяснить, насколько наши приближения практически допустимы, рассмотрим пример.

Пусть $I_g = 10^{-6}$ A; $r_g = 2 \cdot 10^2$ Ω; $r_0 = 1$ Ω; $E = 2$ V; $\varepsilon = 10^2$. Вычисляем K, δ_1, δ_2, δ_3:

$$K = \frac{E}{\varepsilon I_g} - 2(r_g + r_0) \cong 19\,600\ \Omega$$

$$\delta_1 = \sqrt{r_g K}+\sqrt{r_0 K}+\sqrt{r_0 r_g} \cong 2150\ \Omega$$

$$\delta_2 = \sqrt{r_g K}+\sqrt{r_0 K}+r_0\sqrt{\frac{r_g}{K}}+r_g\sqrt{\frac{r_0}{K}} \cong 2140\ \Omega$$

$$\delta_3 = \sqrt{r_0 r_g}+r_g\sqrt{\frac{r_g}{K}}+r_0\sqrt{\frac{r_0}{K}}+\frac{r_0 r_g}{K} \cong 34\ \Omega.$$

По формуле (31) находим:

$$m = 1 - \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}{K} \cong 0{,}779.$$

Если бы мы вычислили m по точной формуле (28), то получили бы:

$$m \cong 0{,}801.$$

Таким образом, точная формула (28) дает для m даже более близкое к единице значение, чем приближенная формула (30). Отсюда видно, что высказанное в начале этого параграфа предположение при условии выполнимости неравенств (16) оказывается справедливым. Следовательно, для наименьшего r_1, которое может быть измерено с точностью ε, тем более будет в первом приближении оправдываться равенство (31).

Переходя к вопросу об отыскании *наибольшего* сопротивления, которое может быть измерено с заданной точностью, заметим, что для того, чтобы r_1 достигало возможно большего значения, необходимо чтобы член r_1 в уравнении (10′) составлял возможно значительную часть K — постоянного значения всей суммы правой части уравнения (10′). Можно доказать совершенно так же, как это было доказано для случая наименьшего сопротивления, что r_2, r_3, r_4 можно выбрать таким образом, чтобы в первом грубом приближении выполнялось равенство:

$$r_{1_{max}} \cong K. \tag{32}$$

§ 5. Наименьшее сопротивление $r_{1_{min}}$, измеримое на мостике с заданной точностью и соответствующие ему r_2, r_3 и r_4

Будем решать поставленную в § 1 задачу 1 для случая наименьшего сопротивления.

Выпишем сначала формулу (31), дающую первое приближение для $r_{1_{min}}$:

$$r_{1_{min}} \cong \frac{r_0 r_g}{K}. \tag{31}$$

На основании неравенств (16) можно заключить, что выполняются также неравенства:

$$r_{1_{min}} \ll r_0; \quad r_{1_{min}} \ll r_g \tag{33}$$

Из (31) и условий (17) Heaviside, которые, как показано в § 3, должны быть выполнены, получим значения r_2 и r_3, соответствующие $r_{1_{min}}$:

$$\left.\begin{aligned} r_2 &\cong \sqrt{r_g \frac{r_0 r_g}{K} \frac{r_0 + r_{1min}}{r_g + r_{1min}}} \\ r_3 &\cong \sqrt{r_0 \frac{r_0 r_g}{K} \frac{r_g + r_{1min}}{r_0 + r_{1min}}} \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

В последних формулах, на основании неравенств (33), можно положить:

$$\left.\begin{aligned} \frac{r_0 + r_{1min}}{r_g + r_{1min}} &\cong \frac{r_0}{r_g} \\ \frac{r_g + r_{1min}}{r_0 + r_{1min}} &\cong \frac{r_g}{r_0} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Поэтому получаем в первом приближении следующие значения r_1, r_2, r_3, r_4, соответствующие задаче об определении минимального сопротивления с заданной точностью:

$$\left.\begin{aligned} r_{1\min} &\cong \frac{r_0 r_g}{K} \\ r_2 &\cong r_0\sqrt{\frac{r_g}{K}} \\ r_3 &\cong r_g\sqrt{\frac{r_0}{K}} \\ r_4 &= \sqrt{r_0 r_g} \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

здесь K определяется из (10″).

Для определения $r_{1\min}$ со вторым приближением подставим значения r_2, r_3, r_4 из (36) в уравнение (10′) и определим величину $\frac{r_0 r_g}{r_{1\min}}$:

$$\frac{r_0 r_g}{r_{1\min}} = K - \left[2\left(\sqrt{r_g K} + \sqrt{r_0 K} + \sqrt{r_0 r_g}\right) + r_g\sqrt{\frac{r_g}{K}} + r_0\sqrt{\frac{r_0}{K}} + r_0\sqrt{\frac{r_g}{K}} + r_g\sqrt{\frac{r_0}{K}} + \frac{r_0 r_g}{K}\right]. \tag{37}$$

В первой части вместо малого члена $r_{1\min}$ подставлено его приближенное значение из (36).

Легко видеть, что в квадратной скобке члены $2\sqrt{r_g K}$ и $\sqrt{r_0 K}$ на основании неравенств (16) значительно превосходят все остальные члены. Поэтому во втором приближении можно положить:

$$\frac{r_0 r_g}{r_{1\min}} \cong K - 2\left(\sqrt{r_g K} + \sqrt{r_0 K}\right)$$

и для $r_{1\min}$ получается значение:

$$r_{1\min} \cong \frac{r_0 r_g}{K - 2\left(\sqrt{r_g K} + \sqrt{r_0 K}\right)}. \tag{38}$$

Легко убедиться, что при вычислении r_2 и r_3 при помощи формул (38) и (17) со вторым приближением можно еще воспользоваться равенствами (35). Поэтому получаем:

$$\left.\begin{aligned} r_2 &\cong \sqrt{r_g \frac{r_0 r_g}{K - 2\left(\sqrt{r_g K} + \sqrt{r_0 K}\right)} \cdot \frac{r_0}{r_g}} \\ r_3 &\cong \sqrt{r_0 \frac{r_0 r_g}{K - 2\left(\sqrt{r_g K} + \sqrt{r_0 K}\right)} \cdot \frac{r_g}{r_0}} \end{aligned}\right\}. \tag{39}$$

Следовательно, решение нашей задачи во втором приближении может быть представлено формулами:

$$\left.\begin{aligned} r_{1\min} &\cong \frac{r_0 r_g}{K} \cdot \frac{1}{1 - 2\left(\sqrt{\frac{r_g}{K}} + \sqrt{\frac{r_0}{K}}\right)} \\ r_2 &\cong r_0\sqrt{\frac{r_g}{K}}\sqrt{\frac{1}{1 - 2\left(\sqrt{\frac{r_g}{K}} + \sqrt{\frac{r_0}{K}}\right)}} \\ r_3 &\cong r_g\sqrt{\frac{r_0}{K}}\sqrt{\frac{1}{1 - 2\left(\sqrt{\frac{r_g}{K}} + \sqrt{\frac{r_0}{K}}\right)}} \\ r_4 &= \sqrt{r_0 r_g}. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Для вычисления $r_{1\min}$ с третьим приближением удобно r_2 и r_3 написать в виде:

$$\left.\begin{aligned} r_2 &\cong r_0\sqrt{\frac{r_g}{K}}\left(1+\sqrt{\frac{r_g}{K}}+\sqrt{\frac{r_0}{K}}\right)\\ r_3 &\cong r_g\sqrt{\frac{r_0}{K}}\left(1+\sqrt{\frac{r_g}{K}}+\sqrt{\frac{r_0}{K}}\right)\end{aligned}\right\}. \tag{41}$$

Эти выражения получаются из (40), если только пренебречь квадратными и высшими ступенями малых величин $\sqrt{\frac{r_g}{K}}$, $\sqrt{\frac{r_0}{K}}$ по сравнению с единицей.

Подставляя r_2 и r_2 из (41) и r_4 из (40) в (10′), получим для $\frac{r_0r_g}{r_{1\min}}$ значение:

$$\frac{r_0r_g}{r_{1\min}} = K-\left[2\sqrt{r_gK}\left(1-\sqrt{\frac{r_g}{K}}-\sqrt{\frac{r_0}{K}}\right)+2\sqrt{r_0K}\left(1-\sqrt{\frac{r_g}{K}}-\sqrt{\frac{r_0}{K}}\right)+\right.$$

$$+2\sqrt{r_0r_g}+r_g\sqrt{\frac{r_g}{K}}\left(1+\sqrt{\frac{r_g}{K}}+\sqrt{\frac{r_0}{K}}\right)+r_0\sqrt{\frac{r_0}{K}}\left(1+\sqrt{\frac{r_g}{K}}+\sqrt{\frac{r_0}{K}}\right)+$$

$$\left.+\frac{r_0r_g}{K}+\left(r_g\sqrt{\frac{r_0}{K}}+r_0\sqrt{\frac{r_g}{K}}\right)\left(1+\sqrt{\frac{r_g}{K}}+\sqrt{\frac{r_0}{K}}\right)\right]. \tag{42}$$

В правой части (42) сохраним только члены первых трех порядков малости по сравнению с K вида K; $\sqrt{r_gK}$, $\sqrt{r_0K}$; r_g, r_0, $\sqrt{r_0r_g}$. Членами следующих порядков малости, например, $r_g\sqrt{\frac{r_0}{K}}$, $r_0\sqrt{\frac{r_g}{K}}$ и т. д. пренебрежем.

Тогда получим:

$$\frac{r_0r_g}{r_{1\min}} = K-2\left[\sqrt{r_gK}+\sqrt{r_0K}-r_g-r_0-\sqrt{r_0r_g}\right]. \tag{43}$$

Отсюда находим $r_{1\min}$ и при помощи (17) также соответствующие r_2 и r_3. Таким образом получаем следующее решение нашей задачи в третьем приближении:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &\cong \frac{r_0r_g}{K}\cdot\frac{1}{1-2\left[\sqrt{\frac{r_g}{K}}+\sqrt{\frac{r_0}{K}}-\frac{r_0+r_g+\sqrt{r_0r}}{K}\right]}\\ r_2 &\cong r_0\sqrt{\frac{r_g}{K}}\sqrt{\frac{1}{1-2\left[\sqrt{\frac{r_g}{K}}+\sqrt{\frac{r_0}{K}}-\frac{r_0+r_g+\sqrt{r_0r_g}}{K}\right]}\cdot\frac{1+\frac{r_g}{K}}{1+\frac{r_0}{K}}}\\ r_3 &\cong r_g\sqrt{\frac{r_0}{K}}\sqrt{\frac{1}{1-2\left[\sqrt{\frac{r_g}{K}}+\sqrt{\frac{r_0}{K}}-\frac{r_0+r_g+\sqrt{r_0r_g}}{K}\right]}\cdot\frac{1+\frac{r_0}{K}}{1+\frac{r_g}{K}}}\\ r_4 &= \sqrt{r_0r_g}.\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

При вычислении r_2 и r_3 мы вместо равенств (35) полагали:

$$\left.\begin{aligned} \frac{r_0+r_1}{r_g+r_1} &\simeq \frac{r_0+\frac{r_0 r_g}{K}}{r_g+\frac{r_0 r_g}{K}} = \frac{r_0}{r_g}\,\frac{1+\frac{r_g}{K}}{1+\frac{r_0}{K}} \\ \frac{r_g+r_1}{r_0+r_1} &\simeq \frac{r_g}{r_0}\,\frac{1+\frac{r_0}{K}}{1+\frac{r_g}{K}}. \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

Равенства (45) дают возможность определить второй корень в выражениях для r_2 и r_3 (44) до членов третьего порядка малости по сравнению с единицей (считаем единицу имеющей первый порядок малости, выражения вида $\sqrt{\frac{r_g}{K}}$, $\sqrt{\frac{r_0}{K}}$ — второй порядок и выражения $\frac{r_0}{K}$, $\frac{r_g}{K}$, $\frac{\sqrt{r_0 r_g}}{K}$ — третий порядок).

Рассмотрим два примера.

1. Требуется определить минимальное сопротивление, могущее быть измеренным на мостике с помощью обыкновенного стрелочного гальванометра и 2-вольтового аккумулятора с точностью $\varepsilon = 100$. Пусть, например, $I_g = 10^{-6}$A, $r_g = 200\,\Omega$; $r_0 = 0{,}5\ \Omega$. $E = 2$ V. По формулам (36) находим в первом приближении:

$$K = \frac{E}{\varepsilon I_g} - 2(r_g + r_0) \cong 2 \cdot 10^4\ \Omega$$

$$r_{1\min} = \frac{r_0 r_g}{K} = 5 \cdot 10^{-3}\ \Omega$$

$$r_2 = r_0\sqrt{\frac{r_g}{K}} = 5 \cdot 10^{-2}\ \Omega$$

$$r_3 = r_g\sqrt{\frac{r_0}{K}} = 1\ \Omega$$

$$r_4 = \sqrt{r_0 r_g} = 10\ \Omega.$$

По формулам (40) и (44) находим $r_{1\min}$, r_2, r_3, r_4 во втором и третьем приближениях:

2-е приближение	3-е приближение
$r_{1\min} = 6{,}3 \cdot 10^{-3}\ \Omega$	$r_{1\min} = 6{,}2 \cdot 10^{-3}\ \Omega$
$r_2 = 5{,}6 \cdot 10^{-2}\ \Omega$	$r_2 = 5{,}55 \cdot 10^{-2}\ \Omega$
$r_3 = 1{,}12\ \Omega$	$r_3 = 1{,}11\ \Omega$
$r_4 = 10\ \Omega$	$r_4 = 10\ \Omega$.

Из рассмотренного примера видно, что для практических целей вполне достаточно пользоваться уже вторым приближением.

2. Требуется решить ту же задачу для случая измерения особенно малых сопротивлений с большой точностью. Возьмем гальванометр высокой чувствительности и притом с малым внутренним сопротивлением, например, фирмы Kipp u. Zonen, Zc. Этот гальванометр очень удобен, благодаря своему малому периоду ($T = 1{,}3$ *сек*, что позволяет увеличить токовую нагрузку) и нулевому внешнему критическому сопротивлению. Итак, пусть $I_g = 0{,}5 \cdot 10^{-8}$ A [1]); $r_g = 47\ \Omega$; $E = 2$ V; $r_0 = 2 \cdot 10^{-2}\ \Omega$; $\varepsilon = 10^4$. Поэтому

$$K \cong \frac{E}{\varepsilon I_g} = 4 \cdot 10^4\ \Omega$$

[1]) Такой ток дает отклонение в 1 *мм* на расстоянии шкалы в 1 *м*.

и по формулам (36) находим значения $r_{1\min}$ и соответствующие r_2, r_3, r_4:

$$r_{1\min} = \frac{r_0 r_g}{K} \cong 2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \Omega$$

$$r_2 = r_0 \sqrt{\frac{r_g}{K}} \cong 0{,}7 \cdot 10^{-3}\ \Omega$$

$$r_3 = r_g \sqrt{\frac{r_0}{K}} \cong 3{,}3 \cdot 10^{-2}\ \Omega$$

$$r_4 = \sqrt{r_0 r_g} \cong 0{,}97\ \Omega.$$

Легко видеть, что при вышеуказанных условиях через сопротивления r_1 и r_2 будет итти ток порядка 100 А, который можно получить от параллельного ряда аккумуляторов. Но такой ток допустим в том случае, если в качестве сопротивления r_2 взять, например, эталон фирмы Сименс и Гальске или Гартман и Браун.

§ 6. Наибольшее сопротивление $r_{1\max}$, измеримое на мостике Уитстона с заданной точностью и соответствующие ему сопротивления остальных ветвей мостика

Выпишем формулу (32), дающую первое приближение для $r_{1\max}$:

$$r_{1\max} \cong K. \tag{32}$$

На основании неравенств (16) можно заключить, что выполняются также неравенства:

$$r_{1\max} \gg r_0; \quad r_{1\max} \gg r_g. \tag{46}$$

Из (32) и условий (17) Heaviside получаем значения r_2 и r_3, соответствующие $r_{1\max}$:

$$\left.\begin{aligned} r_2 &= \sqrt{r_g r_{1\max} \frac{r_0 + r_{1\max}}{r_g + r_{1\max}}} \\ r_3 &= \sqrt{r_0 r_{1\max} \frac{r_g + r_{1\max}}{r_0 + r_{1\max}}} \end{aligned}\right\}. \tag{47}$$

В этих формулах на основании неравенств (46) можно положить:

$$\frac{r_0 + r_{1\max}}{r_g + r_{1\max}} \cong 1; \quad \frac{r_g + r_{1\max}}{r_0 + r_{1\max}} \cong 1. \tag{48}$$

Применяя к формуле (47) равенства (48) и (32), получаем следующее решение нашей задачи в первом приближении:

$$\left.\begin{aligned} r_{1\max} &\cong K; & r_2 &\cong \sqrt{r_g K} \\ r_3 &\cong \sqrt{r_0 K}; & r_4 &= \sqrt{r_0 r_g}. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Здесь K определяется из (10″).

Для определения $r_{1\max}$ со вторым приближением подставим значения r_2, r_3, r_4 из (49) в уравнение мостика (10′) и разрешим это уравнение относительно $r_{1\max}$ (причем в малом числе $\frac{r_0 r_g}{r_{1\max}}$ подставим вместо r_1 его приближенное значение $r_{1\max} \cong K$). Тогда получим:

$$r_{1\max} = K - \left[2\left(\sqrt{r_g K} + \sqrt{r_0 K} + \sqrt{r_0 r_g}\right) + r_0 \sqrt{\frac{r_g}{K}} + r_g \sqrt{\frac{r_0}{K}} + r_0 \sqrt{\frac{r_0}{K}} + r_g \sqrt{\frac{r_g}{K}} + \frac{r_0 r_g}{K}\right]. \tag{50}$$

В квадратных скобках члены $\sqrt{r_g K}$ и $\sqrt{r_0 K}$ значительно превосходят все остальные члены на основании неравенств (16). Поэтому во втором приближении полагаем:

$$r_{1_{\max}} = K - 2(\sqrt{r_g K} + \sqrt{r_0 K}). \tag{51}$$

Легко усмотреть, что при вычислении r_2 и r_3 со вторым приближением [по формулам (51) и (17)] можно еще пользоваться равенствами (48). Поэтому получаем:

$$\left.\begin{aligned} r_2 &\cong \sqrt{r_g[K - 2(\sqrt{r_g K} + \sqrt{r_0 K})}\\ r_3 &\cong \sqrt{r_0[K - 2(\sqrt{r_g K} + \sqrt{r_0 K})} \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Таким образом решением нашей задачи во втором приближении будут формулы:

$$\left.\begin{aligned} r_{1_{\max}} &\cong K\left[1 - 2\left(\sqrt{\frac{r_g}{K}} + \sqrt{\frac{r_0}{K}}\right)\right]\\ r_2 &\cong \sqrt{r_g K}\sqrt{1 - 2\left(\sqrt{\frac{r_g}{K}} + \sqrt{\frac{r_0}{K}}\right)}\\ r_3 &\cong \sqrt{r_0 K}\sqrt{1 - 2\left(\sqrt{\frac{r_g}{K}} + \sqrt{\frac{r_0}{K}}\right)}\\ r_4 &\cong \sqrt{r_0 r_g}. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Для вычисления $r_{1_{\max}}$ с третьим приближением удобно r_2 и r_3 из (53) разложить в ряд, ограничившись первыми степенями малых величин $\sqrt{\frac{r_g}{K}}$, $\sqrt{\frac{r_0}{K}}$:

$$\left.\begin{aligned} r_2 &= \sqrt{r_g K}\left(1 - \sqrt{\frac{r_g}{K}} - \sqrt{\frac{r_0}{K}}\right)\\ r_3 &= \sqrt{r_0 K}\left(1 - \sqrt{\frac{r_g}{K}} - \sqrt{\frac{r_0}{K}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Подставляя r_2 и r_3 из (54) и r_4 из (53) в (10′), получим для $r_{1_{\max}}$ значение:

$$r_{1_{\max}} = K - \left[2\left\{\sqrt{r_g K}\left(1 - \sqrt{\frac{r_g}{K}} - \sqrt{\frac{r_0}{K}}\right) + \sqrt{r_0 K}\left(1 - \sqrt{\frac{r_g}{K}} - \sqrt{\frac{r_0}{K}}\right) + \sqrt{r_0 r_g}\right\} + \left(r_g\sqrt{\frac{r_g}{K}} + r_0\sqrt{\frac{r_0}{K}} + r_g\sqrt{\frac{r_0}{K}} + r_0\sqrt{\frac{r_g}{K}}\right)\left(1 + \sqrt{\frac{r_g}{K}} + \sqrt{\frac{r_0}{K}}\right) + \frac{r_0 r_g}{K}\right]. \tag{55}$$

В правой части (55) сохраним только члены первых трех порядков малости по отношению к K вида K; $\sqrt{r_g K}$, $\sqrt{r_0 K}$; r_g, r_0, $\sqrt{r_0 r_g}$. Членами следующих порядков малости пренебрежем. Тогда получим:

$$r_{1_{\max}} = K - 2(\sqrt{r_g K} + \sqrt{r_0 K} - r_0 - r_g - \sqrt{r_0 r_g}). \tag{56}$$

Заменяя равенства (48) более точными,

$$\left.\begin{aligned}\frac{r_0+r_{1\max}}{r_g+r_{1\max}} &\cong \frac{1+\frac{r_0}{K}}{1+\frac{r_g}{K}}\\ \frac{r_g+r_{1\max}}{r_0+r_{1\max}} &\cong \frac{1+\frac{r_g}{K}}{1+\frac{r_0}{K}}\end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

найдем r_2 и r_3, соответствующие $r_{1\max}$ в третьем приближении:

$$\left.\begin{aligned} r_2 &= \sqrt{r_g K}\sqrt{[1-2(\sqrt{r_g K}+\sqrt{r_0 K}-r_0-r_g-\sqrt{r_0 r_g})]\,\frac{1+\frac{r_0}{K}}{1+\frac{r_g}{K}}}\\ r_3 &= \sqrt{r_0 K}\sqrt{[1-2(\sqrt{r_g K}+\sqrt{r_0 K}-r_0-r_g-\sqrt{r_0 r_g})]\,\frac{1+\frac{r_g}{K}}{1+\frac{r_0}{K}}}\end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

Рассмотрим два примера.

1. Пусть требуется определить максимальное сопротивление, могущее быть измеренным на мостике с помощью обыкновенного стрелочного гальванометра и 2-вольтового аккумулятора. Положим $I_g = 10^{-6}$ A; $r_g = 200$ Ω; $r_0 = 0{,}5$ Ω; $E = 2$ V; $\varepsilon = 100$.

По формулам (49) (первое приближение) находим:

$$\begin{aligned} r_{1\max} &\cong K \cong \frac{E}{\varepsilon I_g} = 20000\ \Omega\\ r_2 &\cong \sqrt{r_g K} = 2000\ \Omega\\ r_3 &\cong \sqrt{r_0 K} = 100\ \Omega\\ r_4 &= \sqrt{r_0 r_g} = 10\ \Omega.\end{aligned}$$

2. Пусть требуется решить ту же задачу при использовании высокочувствительного гальванометра (при том с большим внутренним сопротивлением). Возьмем, например, гальванометр Hartman u. Braun № 159. Итак, пусть $I_g' = 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ A; $r_g = 2 \cdot 10^5$ Ω; $r_0 = 10$ Ω; $E = 100$ V; $\varepsilon = 10^2$.

Сначала находим

$$\begin{aligned} K &= \frac{E}{\varepsilon I_g} - 2(r_g+r_0) \cong 2 \cdot 10^{10}\ \Omega\\ r_{1\max} &\cong K \cong 2 \cdot 10^{10}\ \Omega\\ r_2 &\cong \sqrt{r_g K} \cong 6{,}5 \cdot 10^7\ \Omega\\ r_3 &\cong \sqrt{r_0 K} \cong 4{,}5 \cdot 10^5\ \Omega\\ r_4 &= \sqrt{r_0 r_g} \cong 1{,}4 \cdot 10^3\ \Omega.\end{aligned}$$

При пользовании электростатической машиной с ЭДС, равной $E = 10^5$ V, получаем при данных 2-го примера $r_{i_{\max}} \cong K = 2 \cdot 10^{13}$ Ω. Отсюда следует возможность применения мостика Уитстона для измерения сопротивления изоляторов.

§ 7. Симметричность решений задач о наибольшем и наименьшем сопротивлении

Сравнивая выражения для $r_{1_{max}}$ и $r_{1_{min}}$ и для соответствующих им r_2, r_3, r_4 во всех трех приближениях [формулы (36), (40), (44) и (49), (53), (56)—(58)], замечаем, что имеют место следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} r_{1_{min}} \cdot r_{1_{max}} &= r_0 r_g \\ r_{2(min)} \cdot r_{2(max)} &= r_0 r_g \ ^{1}) \\ r_{3(min)} \cdot r_{3(max)} &= r_0 r_g \\ r_{4(min)} \cdot r_{4(max)} &= r_0 r_g \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

Последнее из этих соотношений является следствием того, что r_4 должно всегда равняться $\sqrt{r_0 r_g}$, если мостик работает с наивысшей чувствительностью.

Формулы (59) справедливы в общем случае, а не только в случае первых трех приближений. Докажем это. Перепишем „каноническое“ уравнение мостика (10′):

$$K = r_g r_0 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right) +$$

$$+ r_g \left(\frac{r_3}{r_4} + \frac{r_4}{r_3}\right) + r_0 \left(\frac{r_2}{r_4} + \frac{r_4}{r_2}\right) + r_1 + r_2 + r_3 + r_4. \qquad (10')$$

Положим, что мы нашли максимально возможное $r_1 = r_{1_{max}}$ и соответствующие ему r_2, r_3, r_4, такие, что будет удовлетворено условие мостика $r_2 r_3 \cong r_1 r_4$. Таким образом вся сумма в правой части (10′), кроме r_1, будет составлять наименьшую возможную часть от постоянной величины K. Будем теперь искать наименьшее возможное значение $r_1 = r_{1_{min}}$ и соответствующие ему r_2, r_3, r_4. Для этого введем сначала новые переменные:

$$R_1 = \frac{r_g r_0}{r_1}; \quad R_2 = \frac{r_g r_0}{r_2}; \quad R_3 = \frac{r_g r_0}{r_3}; \quad R_4 = \frac{r_g r_0}{r_4} = r_4. \qquad (60)$$

Последнее из этих равенств имеет место потому, что всегда должно быть $r_4 = \sqrt{r_0 r_g}$, согласно условиям Heaviside. В новых обозначениях уравнение (10′) перепишется так:

$$K = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + r_g \left(\frac{R_4}{R_3} + \frac{R_3}{R_4}\right) +$$

$$+ r_0 \left(\frac{R_4}{R_2} + \frac{R_2}{R_4}\right) + r_g r_0 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right). \qquad (61)$$

Вместо того, чтобы искать наименьшее возможное значение r_1, будем искать наибольшее возможное значение $R_1 = \frac{r_g r_0}{r_1}$, откуда, на основании очевидного равенства $R_{1_{max}} = \frac{r_g r_0}{r_{1_{min}}}$, найдем $r_{1_{min}}$.

Сравнивая уравнение (61) с (10′) и учитывая, что R_1, R_2, R_3, R_4 удовлетворяют условию мостика $R_1 R_4 \cong R_3 R_4$, так же как и r_1, r_2, r_3, r_4, заключаем, что

$$R_{1_{max}} = r_{1_{max}}; \quad R_{2(max)} = r_{2(max)}; \quad R_{3(max)} = r_{3(max)};$$

---

[1]) Выражение $r_{2(min)}$ надо читать: сопротивление r_2, соответствующее наименьшему возможному r_1.

Но так как, с другой стороны, из (60) и (61) имеем

$$R_{1_{\max}}=\frac{r_g r_0}{r_{1_{\min}}};\quad R_{2(\max)}=\frac{r_g r_0}{r_{2(\min)}};\quad R_{3(\max)}=\frac{r_g r_0}{r_{3(\min)}},$$

то получаем:

$$r_{1_{\max}}\cdot r_{1_{\min}}=r_g r_0$$
$$r_{2(\max)}\cdot r_{2(\min)}=r_g r_0$$
$$r_{3(\max)}\cdot r_{3(\min)}=r_g r_0,$$

т. е. как раз соотношения (59).

В § 2 указывалось, что для достижения максимальной возможной точности все сопротивления r_1, r_2, r_3, r_4 должны быть равны между собой и притом каждое должно равняться $\sqrt{r_0 r_g}$: $r_1=r_2=r_3=r_4=\sqrt{r_0 r_g}$. Отсюда и из (59) легко видеть, *что сопротивления r_1, r_2, r_3, r_4 для случая максимальной точности равны средним геометрическим из соответствующих сопротивлений для случая минимального и максимального сопротивлений, измеримых на мостике с заданной точностью.*

Поскольку равенства (59) имеют общий характер, из них можно было бы вывести все формулы § 6, после того как формулы § 5 стали известны.

Кроме того, равенства (59) позволяют найти общее решение нашей задачи в виде бесконечного ряда как для случая минимального, так и для случая максимального сопротивления. На этом мы, вследствие громоздкости выкладок, не будем останавливаться.

Ограничиваясь случаем первого приближения, можно написать, что для данного источника тока и гальванометра с точностью ε (и более) могут быть измерены на мостике сопротивления r_1, в пределах

$$\frac{\varepsilon I_g r_0 r_g}{E}\leqslant r_1\leqslant\frac{E}{\varepsilon I_g}. \tag{62}$$

Это будет „диапазон" сопротивлений, измеримых на мостике с точностью ε. Отношение наибольшего сопротивления к наименьшему будет равно:

$$\sigma\cong\frac{E}{\varepsilon I_g}:\frac{\varepsilon I_g r_0 r_g}{E}=\frac{E^2}{\varepsilon^2 I_g^2 r_0 r_g}. \tag{63}$$

Формулы (62) и (63) не имеют, однако, общего значения, так как для измерения малых и больших сопротивлений употребляются обыкновенно разные источники тока и гальванометры. Так, для измерения малых сопротивлений употребляются обыкновенно источники тока с малой электродвижущей силой и малым внутренним сопротивлением гальванометра, для измерений же больших сопротивлений — наоборот.

§ 8. Влияние на точность измерения отклонения сопротивлений ветвей мостика от их оптимальных значений

Из рассмотренного в § 5 примера 2 видно, что оптимальные значения r_3 и r_4 составляют лишь долю ома. Между тем для практической возможности измерения очень малого сопротивления на мостике Уитстона, как будет показано ниже, r_3 и r_4 должны равняться, по крайней мере, нескольким омам [1]). Следовательно, мы должны выяснить как уменьшится точность ε по отношению к фиксированной, если сопротивления r_3 и r_4 будут увеличены до требуемого практикой значения. Положим,

[1]) То же самое можно сказать относительно соответствующих сопротивлений в мостике Томсона.

что r_3 и r_4 увеличиваются одновременно в T раз, а r_1 и r_2 остаются неизменными. При этом в правой части уравнения (10′) увеличатся члены $r_0\frac{r_4}{r_2}\cong$ $\cong\sqrt{r_0K}$ [1]); $r_3\cong r_g\sqrt{\frac{r_0}{K}}$; $r_4=\sqrt{r_0r_g}$, а уменьшатся члены $\frac{r_0r_g}{r_3}\cong\sqrt{r_0K}$; $\frac{r_0r_g}{r_4}=$ $=\sqrt{r_0r_g}$ и $r_0\frac{r_2}{r_4}\cong r_0\sqrt{\frac{r_0}{K}}$.

Общее увеличение всей суммы K будет, очевидно, равняться разности:

$$\Delta K=(T-1)\left(\sqrt{r_0K}+r_g\sqrt{\frac{r_0}{K}}+\sqrt{r_0r_g}\right)-$$

$$-\frac{T-1}{T}\left(\sqrt{r_0K}+\sqrt{r_0r_g}+r_0\sqrt{\frac{r_0}{K}}\right). \qquad (64)$$

Ввиду того, что член $\sqrt{r_0K}$ значительно больше других членов в обеих скобках на основании (16), равенство (64) можно заменить приближенным:

$$\Delta K\cong(T-2)\sqrt{r_0K}\cong T\sqrt{r_0K}. \qquad (65)$$

Последнее равенство мы написали для случая, когда T велико. Выясним, как отражается увеличение K на ΔK на точность ε. $K\cong\frac{E}{\varepsilon I_g}$ [из (10′)]. Следовательно,

$$K+\Delta K\cong\frac{E}{(\varepsilon-\Delta\varepsilon)I_g}. \qquad (66)$$

Если ΔK мало по сравнению с K, то для относительного уменьшения ε будем иметь:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}\cong\frac{\Delta K}{K}=T\sqrt{\frac{r_0}{K}}. \qquad (67)$$

Отсюда найдем во сколько раз T сопротивления r_3 и r_4 могут быть увеличены по сравнению с их значениями в (36) для того, чтобы точность ε уменьшилась не более чем на $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}$:

$$T=\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}\sqrt{\frac{K}{r_0}}. \qquad (68)$$

Рассмотрим пример 2 § 5. Там для r_3 и r_4 получились значения: $r_3=$ $=3{,}3\cdot10^{-2}$ Ω; $r_4=0{,}97$ Ω. Для того, чтобы r_3 было не менее 10 Ω, необходимо увеличить r_3 и r_4 в 300 раз. Вычислим относительное уменьшение точности, которое произойдет при этом. По формуле (67) находим:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}=T\sqrt{\frac{r_0}{K}}=300\cdot\sqrt{\frac{2\cdot10^{-2}}{4\cdot10^4}}\cong0{,}21.$$

Следовательно, при таком громадном увеличении сопротивлений r_3 и r_4 точность уменьшилась лишь на небольшую величину по отношению к фиксированной.

В отношении измерения очень больших сопротивлений интересно выяснить возможность уменьшения r_2 по сравнению с его оптимальным значением, например из (49). Для сохранения формулы $r_1r_4=r_2r_3$ необходимо при уменьшении r_2 уменьшить в такое же число раз и r_4, если r_3 остается неизменным. (Уменьшать r_2

[1]) Мы предполагаем, что в уравнении (10′) r_2, r_3, r_4 имеют оптимальные значения (36).

вместе с r_2 нецелесообразно, так как тогда r_4 должно быть уменьшено еще более, между тем r_4 не может быть сделано меньшим нескольких омов.)

Итак, положим r_2 и r_4 уменьшены одновременно в S раз. Требуется определить, насколько уменьшится точность ε по отношению к фиксированной. На основании уравнения (10′), в котором мы предполагаем, что r_1, r_2, r_3, r_4 удовлетворяют условиям (49), видно, что общее увеличение $K \cong \frac{E}{\varepsilon I_g}$ будет при этом равно:

$$\Delta K = (S \quad 1)\left(\sqrt{r_g K} + \sqrt{r_0 r_g} + r_0 \sqrt{\frac{r_g}{K}}\right) -$$

$$- \frac{S-1}{S}\left(\sqrt{r_g K} + \sqrt{r_0 r_g} + r_g \sqrt{\frac{r_g}{K}}\right). \qquad (69)$$

При больших S можно положить на основании неравенств (16):

$$\Delta K \cong (S-2)\sqrt{r_g K} \cong S\sqrt{r_g K}. \qquad (70)$$

Если ΔK мало по сравнению с K, то для относительного уменьшения точности ε будем иметь:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \cong \frac{\Delta K}{K} \cong S\sqrt{\frac{r_g}{K}}. \qquad (71)$$

Отсюда можно определить S при заданном допустимом $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}$:

$$S = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}\sqrt{\frac{K}{r_g}}. \qquad (72)$$

Определим для 2-го примера § 6 во сколько раз r_3 и r_4 могут быть уменьшены, если относительное уменьшение точности $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}$ не должно быть более 20%.

$$S = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}\sqrt{\frac{K}{r_g}} = 0{,}2\sqrt{\frac{2\cdot 10^{10}}{2\cdot 10^{5}}} \cong 63 \text{ раза}.$$

Таким образом r_2 может быть без большого ущерба для точности доведено до 10^6 Ω. При этом r_4 будет составлять около 20 Ω.

§ 9. Наименьшее сопротивление, измеримое на мостиках Уитстона и Томсона при других данных

Во избежание повторения мы будем решать нашу задачу для обоих мостиков одновременно, рассматривая мостик Уитстона как частный случай мостика Томсона.

В обозначениях рис. 3 сила тока I_g, проходящая через гальванометр мостика Томсона, определяется следующим уравнением [1]:

$$I_g = I\,\frac{r_1 r_4 - r_2 r_3 + \frac{r_7}{r_5+r_6}\left[r_4(r_1+r_5) - r_3(r_2+r_6)\right]}{\left(r_g + \frac{r_5 r_6}{r_5+r_6}\right)(r_1+r_2+r_3+r_4) + (r_1+r_3)(r_2+r_4) + \frac{r_7}{r_5+r_6}C}, \qquad (73)$$

где

$$C = [r_g(r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6) + (r_1+r_3+r_5)(r_2+r_4+r_6)]. \qquad (74)$$

Искомым сопротивлением считается r_1; сопротивление, с которым сравнивается r_1, есть r_2.

[1]) См., например, W. Jaeger, Instrumentenkunde, 26 S. 72, 1906.

При сравнении малых и очень малых сопротивлений связывающее сопротивление r_7 должно быть взято очень малым и, по возможности, не превосходить по своей величине r_2. В таком случае, при помощи вспомогательных измерений [1]) можно достигнуть того, что член в числителе, содержащий квадратные скобки, будет равен нулю с точностью, превышающей возможную точность определения разности $r_1r_4 - r_2r_3$, при этом, в случае отсутствия тока в гальванометре, будут выполнены равенства:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4} = \frac{r_5}{r_6} . \qquad (75)$$

Учитывая далее, что r_5 и r_6 должны быть взяты настолько большими, чтобы относящимися к ним контактными сопротивлениями можно было пренебречь, заключаем, что r_5 и r_6 должны быть значительно более r_1, r_2 и r_7. На основании этого видно, что член в знаменателе (73), содержащий в качестве множителя r_7, должен быть значительно меньше двух других членов.

Насколько отношение $\frac{r_7}{r_5+r_6}$ мало, можно судить из следующего примера. Егер, Линдек и Диссельхорст [2]) в своей известной работе по мостику Томсона употребляли r_1 порядка 10^{-4} Ω, с r_5 и r_6 порядка 50—300 Ω. Далее, сравниваемые сопротивления r_1 и r_2 считаем значительно меньшими, чем r_3, r_4, r_5, r_6: обычно r_1 и r_2 — сотые и тысячные доли ома, а r_3, r_4, r_5, r_6 — десятки ом.

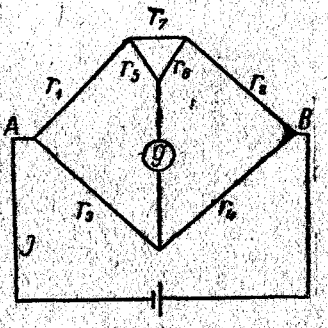


Рис. 3.

Таким образом, с большой степенью приближения можно уравнение (73) заменить уравнением:

$$I_g = I \frac{r_1r_4 - r_2r_3}{\left(r_g + \frac{r_5r_6}{r_5+r_6}\right)(r_3+r_4) + r_3r_4} . \qquad (76)$$

Представим себе, что в первый момент времени ток, проходящий через гальванометр, равен нулю, т. е. в точности $r_1r_4 = r_2r_3$. Изменим теперь r_1 на величину $\pm\Delta r_1$, как-раз такую, что через гальванометр пойдет наименьший ток, чувствуемый еще им $\pm I_g$. Итак, под I_g (знак $\pm$ будем опускать) будем понимать, как и раньше, предельную токовую чувствительность гальванометра [3]). Тогда уравнение (76) даст:

$$I_g = I \frac{r_4\Delta r_1}{\left(r_g + \frac{r_5+r_6}{r_5+r_6}\right)(r_3+r_4) + r_3r_4} . \qquad (77)$$

Вводя относительную точность $\varepsilon = \frac{r_1}{\Delta r_1}$ и затем обозначения

$$r_1 = r_1; \quad r_2 = nr_1; \quad r_3 = mr_1; \quad r_4 = nmr_1; \quad r_5 = \mu r_1; \quad r_6 = n\mu r_1 \qquad (78)$$

перепишем уравнение (77) в виде:

$$I_g = \frac{I}{\varepsilon} \frac{1}{\frac{r_g}{r_1}\left(1+\frac{1}{n}\right) + \mu + m} . \qquad (79)$$

---

[1]) W. Jaeger, Elektrische Meßtechnick, 1922, S. 328—333.

[2]) Jaeger, Lindeck u. Diesselhorst, Instrumentenkunde, 23, S. 33 u. 65, 1903.

[3]) Относительно этой последней надо считать, что она, вообще говоря, будет меньше тока, дающего отклонение в 1 *мм* на шкале, помещенной на расстоянии 1 *м* от гальванометра (в таком виде чувствительность дается в справочниках). При хорошем положении нуля можно отсчитывать отклонения зайчика до полумиллиметра. Кроме того, шкала может быть помещена на расстоянии 2—3 *м* от гальванометра. Таким образом, предельная чувствительность I_g будет превосходить даваемую в справочниках чувствительность для 1 *мм* и 1 *м*, по крайней мере, в 4—6 раз. Надо также заметить, что повторение наблюдений уменьшает I_g.

Уравнение для мостика Уитстона будет отличаться от (79) только отсутствием члена μ в знаменателе (79):

$$I_g = \frac{I}{\varepsilon} \frac{1}{\frac{r_g}{r_1}\left(1+\frac{1}{n}\right)+m} . \qquad (79')$$

Решим поставленную задачу определения минимального сопротивления, измеримого на мостике Томсона или Уитстона с заданной точностью ε и с заданной предельной чувствительностью гальванометра I_g и его внутренним сопротивлением r_g, при условиях 2—4, указанных в § 1.

Условие 2. Этот случай соответствует тому, когда по техническим причинам невозможно пропустить через искомое сопротивление ток выше определенного предела. Благодаря малости сопротивлений r_1, r_2, r_7, по сравнению с r_3 и r_4, можно считать, что сила тока i, проходящая через искомое сопротивление r_1, будет довольно точно равняться общей силе тока

$$I : i = I \qquad (80)$$

Таким образом, если мы в (79) от μ и m вернемся к старым обозначениям через (78), то для r_1 получим значение:

$$r_1 = \left[r_g\left(1+\frac{1}{n}\right)+r_3+r_5\right]\frac{I_g\varepsilon}{i} . \qquad (81)$$

Сопротивления r_3 и r_5, как уже упоминалось, не могут быть выбраны меньше некоторого определенного значения (например, 10 Ω).

Сопротивление r_g гальванометра также не бывает ниже нескольких ом. Кроме того, как указал Fischer [1]), чувствительность гальванометра стремится к нулю при значительном увеличении его внутреннего сопротивления. Поэтому величины r_g, r_3, r_5, а также I_g, ε, i, надо считать заданными. Что касается отношения $n = \frac{r_2}{r_1}$, то для измерения возможно малого сопротивления $r_{1_{min}}$ желательно взять его большим. Для предельного значения $n = \infty$ получим для мостика Томсона:

$$r_{1_{min}} = (r_g + r_3 + r_5)\frac{I_g\varepsilon}{i} \qquad (82)$$

и для мостика Уитстона:

$$r_{1_{min}} = (r_g + r_3)\frac{I_g\varepsilon}{i} . \qquad (82')$$

Практически $r_{1_{min}}$ достигается уже при n, равном нескольким единицам.

Сравнивая (82′) и (82) видим, что на мостике Уитстона может быть измерено меньшее сопротивление, чем на мостике Томсона. (Это справедливо, разумеется, в том случае, если в мостике Уитстона избегнуто влияние контактных сопротивлений.)

Пример. Пусть $r_g = r_3 = r_5 = 10$ Ω; $I_g = 10^{-9}$ Ω; $i = 100$ A; $\varepsilon = 10^5$. Тогда для мостика Томсона:

$$r_{1_{min}} = 30\,\frac{10^{-9}\cdot 10^5}{100} = 3{,}10^{-5}\ \Omega$$

и для мостика Уитстона:

$$r_{1_{min}} = 2\cdot 10^{-5}.$$

Условие 3. Этот случай соответствует такому, когда при уменьшении измеряемого сопротивления, пропускаемый через него ток может быть увеличен так, чтобы мощность P_1, поглощаемая искомым сопротивлением r_1, оставалась постоянной.

[1]) Instrumentenkunde, S. 145, 1934.

На основании формулы $P_1 = i^2 r_1$ заменим i через $\sqrt{\frac{P_1}{r_1}}$ в формуле (81). Тогда получим:

$$r_1 \left[r_g \left(1 + \frac{1}{n}\right) + r_3 + r_5 \right]^2 \frac{I_g^2 \varepsilon^2}{P_1}. \tag{83}$$

$r_{1_{\min}}$ найдем при предельном значении $n = \infty$:

$$r_{1\min} = (r_g + r_3 + r_5)^2 \frac{I_g^2 \varepsilon^2}{P_1}. \tag{84}$$

Для мостика Уитстона будем иметь:

$$r_{1\min} = (r_g + r_3)^2 \frac{I_g^2 \varepsilon^2}{P_1}. \tag{84'}$$

Отсюда видим, что в случае фиксированной мощности наименьшее измеримое с точностью ε сопротивление пропорционально квадрату минимального чувствуемого еще гальванометром тока.

Пример. Пусть, как и раньше, $r_g = r_3 = r_5 = 10\ \Omega$; $\varepsilon = 10^5$; $I_g = 10^{-9}\ A$; $P_1 = 1$ W. Тогда для мостика Томсона получаем:

$$r_{1\min} = 0{,}9 \cdot 10^{-5}\ \Omega,$$

а для мостика Уитстона:

$$r_{1\min} = 0{,}4 \cdot 10^{-5}.$$

Условие 4. Общее сопротивление мостика в большом приближении будет равно $r_1 + r_2 + r_7 = r_1(1 + n + \nu)$, если мы положим $r_7 = r_1 \nu$. Мощность, потребляемая всем мостиком, будет равна:

$$P = I^2 r_1 (1 + n + \nu).$$

На основании этого введем P в формулу (79) вместо I:

$$I_g = \sqrt{\frac{P}{r_1}} \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1 + n + \nu} \left[\frac{r_g}{r_1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \mu + m \right]}. \tag{85}$$

Оставляя пока n и ν в качестве параметров, заменим здесь μ и m через их первоначальные значения из (78) и определим затем r_1:

$$r_1 = (1 + n + \nu) \left[r_g \left(1 + \frac{1}{n}\right) + r_3 + r_5 \right]^2 \frac{\varepsilon^2 I_g^2}{P}. \tag{86}$$

Наиболее благоприятным значением ν будет нуль. Найдем теперь наиболее благоприятное значение n (дающее minimum для r_1), которое мы обозначим через n_0. Беря от (86) производную по n и приравнивая ее нулю, получим после простых преобразований:

$$n_0 = \frac{r_g}{2(r_g + r_3 + r_5)} + \sqrt{\left[\frac{r_g}{2(r_g + r_3 + r_5)}\right]^2 + \frac{2(1 + \nu) r_g}{r_g + r_3 + r_5}}. \tag{87}$$

Мы сохранили перед корнем только знак $+$, так как n может иметь только положительные значения. В идеальном случае если $\nu \to 0$, получим вместо (87):

$$n_0 = \frac{r_g}{2(r_g + r_3 + r_5)} + \sqrt{\left[\frac{r_g}{2(r_g + r_3 + r_5)}\right]^2 + \frac{2 r_g}{r_g + r_3 + r_5}}. \tag{88}$$

Для мостика Уитстона $r_5 = \nu = 0$, и мы будем иметь:

$$n_0 = \frac{r_g}{2(r_g + r_3)} + \sqrt{\left[\frac{r_g}{2(r_g + r_3)}\right]^2 + \frac{2 r_g}{r_g + r_3}}. \tag{88'}$$

Из (88) видим, что n_0 при $\frac{r_3+r_5}{r_g}\to 0$ достигает наибольшего значения 2, при $r_3=r_5=r_g$ уменьшается до 1 и далее с увеличением r_3 и r_5 по сравнению с r_g постепенно уменьшается, достигая в предельном случае $\frac{r_3+r_5}{r_g}=\infty$ нуля.

Подставляя в (86) вместо n и ν их наиболее благоприятные значения n_0 и 0, получим для $r_{1_{\min}}$ выражение:

$$r_{1_{\min}}=(1+n_0)\left[r_g\left(1+\frac{1}{n_0}\right)+r_3+r_5\right]^2\frac{\varepsilon^2 I_g^2}{P}. \tag{89}$$

Для мостика Уитстона будем иметь:

$$r_{1_{\min}}=(1+n_0)\left[r_g\left(1+\frac{1}{n_0}\right)+r_3\right]^2\frac{\varepsilon^2 I_g^2}{P}. \tag{89'}$$

В (89) надо подставить n_0 из (88) и в (89') из (88').

Пример. Пусть $r_g=r_3=r_5=10\ \Omega$; $\varepsilon=10^5$; $I_g=10^{-9}$ A; $P=3$ W. Легко видеть, что $n_0=1$ (при $\nu=0$) для мостика Томсона и $n_0=1{,}31$ для мостика Уитстона. Поэтому будем иметь $r_{1_{\min}}=1{,}07\cdot 10^{-5}\ \Omega$ в первом случае и $r_{1_{\min}}=0{,}71\cdot 10^{-5}\ \Omega$ во втором.

Если учесть, что в мостике Томсона наиболее благоприятное значение $\nu=0$ практически не может быть достигнуто, то легко видеть, что $r_{1_{\min}}$ для мостика Уитстона значительно меньше $r_{1_{\min}}$ для мостика Томсона. Кроме того, формулы (81), (83) и (86) показывают, что во всех трех случаях при фиксированном r_1, точность ε, достигаемая на мостике Уитстона, будет заметно больше соответствующей точности, достижимой на мостике Томсона.

§ 10. Наибольшее сопротивление, измеримое на мостике Уитстона при других данных

Полагая в уравнении (73) $r_7=r_5=r_6=0$, получим следующее уравнение мостика Уитстона, выраженное через общую силу тока I (рис. 3):

$$I_g=I\,\frac{r_1r_4-r_2r_3}{r_g(r_1+r_2+r_3+r_4)+(r_1+r_3)(r_2+r_4)}. \tag{90}$$

Обозначая, как и раньше, $r_2=nr_1$; $r_3=mr_1$ и понимая под I_g предельную чувствительность гальванометра, получим, подобно предыдущему, вместо (90):

$$I_g=\frac{I}{\varepsilon}\,\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)\left[\frac{r_g}{r_1}\left(1+\frac{1}{n}\right)+1+m\right]}. \tag{91}$$

Вводя по формуле $I=i\left(1+\frac{1}{m}\right)$ силу тока i, проходящую через искомое сопротивление, получим:

$$I_g=\frac{i}{\varepsilon}\,\frac{1}{\frac{r_g}{r_1}\left(1+\frac{1}{n}\right)+1+m}. \tag{92}$$

Решим нашу задачу определения максимального сопротивления, измеримого на мостике Уитстона с заданной точностью ε и с заданной предельной чувствительностью гальванометра I_g и его внутренним сопротивлением r_g при следующих условиях:

1) при заданной мощности, расходуемой на искомом сопротивлении;

2) при заданной мощности, потребляемой всем мостиком,

3) при заданном напряжении между точками A и B (рис. 3). Таким образом, приведенные условия те же, что и в § 9, за исключением того, что условие фиксации силы тока заменено здесь условием фиксации напряжения, поданного на мостик. При увеличении измеримого сопротивления его токопропускная способность вообще уменьшается, поэтому фиксация силы тока при разыскании максимального сопротивления не является логичной. Наоборот, фиксация напряжения, поданного на мостик, соответствует практически важному случаю.

Условие 1. Обозначая мощность, поглощаемую искомым сопротивлением, через P_1, получим вместо (92):

$$I_g = \frac{\sqrt{P_1}}{2\sqrt{r_1}} \frac{1}{r_g/r_1\left(1-\frac{1}{n}\right)+1+m}; \tag{93}$$

относительно r_1 получаем уравнение

$$r_1 - \frac{\sqrt{P_1}}{I_g\varepsilon}\frac{1}{1+m}\sqrt{r_1} + r_g\frac{1+\frac{1}{n}}{1+m} = 0.$$

Отсюда:

$$\sqrt{r_1} = \frac{\sqrt{P_1}}{2I_g\varepsilon(1+m)} + \sqrt{\frac{P_1}{4I_g^2\varepsilon^2(1+m)^2} - r_g\frac{1+1/n}{1+m}}. \tag{94}$$

Знак перед вторым корнем мы опустили вследствие того, что он дает меньшее из возможных значений r_1. Наиболее благоприятным значением n будет ∞. Подставляя это значение n в (94), можем представить эту формулу в виде:

$$\sqrt{r_1} = \frac{\sqrt{P_1}}{2I_g\varepsilon(1+m)} + \frac{1}{\sqrt{1+m}}\sqrt{\frac{P_1}{4I_g^2\varepsilon^2(1+m)} - r_g}, \tag{94'}$$

откуда видно, что наиболее благоприятным значением m будет нуль. Поэтому для $r_{1\max}$ получаем значение:

$$r_{1\max} = \left[\frac{\sqrt{P_1}}{2I_g\varepsilon} + \sqrt{\frac{P_1}{4I_g^2\varepsilon^2} - r_g}\right]^2. \tag{95}$$

Вследствие малости r_g по сравнению с $\frac{P_1}{I_g^2\varepsilon^2}$ можно приближенно положить

$$r_{1\max} = \frac{P_1}{I_g^2\varepsilon^2}. \tag{95'}$$

Пример. Пусть $P_1 = 1$ W, $I_g = 10^{-10}$ A; $\varepsilon = 10^3$, $r_g = 10^4$. Тогда получаем:

$$r_1 \cong \frac{P_1}{I_g^2\varepsilon^2} = 10^{14}\ \Omega.$$

При этом r_2 должно быть велико и r_3 мало по сравнению с r_1.

Надо иметь, однако, в виду, что мощность в 1 W при наличии сопротивления в $10^{14}\ \Omega$ можно осуществить только при подаче на r_1 напряжения в 10^7 V.

Условие 2. Общее сопротивление мостика Уитстона между точками A и B (рис. 3; $r_5 = r_6 = r_7 = 0$) будет равно:

$$r_1\frac{1+n}{1+\frac{1}{m}}.$$

Поэтому общая мощность, поглощаемая мостиком, будет:

$$P = I^2 r_1\frac{1+n}{1+\frac{1}{m}}. \tag{96}$$

Подставляя значение J из (96) в (91), найдем:

$$I_g = \frac{\sqrt{P}}{\varepsilon\sqrt{r_1}} \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{m}\right)(1+n)\left[\frac{r_g}{r_1}\left(1+\frac{1}{n}\right)+1+m\right]}}. \quad (97)$$

Отсюда получаем:

$$r_1 - \frac{\sqrt{P}}{\varepsilon I_g} \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{m}\right)(1+n)(1+m)}} + r_g \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1+m} = 0.$$

Отсюда:

$$\sqrt{r_1} = \frac{\sqrt{P}\, m^{1/2}}{2\varepsilon I_g \sqrt{1+n}(1+m)^{3/2}} + \sqrt{\frac{Pm}{4\varepsilon^2 I_g^2 (1+n)(1+m)^3} - r_g \frac{1+\frac{1}{n}}{1+m}}. \quad (98)$$

Замечая, что член $\frac{P}{4\varepsilon^2 I_g^2}$ значительно превосходит r_g и что m_{opt} не может быть очень большим и очень малым числом, легко видеть что n_{opt} должно быть значительно меньше единицы, но все же настолько больше нуля, чтобы член $\frac{Pm}{4\varepsilon^2 I_g^2 (1+n)(1+m)^3}$ все еще значительно превосходил член $r_g \frac{1+\frac{1}{n}}{1+m}$. Отбрасывая этот последний и полагая в оставшемся выражении $n \cong 0$, найдем приближенное значение m_{opt}:

$$m_{opt} = 0{,}5. \quad (99)$$

Воспользовавшись вышеприведенным замечанием о малости n_{opt} и подставляя в (98) вместо m его значение из (99), найдем приближенное значение для n_{opt}:

$$n_{opt} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{r_g}\,\varepsilon I_g}{\sqrt{P}}. \quad (100)$$

Для r_{1max} получаем в первом приближении значение:

$$r_{1max} \cong \frac{4}{27} \frac{P}{\varepsilon^2 I_g}. \quad (101)$$

Соответствующие r_2 и r_3 находятся по формулам $r_2 = n_{opt} \cdot r_{1max}$ и $r_3 = m_{opt} \cdot r_{1max}$ из (99)—(101).

Условие 3. Напряжение V между точками A и B (рис. 3) равно:

$$V = ir_1 + ir_2 = ir_1(1+n).$$

Поэтому вместо (92) получаем:

$$I_g = \frac{V}{\varepsilon(1+n)} \frac{1}{r_g\left(1+\frac{1}{n}\right)+(1+m)r_1}. \quad (102)$$

Отсюда:

$$r_1 = \frac{V}{\varepsilon I_g (1+m)(1+n)} - r_g \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(1+m)}, \quad (103)$$

очевидно,

$$m_{opt} = 0. \quad (104)$$

Для n_{opt} получим значение:

$$n_{opt} = \frac{r_g}{\frac{V}{\varepsilon I_g} - r_g} + \sqrt{\frac{r_g^2}{\left[\frac{V}{\varepsilon I_g} - r_g\right]^2} + \frac{r_g}{\frac{V}{\varepsilon I_g} - r_g}}. \qquad (104')$$

Вследствие малости r_g по сравнению с $\frac{V}{\varepsilon I_g}$, можно положить в первом приближении:

$$n_{opt} \cong \sqrt{\frac{\varepsilon I_g r_g}{V}}. \qquad (104'')$$

Вследствие малости n_{opt} по сравнению с единицей, для r_{1max} можно написать следующее приближенное значение:

$$r_{1max} \cong \frac{V}{\varepsilon I_g} - 2\sqrt{\frac{r_g V}{\varepsilon I_g}}. \qquad (105)$$

Легко видеть, что формулы (104)—(105) аналогичны соответствующим формулам § 6 в предположении равенства нулю внутреннего сопротивления батареи. В нашем случае напряжение V играет роль электродвижущей силы батареи с нулевым внутренним сопротивлением. Сопротивления r_2 и r_3, соответствующие r_{1max}, находятся по формулам:

$$r_2 = n_{opt} \cdot r_{1max}; \quad r_3 = m_{opt} \cdot r_{1max} = 0.$$

К условию 3 мы не приводим примера вследствие того, что в § 6 уже приведено два примера к аналогичному случаю.

§ 11. О применении мостика Уитстона к измерению очень малых сопротивлений

Развитые выше соображения об определении наименьшего сопротивления, измеримого на мостике Уитстона, имели бы только теоретический интерес, если бы не был рассмотрен обстоятельно вопрос о возможности применения мостика Уитстона для измерений очень малых сопротивлений. В § 11—12 этот вопрос и будет обсужден.

Мостик Уитстона обыкновенно не употребляется для измерения очень малых сопротивлений ($<0{,}1\ \Omega$) вследствие наличия в мостике контактных сопротивлений, мало поддающихся учету. Для этой цели употребляют чаще всего мостик Томсона, в котором влияние контактных сопротивлений может быть сделано незначительным. Но применение мостика Томсона связано с другими неудобствами: большей сложностью схемы и необходимостью вспомогательных измерений для устранения так называемого „поправочного члена", сильно возрастающего при уменьшении сравниваемых сопротивлений [1]). Кроме того, как было выше указано, мостик Уитстона, в случае устранения ошибки на контактные сопротивления, позволяет измерять с заданной точностью сопротивления в $1^1/_2$—2 раза меньше, чем мостик Томсона, и, следовательно, при заданном сопротивлении позволяет получить большую точность измерения.

Если бы все сопротивления, применяющиеся на мостике, имели один и тот же порядок величины, то при измерении малых сопротивлений избежать влияния соединительных контактов было бы довольно трудно. Но легко можно собрать схему так, чтобы измеримое сопротивление r_1 было наименьшим, следующим по

[1]) См. например, Jaeger, Lindeck und Diesselhorst, Instrumentenkunde, 2A, S. 33 u. 65.

величине было бы r_2, далее r_3 и r_4, причем эти два последние сопротивления должны быть не менее 5—10 Ω. То обстоятельство, что r_3 и r_4 должны быть достаточно велики, справедливо в равной степени как для мостика Уитстона, так и для мостика Томсона (см. § 1). Кроме того, из § 9 (2 и 3) видно, что в двух важных практических случаях заданной силы тока, проходящей через искомое сопротивление, и заданной мощности, поглощаемой r_1, для измерения возможно малого сопротивления r_2 должно быть взято бо́льшим сравнительно с r_1. С другой стороны, разрешая уравнения (81) и (83) относительно ε, видим, что при фиксированном r_1 для увеличения точности также надо взять отношение $n=\frac{r_2}{r_1}$ бо́льшим. Предельный случай $n=\infty$, конечно, недостижим, но в большинстве случаев возможно взять это отношение равным нескольким единицам или даже нескольким десяткам, учитывая, что эталонное сопротивление r_2 изготовляется обыкновенно из манганина с весьма малым температурным коэфициентом. Возможность увеличения n определяется каждый раз допустимой нагрузкой эталонного сопротивления r_2. Следует, однако, отметить, что нижеуказанный способ применения мостика Уитстона к измерению очень малых сопротивлений пригоден независимо от величины отношения $\frac{r_2}{r_1}$. Для простоты мы ориентируемся на более благоприятный с точки зрения 2 и 3 § 9, а также с точки зрения уменьшения влияния контактного сопротивления r_B (см. далее) случай $\frac{r_2}{r_1}>1$. Задача приспособления мостика Уитстона к измерению очень малых сопротивлений может быть разрешена при помощи схемы, изображенной на рис. 4.

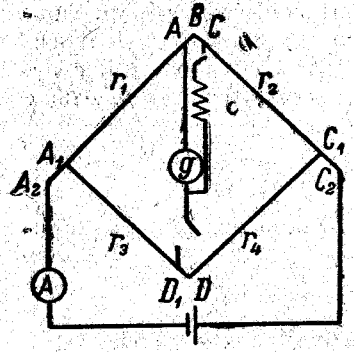


Рис. 4.

Искомым сопротивлением считается здесь отрезок A_1A. Далее эталонное сопротивление r_2 есть сопротивление участка C_1C, r_3—A_1D_1 [1]) и r_4—D_1DC. Ток из батареи поступает в сопротивления r_1 и r_2 через точки A_2 и C_2. Тем самым исключается влияние контактных сопротивлений в точках A_1 и C_1 на r_1 и r_2. Сопротивление участка ABC, содержащее контактное сопротивление в точке B, должно быть по возможности мало. Мы обозначим его через r_B.

В некоторых случаях представляется возможность пренебречь r_B, и, следовательно, определять r_1 по простой формуле $r_1=\frac{r_2r_3}{r_4}$, ограничившись приключением полюсов гальванометра к точкам A и D_1. В других случаях необходимо r_B измерить с некоторой точностью. Для выяснения вопроса о необходимости измерения r_B с нужной точностью составим выражение для относительной ошибки в определении r_1, допускаемой нами при пренебрежении r_B или при измерении его с некоторой погрешностью.

Уравнение мостика в случае отсутствия тока в гальванометре будет иметь вид:

$$\frac{r_1}{r_3}=\frac{r_2+r_B}{r_4}$$

или

$$r_1=\frac{r_2r_3}{r_4}+\frac{r_Br_3}{r_4}. \qquad (106)$$

[1]) Мы приключаем нижний полюс гальванометра к точке D_1; тем самым контактное сопротивление в точке D относится к r_4, которое, как мы предположили, больше, чем r_3. Если r_3 достаточно велико, то нижний полюс гальванометра можно приключить непосредственно к точке соединения r_3 и r_4 — D. По схеме рис. 4 r_3 имеет контактное сопротивление только в точке A_1.

Если мы пренебрежем r_B, то сделаем относительную ошибку в определении r_1, равную δ_B:

$$\delta_B = \frac{r_B}{r_2 + r_B} \cong \frac{r_B}{r_2}. \tag{107}$$

Если же мы измерим r_B с относительной погрешностью γ, то ошибка в определении r_1 будет равна:

$$\delta_B = \gamma \frac{r_B}{r_2}. \tag{108}$$

Из (107) видно, что можно пренебрегать r_B и определять r_1 по простой формуле $r_1 = \frac{r_2 r_3}{r_4}$, если

$$r_2 \gg r_B, \tag{109}$$

и, кроме того, если требования в отношении точности r_1 невелики. Если, например, r_2 имеет порядок 10^{-1} Ω (при этом r_1 может быть меньше: 10^{-2}—10^{-3} Ω) и $r_B = 10^{-4}$ Ω, то относительная погрешность δ_B составит около 0,1%. Таким образом, сопротивления порядка 10^{-2}—10^{-3} Ω, когда не требуется высокой точности, могут быть измерены по схеме рис. 4 без учета контактного сопротивления r_B.

В случае измерений очень малых сопротивлений с высокой точностью, когда r_2 также должно быть очень мало, r_B должно быть измерено. В простейшем случае оно может быть измерено методом „вольтметра и амперметра", причем в качестве „вольтметра" употребляется сам гальванометр мостика (рис. 4). Формула для определения r_B будет, как легко видеть, следующая:

$$r_B = r_g \frac{i_0}{I_A}, \tag{110}$$

где r_g сопротивление гальванометра (вместе с добавочным сопротивлением), i_0 ток, проходящий через гальванометр, и I_A ток, измеряемый амперметром, изображенным на рис. 4. Из (110), между прочим, видно, что таким образом могут быть измерены весьма малые сопротивления. Обыкновенно требуется небольшая точность определения r_B — не более 1%.

Пример. Пусть требуется измерить весьма малое сопротивление $r_1 = 3 \cdot 10^{-5}$, причем относительная ошибка на r_B должна быть не более 10^{-4}. Выберем r_2, r_3, r_4 следующими: $r_2 = 10^{-3}$ Ω; $r_3 = 10$ Ω; $r_4 = 333$ Ω. Пусть $r_B = 10^{-5}$ Ω, что может быть достигнуто тщательным выполнением контакта в точке B. Из формулы (108) находим, что относительная погрешность γ при определении r_B должна равняться или быть меньше 0,01. Если требуется измерить r_1 с некоторой общей допустимой ошибкой, то необходимо позаботиться, чтобы сумма ошибок на r_B, на ограниченность чувствительности гальванометра и на неточность остальных сопротивлений r_2, r_3, r_4 была не больше общей допустимой ошибки.

12. Другой способ учета контактного сопротивления r_B

Можно указать еще следующий способ учета контактного сопротивления r_B. Пусть отрезок AA_1 (рис. 5) изображает искомое сопротивление r_1, отрезок BB_1 — эталонное сопротивление r_2. Точки A_1 и B_1 суть штрихи на сопротивлениях r_1 и r_2, служащие их границами. Сопротивление между штрихами A_1 и B_1 (включая контактное сопротивление) обозначим, как и раньше, через r_B. Добиваемся сначала отсутствия тока в гальванометре при приключении верхнего полюса гальванометра к штриху A_1. При этом будет выполняться уравнение:

$$\frac{r_1}{r_3} = \frac{r_2 + r_B}{r_4} \quad \text{или} \quad r_1 = \frac{r_3}{r_4}(r_2 + r_B). \tag{111}$$

Приключая теперь верхний полюс гальванометра к штриху B_1, снова добиваемся равновесия уменьшением сопротивления r_4 до r_4'. При этом выполняется уравнение:

$$\frac{r_1+r_B}{r_3}=\frac{r_2}{r_4} \quad \text{или} \quad r_1+r_B=\frac{r_3}{r_4'}r_2. \tag{112}$$

Определяя r_B из (112) и подставляя в (111), получим:

$$r_1=\frac{r_2r_3}{r_4'}\,\frac{1+\frac{r_3}{r_4'}}{1+\frac{r_3}{r_4}}. \tag{113}$$

При измерении наименьшего из возможных r_1 в практически важных случаях фиксированного тока и фиксированной мощности, поглощаемой r_1 (§ 9, усл. 2, 3) r_2 должно быть взято бо́льшим по сравнению с r_1 (или r_4 должно быть велико по сравнению с r_3). Этим оправдывается вводимое нами предположение о том, что r_4 и r_4' превосходят r_3 по крайней мере в несколько раз [1]). В таком случае возможная погрешность измерения r_1, зависящая от неточности отдельных сопротивлений r_2, r_3, r_4, r_4', практически не увеличится по сравнению с той, которая имела бы место в случае непосредственного пользования формулой мостика $r_1=\frac{r_2r_3}{r_4}$ [2]). При этом предполагается, что: 1) r_4' может быть задано с той же точностью, что и r_4; 2) сопротивление r_B не изменилось за время, протекшее между двумя измерениями. Первое условие не является обязательным в двух случаях: a) r_4' *значительно* больше, чем r_3 (иначе говоря, $r_2\gg r_1$); b) r_4' не сильно отличается от r_4 (иначе говоря, $r_B\ll r_1$).

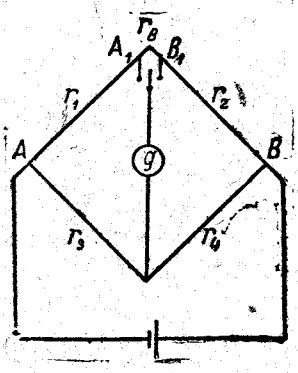


Рис. 5.

Предполагая первое условие или равносильные ему случаи a) и b) выполненными, займемся рассмотрением влияния невыполнения второго условия.

Пусть за время между первым и вторым измерением r_B изменилось на малую величину Δr_B. Это вызвало ошибку в определении r_4' на $(\Delta r_4')_0$, которая связана с Δr_B легко выводимым из (112) равенством:

$$(\Delta r_4')_0=\frac{r_4'^2}{r_2r_3}\Delta r_B. \tag{114}$$

Мы предполагаем, что остальные сопротивления r_1, r_2, r_3 не претерпели заметного изменения.

Выразим на основании формулы (113) относительную ошибку в определении искомого сопротивления r_1 через ошибки остальных сопротивлений:

$$\frac{\Delta r_1}{r_1}=\frac{\Delta r_2}{r_2}+\frac{\Delta r_3}{r_3}+\frac{\Delta r_4}{r_4}+\frac{\frac{\Delta r_3}{r_4'}+\frac{\Delta r_4' r_3}{r_4'^2}}{1+\frac{r_3}{r_4'}}+\frac{\frac{\Delta r_3}{r_4}+\frac{\Delta r_4 r_3}{r_4^2}}{1+\frac{r_3}{r_4}}. \tag{115}$$

[1]) Надо отметить, что рассматриваемый способ исключения r_B применим независимо от отношения $\frac{r_2}{r_1}$, но случай $\frac{r_2}{r_1}>1$ является более благоприятным как с точки зрения § 9 (2 и 3), так и с точки зрения уменьшения добавочной ошибки, происходящей от пользования формулой (113) вместо формулы $r_1=\frac{r_2r_3}{r_4}$.

[2]) Случай, когда $r_3\gg r_4$ и $r_3\gg r_4'$ также соответствует очень малому увеличению погрешности, так как формула (113) приводится в формуле

$$r_1\cong\frac{r_2r_3}{r_4}.$$

Первые три члена, на основании вышесказанного, значительно превосходят все остальные, если только r_B не изменяется за время между двумя измерениями. В противном случае членом $\frac{\Delta r_4' r_3}{1+\frac{r_3}{r_4}}$ уже нельзя пренебречь, так как ошибка в определении $r_4' - \Delta r_4'$, включающая ошибку на изменение $r_B(\Delta r_4')_0$, может достичь заметной величины. Представим $\Delta r_4'$ в виде суммы:

$$\Delta r_4' = (\Delta r_4')_0 + (\Delta r_4')_1. \tag{116}$$

Первая часть зависит от изменения r_B и выражается формулой (114). Вторая часть $(\Delta r_4')_1$ зависит от неточности задания r_4', причем, как мы условились, имеет тот же порядок величины, что и $\frac{\Delta r_4}{r_4}$.

Подставляя $\Delta r_4'$ из (116) в (115) и пользуясь (114), получим для относительной погрешности измерения r_1 выражение:

$$\frac{\Delta r_1}{r_1} = \frac{\Delta r_2}{r_2} + \frac{\Delta r_3}{r_3} + \frac{\Delta r_4}{r_4} + \frac{\frac{\Delta r_3}{r_4'} + \frac{\Delta r_B}{r_2} + \frac{(\Delta r_4')_1 r_3}{r_4'^2}}{1+\frac{r_3}{r_4'}} + \frac{\frac{\Delta r_3}{r_4} + \frac{\Delta r_4 r_3}{r_4^2}}{1+\frac{r_3}{r_4}}. \tag{117}$$

Формула (117) является общей формулой и не зависит от каких-либо предположений относительно величины $r_1, r_2, r_3, r_4, r_4', r_B$. Если же мы воспользуемся нашим предположением о том, что r_4 и r_4' велики по сравнению с r_3, то получим для $\frac{\Delta r_1}{r_1}$ следующее приближенное выражение:

$$\frac{\Delta r_1}{r_1} = \frac{\Delta r_2}{r_2} + \frac{\Delta r_3}{r_3} + \frac{\Delta r_4}{r_4} + \frac{\Delta r_B}{r_2}. \tag{118}$$

Следовательно, добавочная ошибка, происходящая от необходимости учета r_B и возможности его изменения на Δr_B за время между двумя измерениями, равна:

$$\frac{\Delta r_B}{r_2}. \tag{119}$$

Необходимо отметить, что формулы (117) и (118) не учитывают возможной ошибки на неточность отсчета по гальванометру.

Пример. Пусть $r_1 \cong 5 \cdot 10^{-5}$ Ω; $r_2 = 10^{-3}$ Ω; $r_3 = 10$ Ω; $r_4 = 200{,}25$ Ω; $r_4' = 112{,}53$ Ω.

Пусть далее допустимая относительная ошибка имеет порядок величины 10^{-4}. По формуле (113) находим точное значение r_1:

$$r_1 = \frac{r_2 r_3}{r_4} \frac{1+\frac{r_3}{r_4'}}{1+\frac{r_3}{r_4}} = 5{,}1787 \cdot 10^{-5}\ \Omega.$$

Из формулы (112) легко находим, что

$$r_B \cong 3{,}6 \cdot 10^{-5}\ \Omega.$$

Для того, чтобы $\frac{\Delta r_1}{r_1} \leqslant 10^{-4}$, необходимо по формуле (119) чтобы во всяком случае

$$\frac{\Delta r_B}{r_2} < 10^{-4} \quad \text{или} \quad \Delta r_B < 10^{-7}\ \Omega.$$

Относительное изменение $r_B \frac{\Delta r_B}{r_B}$ должно быть менее, чем 1/360. Если бы r_B было несколько меньшим, то допустимое относительное изменение r_B было бы соответственно бо́льшим.

В заключение отметим, что в наличии или отсутствии Δr_B легко убедиться обратным переключением верхнего полюса гальванометра к штриху A_1 и заменой r_4' прежним сопротивлением r_4.

Резюме

В данной статье решена задача определения наименьшего и наибольшего сопротивлений, измеримых на мостике с заданной точностью при заданной предельной токовой чувствительности гальванометра и его внутреннем сопротивлении при следующих условиях:

1) при заданной электродвижущей силе батареи и ее внутреннем сопротивлении;

2) при заданной силе тока, протекающего через искомое сопротивление;

3) при заданной мощности, расходуемой на искомом сопротивлении;

4) при заданной мощности, потребляемой всем мостиком.

Первый случай является наиболее сложным. Он рассмотрен только для мостика Уитстона.

Кроме того, в статье показано, что при измерении малых сопротивлений оба мостика — Томсона и Уитстона — могут быть применены с равным успехом

Zusammenfassung

In diesem Artikel ist die Aufgabe der Ermittelung der kleinsten und grössten Widerstände die messbar sind mit Hilfe der Brückenschaltung mit der fixierten Genauigkeit, bei der fixierten Grenzstromempfindlichkeit des Galvanometers und seinem innerem Widerstand unter folgenden Bedingungen gelöst:

1) bei der fixierten elektromotorischen Kraft der Batterie und ihrer innerem Widerstand;

2) bei der fixierten Stromstärke, die durch den zu messenden Widerstand fliesst;

3) bei der fixierten Leistung, die von dem zu messenden Widerstand verbraucht wird;

4) bei der fixierten Leistung, die von der ganzen Brücke verbraucht wird.

Der erste Fall ist am kompliziertest. Er ist nur in Bezug auf die Wheatstonesche Brücke betrachtet.

Ausserdem ist es in diesem Artikel gezeigt, dass bei der Messung sehr kleiner Widerstände, die beide Brücke Thomsonsche und Wheatstonesche mit gleichem Erfolg angewandt werden können.