8. О сингулярныхъ абелевыхъ функціяхъ.

Н. В. Липина.

(Доложено 30 ноября 1915 г.).

Нижеслѣдующія предложенія являются результатами моихъ изысканій относящихся къ теоріи абелевыхъ интегралов и функцій съ приводящимися періодами.

Полагая $\omega_{\alpha k} = \omega'_{\alpha k} + i\omega''_{\alpha k}$, $\omega^{\circ}_{\alpha k} = \omega_{\alpha k} \quad i\omega''_{\alpha k}$ ($\alpha \quad 1, 2, \quad p$, $k = 1, 2, \quad 2p$) и обозначая сумму

$$\sum_{i}^{p} (\omega_{\alpha i}\omega^{\circ}_{\beta \quad p+\cdot} - \omega_{\alpha, p+i}\omega^{\circ}_{\beta i})$$

черезъ $(\omega_\alpha \mid \omega_\beta)$, можно установить теорему:

I. Надлежащимъ унимодулярнымъ преобразованіемъ періодовъ абелевой функціи въ связи съ преобразованіемъ ея аргументовъ всегда можно достигнуть того, чтобы періоды $\omega_{\alpha k}$ преобразованной функціи $Al(v_1, v_2, \quad v_p)$ удовлетворяли соотношеніямъ

$$(\omega_\alpha \mid \omega^{\circ}_{\alpha}) = -2i, \ (\omega_\alpha \mid \omega^{\circ}_{\beta}) = 0, \ (\omega^{\alpha} \mid \omega^{\beta}) = 0,$$
$$(\omega^{\circ}_{\alpha} \mid \omega^{\circ}_{\beta}) = 0$$

($\alpha \quad \beta \quad 1, 2, \quad p$ и имъ эквивалентнымъ

$$(\omega'_\alpha \mid \omega''_\alpha) \quad 1, \ (\omega'_\alpha \mid \omega''_\beta) = 0 \quad (\omega'_\alpha \mid \omega'_\beta) = 0$$
$$(\omega''_\alpha \mid \omega''_\beta) = 0.$$

Систему періодовъ, обладающую вышеуказаннымъ свойствомъ я буду называть ортогональной.

Пусть (F) есть риманова поверхность рода $p' \geqq p$ связанная съ данной функціей; періоды $\pi_{\alpha k}$ интегралов v_α ($\alpha = 1, 2, \quad p$) на этой поверхности приводятся къ рангу p:

$$\pi_{\alpha i} = n_{i1}\omega_{\alpha 1} + n_{i2}\omega_{\alpha 2} + \quad + n_{i, 2p}\omega_{\alpha, 2p}$$

($i = 1, 2, \quad 2p'$) Picard: Bul. d. l. S-té Math. t. 11, Poincaré et Picard: Comptes Rendus t; 97; Wirtinger: Monatshefte f. Math. t: 6; Acta Mat.: t. 26.

$$\pi^{\circ}_{\alpha i} = n_{i1}\omega^{\circ}_{\alpha 1} + n_{i2}\omega^{\circ}_{\alpha 2} + \quad \cdot + n_{i, 2p}\omega^{\circ}_{\alpha, 2p}$$

можно разсматривать какъ періоды системы p независимыхъ интегралов второго вида

II. Если на римановой поверхности рода p'

имѣется $p<p'$ интегралов 1-го вида приводящихся къ рангу p помощью одной и той же матрицы (n_{ik}), то на ней существуютъ p (но не болѣе) независимыхъ интегралов v'_α $(\alpha = 1, 2, \ldots p)$ второго вида составляющихъ съ первыми полную систему приводящихся интегралов.

III. (Основная теорема) Если періоды $\omega_{\alpha i}$ $(i = 1, 2, \ldots 2p)$, q интегралов v_α $(\alpha = 1, 2, \ldots q)$ абелевой функціи удовлетворяютъ $s > p - q$ однимъ и тѣмъ же соотношеніямъ, которыя всегда можно взять въ формѣ

$$(1)\quad \sum_i^p (a_{ki}\,\omega_{\alpha,p+i} - a_{k,p+i}\,\omega_{\alpha i}) = 0$$

разсматривая a_{ki} какъ періоды интегралов второго вида

ζ_k $(k = 1, 2, \ldots s)$, то существуютъ $q + s - p$ интегралов

v_β $(\beta = q+1\ q+2, \ldots 2q+s-p)$ перваго вида, которыя могутъ быть представлены въ формѣ

$$v_\beta = \Omega_{\beta 1}\zeta_1 + \Omega_{\alpha 2}\zeta_2 + \ldots + \Omega_{\beta,s}\zeta_s$$

гдѣ $\Omega_{\beta i}$ надлежащія постоянныя.

Эта теорема даетъ мѣсто слѣдующимъ предложеніямъ.

IV. Если періоды интеграла удовлетворяютъ p соотношеніямъ, (1) то числа a_{ik} суть періоды интегралов перваго вида и этимъ соотношеніямъ удовлетворяютъ періоды всѣхъ p интегралов, т. к. соотношенія эти не отличаются отъ Римановыхъ.

V. Если періоды $q<p$ интегралов удовлетворяютъ $2p-s$ соотношеніямъ отличнымъ отъ римановыхъ, то $q \leq \frac{s}{2}$; въ частности число линейныхъ не римановыхъ соотношеній, которымъ удовлетворяютъ періоды одного интеграла не можетъ быть больше $2p-2$

Обозначая черезъ S^s_{q-1} систему q интегралов съ s періодами можно высказать слѣдующее предложеніе.

VI. Если на римановой поверхности имѣется система $S^{2q+\tau}_{q-1}$ періоды которой удовлетворяютъ $2p-2q-\tau$ не римановымъ соотношеніямъ (1) то на ней существуетъ и сопряженная система $S^{2p-2q-\tau}_{p-q-\tau-1}$ съ періодами

$$\omega_{\beta k} = a_{1k}\,\Omega_{\beta 1} + a_{2k}\,\Omega_{\beta 2} + \ldots + a_{2p-2q-\tau,\,k}\,\Omega_{\beta,\,2p-2q-\tau}$$

которые удовлетворяютъ $2q+\tau$ не римановымъ соотношеніямъ.

Это предложеніе является обобщеніемъ извѣстной теоремы, (Picard loc. cit, Poincaré ib. t. 12) одновременно въ нѣсколькихъ направленіяхъ.

VII. Системы S^{2q}_{q-1} и $S^{2r}_{r-1} = S^{2p-2q}_{p-q-1}$ могутъ имѣть общіе интегралы; но если приведенія

$$\omega_{\alpha s} = \sum_m^{2q} u_{ms}\,\Omega_{\alpha m},\quad \omega_{\beta s} = \sum_m^{2r} n'_{ms}\,\Omega'_{\alpha m}$$

$(\alpha = 1, 2, \ldots q;\ \beta = q+1, \ldots p;\ s = 1, 2, \ldots 2p)$ удовлетворяютъ условіямъ

$$(n_g \mid n_{q+g}) = n^2;\ (n_g \mid n_h) = 0;\ (n'_g \mid n'_{r+g}) = n'^2;\ (n'_g \mid n'_h) = 0$$

что можно всегда достигнуть надлежащимъ преобразованіемъ, то системы не будутъ имѣть общихъ интегралов. Если ввести обозначенія

$$\Phi_k(\omega_s) = (\omega_\alpha \mid a_{q+i}),\ \Phi_{q+i}(\omega_s) = (a_s \mid \omega_i)$$

$$\varphi^i(\omega_s) = (\omega_\alpha \mid a_{r+k}),\ \Phi_{r+k}(\omega_s) + (a_s \mid \omega_k)$$

то между періодами будутъ существовать соотношенія:

$$\Omega_{\alpha i} = n^{-1}\varphi_i(\omega_\alpha);\quad \varphi_i(\omega_\beta) = 0$$
$$\Omega'_{\beta k} = n'^{-1}\varphi_k(\omega_\beta);\quad \Phi_k(\omega_\alpha) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots 2q;\ k = 2q+1, \ldots 2p)$$

VIII. Совокупность обѣихъ системъ предыдущей теоремы можно разсматривать какъ преобразованіе

$$\omega_{\gamma s} = \sum_m^{2q} n_{ms}\,\Omega_{\gamma m} + \sum_m^{2r} n'_{ms}\,\Omega'_{\gamma m}$$

для котораго $\Omega'_{\alpha m} = 0$; $\Omega_{\beta m} = 0$ $(\gamma = 1, 2, \ldots p;\ s = 1, 2, \ldots 2p)$ преобразующее форму $(\omega_g \mid \omega_h)$ въ

$$n^2) + n'^2(\Omega\,\eta\,\Omega g -) \mid \Omega'_h)g,$$

Теорема эта въ неполной формѣ встрѣчается у Weierstrass'a Picard'a и Poincaré.

Всякое билинейное соотношеніе

$$\sum_i^{2p}\sum_k^{2p} C_{ik}\,\omega_{\alpha i}\,\omega_{\beta k} = 0$$

$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots p)$

съ цѣлыми коэфиціентами будетъ въ дальнѣйшемъ

называться сингулярнымъ если оно отлично отъ соотношеній Римана; соотвѣтственно этому абелева функція періоды которой удовлетворяютъ m сингулярнымъ соотношеніямъ m—разъ сингулярной считая при этомъ каждое соотношеніе за два если оно не симетрично относительно $\omega_{\alpha s}$ и $\omega_{\beta s}$

IX. Всякая m—разъ сингулярная абелева функція допускаетъ m принсипальныхъ преобразованій (комплексныхъ умноженій) и обратно: всякая абелева функція допускающая m принсипальныхъ преобразованій m—разъ сингулярна.

Примѣчаніе. Для опредѣленія сингулярныхъ абелевыхъ интегралов. См. Hurwitz: Math. An. t. 28. Kratzer (Lehrbuch d. Thetafunctionen, Leipzig 1903), разсматривая преобразованія функцій тэта, предполагаетъ, что между періодами этихъ функцій не существуетъ другихъ билинейныхъ соотношеній съ цѣлыми коэффиціентами, кромѣ римановыхъ.

Въ частности при $p=2$, Wiltheiss (Inauguraldissertation 1881) и Humbert (J. d. Math. 1899, 1900) разсматривали преобразованія существующія при другихъ предположеніяхъ.

Обозначая преобразованіе

$$\sum_{k}^{p} \lambda^{(1)}_{\alpha k}\,\omega_{\alpha i} = \varphi^{(1)}_{i}(\omega_\alpha) = \sum_{h}^{2p} C^{(1)}_{ih}\,\omega_{\alpha h}$$

($\alpha = 1, 2, \ldots p$, $i = 1, 2, \ldots 2p$) черезъ T нетрудно видѣть, что коэфиціенты преобразованія Tm:

$$\sum_{k}^{p} \lambda^{(m)}_{\alpha k}\,\omega_{\alpha i} = \varphi^{(m)}_{i}(\omega_\alpha) = \sum_{h}^{2p} C^{(m)}_{ih}\,\omega_{\alpha h}$$

будутъ составлены по правилу умноженія матрицъ. Независимыхъ преобразованій вида Tm не можетъ быть больше $2p$ считая въ томъ и тождественное. Преобразованіе:

$$\sum_{k}^{p} f(\lambda_{\alpha k})\,\omega_{\alpha i} = f\left[\varphi_i(\omega_\alpha)\right]$$

гдѣ f есть полиномъ $2p-1$ ст. съ цѣлыми коэфиціентами, есть линейная комбинація преобразованій: $1, T, T^2, \ldots T^{2p-1}$

X. Рангъ матрицы.

$$\begin{Vmatrix} C^{(m)}_{11}, & C^{(m)}_{12}, & \ldots & C^{(m)}_{1,2p} \\ C^{(m)}_{21}, & C^{(m)}_{22}, & \ldots & C^{(m)}_{2,2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C^{(m)}_{2p,1}, & C^{(m)}_{2p,2}, & \ldots & C^{(m)}_{2p,2p} \end{Vmatrix}$$

есть всегда число четное. Условіе необходимое и достаточное для того чтобы періоды абелевой функціи приводились къ рангу q заключается въ томъ, чтобы существовала матрица ранга $2q$. Если существуетъ матрица ранга $2q$, то существуетъ также матрица ранга $2p-2q$

XI. Всякой произвольной матрицѣ (C_{ik}) характеристика которой

$$K(\mu) = \begin{vmatrix} C_{11}-\mu, & C_{12}, & \ldots & C_{1,2p} \\ C_{21}, & C_{22}-\mu, & \ldots & C_{2,2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{2p,1}, & C_{2p,2}, & \ldots & C_{2p,2p}-\mu \end{vmatrix} = O$$

имѣетъ неравные комплексные корни отвѣчаетъ одна и при томъ только одна сингулярная абелева функція допускающая преобразованіе

$$\mu_\alpha\,\omega_{\alpha i} = \varphi_i(\omega_\alpha),\quad \mu^{\circ}_{\alpha}\,\omega^{\circ}_{\alpha i} = \varphi_i(\overset{\circ}{\omega}_\alpha)$$

Теорема эта устанавливаетъ существованіе сингулярныхъ абелевыхъ функій (а слѣд. и интегралов) для которыхъ множителями служатъ произвольныя алгебраическія числа обусловленныя лишь выше сдѣланнымъ ограниченіемъ. Насколько мнѣ извѣстно до настоящаго времени было доказано существованіе сингулярныхъ функцій только для матрицъ ортогональныхъ (Kronecker, Weber, Frobenius, Kratzer) для которыхъ корни характеристики имѣютъ видъ

$\varepsilon\sqrt{n}$ гдѣ $\varepsilon^k - 1 = 0$ а n степень преобразованія.

XII. Условіе необходимо и достаточное для того, чтобы періоды абелевой функціи, удовлетворяющей условіямъ предыдущей теоремы, приводились къ рангу q заключается въ томъ, чтобы характеристика имѣла раціональнаго множителя степени $2q$. Если характеристика разлагается на r раціональныхъ множителей степеней $2q_1, 2q_2, \ldots 2q_\tau$ то періоды функціи допускаютъ приведеніе къ системѣ

S^{2q}_{q-1} (соотвѣт. S^{2p-2q}_{p-q-1}) гдѣ $q = \varepsilon_1 q_1 + \ldots + \varepsilon_\tau q_\tau$, a ε равны по произволу нулю или единицѣ.