7. О сходимости формулъ механическихъ квадратуръ и о нѣкоторыхъ относящихся сюда вопросахъ.

Н. М. Крылова.

(доложено 9 сентября).

T. J. Stieltjes былъ, если не ошибаемся, однимъ изъ первыхъ математиковъ, поставившихъ съ весьма общей точки зрѣнія вопросъ о сходимости формулъ, такъ называемыхъ, механическихъ квадратуръ.

Въ одномъ изъ своихъ писемъ [1]) къ Hermite'у, знаменитый геометръ по поводу этого вопроса говоритъ слѣдующее: „j'ai toujours été frappé par cette circonstance, que tandis que la définition même d'une intégrale définie $\int_a^b F(x)\,dx = \lim \Sigma \delta_i F(\varepsilon_i)$ permet toujours de calculer sa valeur avec une approximation indéfinie, cela n'était point du tout demontré, si en appliquant la quadrature mécanique, on calcule: $A_1 F(x_1) + A_2 F(x_2) + \ldots A_n F(x_n)$". Въ знаменитомъ мемуарѣ [2]): „Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques", Stieltjes устанавливаетъ чрезвычайно тонкимъ анализомъ основную теорему сюда относящуюся, но здѣсь надлежитъ замѣтить, что такъ наз. неравенства [3]) Чебышева, на которыхъ основывается анализъ Stieltjes'a, были ранѣе доказаны А. А. Марковымъ [4]) какъ объ этомъ впрочемъ говоритъ и самъ Stieltjes въ одной изъ своихъ послѣдующихъ статей [5]) въ Annales de l'Ecole Normale.

Въ послѣднее время, весьма простое и элегантное доказательство результата Stieltjes'a для случая непрерывныхъ функцій было дано [6]) Я. В. Успенскимъ, который пользуется при этомъ основной теоремой Weierstrass'a относительно приближенія непрерывныхъ функцій помощью полиномовъ.

Однако въ виду важности вопроса и нѣкоторыхъ слѣдствій отсюда вытекающихъ, представляется безъинтереснымъ по нашему мнѣнію трактовать вопросъ безъ помощи вышеупомянутой теоремы Weierstrass'a и безъ предварительнаго изученія, довольно сложнаго, свойствъ коефиціентовъ A_k, что и составитъ предметъ перваго § настоящей работы.

§ 1. Установимъ прежде всего такую теорему: *„для всякой функціи обладающей первой производной можно утверждать сходимость формулы механическихъ квадратуръ"*.

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи результата недавно установленнаго [1]) академикомъ В. А. Стекловымъ, для подобной [2]) функціи $K(x)$ имѣетъ мѣсто такое, равномѣрно въ интервалѣ $(-1, +1)$ сходящееся разложеніе,

$$K(x) = \sum_{k=o} a_k \varphi_k(x), \tag{1}$$

гдѣ

$$a_k = \int_{-1}^{+1} K(x)\,\varphi_k(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

и $\varphi_k(x)$ — т. н. тригонометрическіе полиномы (полиномы Чебышева).

При вычисленіи интеграла

$$I = \int_a^b f(x)\,K(x)\,dx,$$

гдѣ $f(x)$ интегрируемая, положительная въ интервалѣ (a, b) функція, можно поэтому, выполняя соотвѣтствующую замѣну перемѣнныхъ, подставить вмѣсто $K(x)$ такое разложеніе:

$$\sum_{k=o}^{\infty} a_k \varphi_k\left[\frac{2x-a-b}{b-a}\right];$$

[1]) отъ 3-го Мая 1884.
[2]) Annales de l'Ec. Normale. 1884.
[3]) Journal de Liouville 1874.
[4]) Mathematische Annalen t. XXIV.
[5]) Annales de l'Ecole Normale 1885.
[6]) Исчисленіе конечныхъ разностей (лит. курсъ 1914).

[1]) Stekloff Q.q. applications nouvelles de la théorie de fermeture e. t. c. Memoires de l'Ac. des Sc. de Petrograd. 1914. p. 31.
[2]) Можно было бы очевидно ограничиться болѣе общими условіями, напр. условіями Липшица.

отсюда полагая

$$T(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k \varphi_k \left[\frac{2x-a-b}{(b-a)}\right],$$

$$R(x) = \sum_{2n-1}^{\infty} a_k \varphi_k \left[\frac{2x-a-b}{(b-a)}\right],$$

имѣемъ

$$K(x) = T(x) + R(x),$$

слѣдовательно:

$$\int_a^b f(x) K(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} A_k K(x_k) = \int_a^b f(x) T(x)\,dx - \sum_1^n A_k T(x_k) + \int_a^b f(x) R(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} A_k R(x_k),$$

гдѣ всѣ

$$A_k = \int_a^b \frac{f(x) P_n(x)\,dx}{(x-x_k) P_n'(x_k)},$$

будутъ, какъ извѣстно, положительны.

Замѣчаемъ теперь, что на основаніи равномѣрной сходимости ряда (1), можно взять n столь большимъ, чтобы для всѣхъ значеній x интервала (a, b)

$$|R(x)| < \varepsilon,$$

гдѣ ε произвольное количество; съ другой стороны $T(x)$ является полиномомъ $(2n-1)$-ой степени, вслѣдствіи этого имѣемъ

$$\int_a^b f(x) T(x)\,dx = \sum_1^n A_k T(x_k);$$

наконецъ всѣ A_k положительны и

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \int_a^b f(x)dx;$$

слѣдовательно [1])

$$\sum_1^n A_k R(x_k) < \varepsilon \int_a^b f(x)dx$$

$$\left| \int_a^b f(x) R(x)dx \right| < \varepsilon \int_a^b f(x)dx,$$

а потому

$$\left| \int_a^b f(x) K(x)\,dx - \sum_1^n A_k K(x_k) \right| < 2\varepsilon \int_a^b f(x)\,dx,$$

т. е.:

$$\int_a^b f(x) K(x)dx = \lim_{n=\infty} \sum_1^n A_k K(x_k),$$

что и т. д.

Для обобщенія полученнаго результата введемъ въ разсмотрѣніе функцію В. А. Стеклова

$$\varphi(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \psi(x)\,dx, \quad (\text{гдѣ } \psi(x) \text{ непрерывна})$$

примѣненную знаменитымъ геометромъ въ его теоріи замкнутости ортогональныхъ функцій. Обозначая остатки формулъ механическихъ квадратуръ для функцій $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соотвѣтственно черезъ R_n и ρ_n, имѣемъ:

$$(2) \quad \begin{cases} \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} A_i \varphi(x_i) + R_n \\ \int_a^b f(x)\psi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} A_i \psi(x_i) + \rho_n; \end{cases}$$

вычитая почленно равенства (2), получаемъ такое соотношеніе:

$$\rho_n \leq \left| \int_a^b f(x)[\varphi(x) - \psi(x)]\,dx \right| + \Sigma A_i \left| \varphi(x_i) - \psi(x_i) \right| + \left| R_n(x) \right|;$$

замѣчаемъ теперь на основаніи очевидного свойства функцій вида $\varphi(x)$, что можно при произвольномъ ε выбрать $h = h_0$ столь малымъ, чтобы

$$|\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon,$$

каково-бы ни было значеніе x интервала (a, b); установивъ это число h_0, выберемъ n такъ чтобы при произвольномъ, напередъ заданномъ ε_1;

$$|R_n| < \varepsilon_1,$$

что возможно вслѣдствіи выше доказанной сходимости формулы механическихъ квадратуръ для всякой функціи обладающей первой производной, а потому и для функціи $\varphi(x)$.

Итакъ имѣемъ окончательно:

$$|\rho_n| < 2\varepsilon \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon_1,$$

[1]) Въ этомъ пунктѣ доказательства входитъ равномѣрная сходимость во *всемъ* интервалѣ.

ибо, какъ извѣстно:

$$\sum_1^n A_i = \int_a^b f(x)\,dx;$$

слѣдовательно

$$\lim_{n=\infty} \rho_n = 0,$$

какова-бы ни была положительная интегрируемая функція $f(x)$, что и т. д.

Естественнымъ представляется теперь вопросъ: возможно-ли путемъ введенія функціи

$$\varphi(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \psi(x)\,dx$$

гдѣ $\psi(x)$ только интегрируемая функція, доказать, аналогично предшествовавшему, сходимость формулы механическихъ квадратуръ для всякой интегрируемой функціи, т. окончательный результатъ Stieltjes'a; замѣтимъ по этому поводу, что возникающее при этихъ разсужденіяхъ затрудненіе проистекаетъ изъ необходимости утвержденія существованія неравенства:

$$|\psi(x_i) - \varphi(x_i)| < \varepsilon,$$

при всѣхъ значеніяхъ i, для достаточно малаго значенія h; представляется необходимымъ поэтому подчинить интегрируемую функцію $\psi(x)$ добавочнымъ условіямъ, если желаемъ обойтись безъ детальнаго изученія свойствъ коэффиціентовъ A_i.

Принявъ обычное обозначеніе.

$$\psi(x+0) = \lim_{h=0} \psi(x+h),$$

предположимъ, что $\psi(x+h)$ стремится къ своему предѣлу равномѣрно въ интервалѣ (a, b); введеніемъ затѣмъ новой перемѣнной

$$\varepsilon = x + \eta,$$

легко убѣждаемся въ возможности выбрать число $h = h_0$ столь малое, чтобы

$$\left| \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \psi(\varepsilon)\,d\varepsilon - \psi(x+0) \right| < \varepsilon_1,$$

гдѣ ε_1 положительное напередъ заданное количество.

Повторяя затѣмъ почти буквально предшествовавшія разсужденія и замѣняя лишь вторую изъ формулъ (2) слѣдующей:

$$\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx = \sum_{k=1}^n A_k \psi(x_k+0) + \rho_n$$

приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

можно утверждать сходимость (при $\lim n = \infty$) *слѣдующей формулы квадратуръ*:

$$(3) \qquad \int_a^b f(x)\,F(x)\,dx = \sum_{i=1}^n F(x_i + 0) \int_a^b \frac{f(x)\,P_n(x)\,dx}{(x-x_i)\,P_n'(x_i)}$$

для всякой положительной, интегрируемой функціи $f(x)$ *и для всякой интегрируемой функціи* $F(x)$, *подчиненной слѣдующимъ условіямъ: каково-бы не было положительное напередъ заданное число существуетъ столь малое число* $h = h_0$, *что для всѣхъ точекъ* (x) *интервала* (a, b) *имѣетъ мѣсто неравенство*:

$$|F(x+h) - F(x+0)| < \varepsilon.$$

Совершенно ясно, что формула (3) не представляетъ собою собственно формулу механическихъ квадратуръ, ибо если функція $F(x)$ задана напр. эмпирически, то извѣстно лишь $F(x_i)$, но не $F(x_i + 0)$; тѣмъ не менѣе она можетъ служить для вычисленія интеграла, стоящаго въ ея лѣвой части, если можно вычислить $F(x_i + 0)$.

§ 2. Сдѣлаемъ теперь общее замѣчаніе относительно принятаго въ предъидущемъ § метода: *то обстоятельство, что квадратуры были механическими* [1]) *было существеннымъ лишь въ отношеніи возможности утверждать существованіе такого конечнаго числа* M, *которое было-бы больше суммы абсолютныхъ значеній коэффиціентовъ формулы квадратуръ; такимъ образомъ анализъ прилагается безъ измѣненія къ тому случаю, когда коэффиціенты* A_i *не будутъ всѣ положительными и гдѣ слѣдовательно* $f(x)$ *можетъ не быть всегда* > 0, *т. е. къ тому случаю, который не внушалъ довѣрія Stieltjes'y* [2]);—*надо только, чтобы*

$$(4) \qquad \sum_1^n |A_i| < M,$$

или даже менѣе нѣкоторой опредѣленной конечной степени n [3]), *такъ какъ въ этомъ случаѣ въ разсмотрѣніе очевиднымъ образомъ вводится порядокъ малости* R_n.

---

[1]) Т. е. всѣ A_i были > 0.

[2]) См. «Correspondance d'Hermite et Stieltjes». Въ анализѣ самого Stieltjes'a была существенной *положительность* всѣхъ A_i, ибо онъ основывается на представленіи интеграла, какъ предѣла суммы.

[3]) Для функцій обладающихъ соотвѣтственнымъ числомъ производныхъ.

§ 3. Важность въ современномъ анализѣ теоремы Weierstrass'a, касающейся приближенія непрерывной функціи помощью полиномовъ, вызвала весьма большое число доказательствъ этой теоремы,—укажемъ напр. на элегантное доказательство В. А. Стеклова позволяющее, что весьма существенно, строить полиномы приближенія.

Замѣтимъ также, что теорема Weierstrass'a можетъ быть получена путемъ построенія [1]) интерполяціонныхъ формулъ сходящихся для всякой непрерывной функціи, но можетъ быть представится небезъинтереснымъ высказать здѣсь нѣкоторыя соображенія по поводу попытки доказательства теоремы Weierstrass'a, основанной на сходимости квадратуръ, что явилось бы наиболѣе аналогичнымъ методу, съ такимъ успѣхомъ примѣненному В. А. Стекловымъ въ его извѣстныхъ изслѣдованіяхъ по теоріи замкнутости системъ ортогональныхъ функцій.

Для этой цѣли исходя изъ интерполяціонной формулы

$$(5)\qquad F(x)=\sum_1^n \frac{F(x_i)\,P_n(x)}{(x-x_i)\,P_n'(x_i)}+R_n(x),$$

проинтегрируемъ обѣ части выраженія (5) въ нижеуказанныхъ предѣлахъ и раздѣлимъ на $2h$:

$$\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} F(x)\,dx=$$

$$\sum_1^n F(x_i)\,\frac{1}{2h}\int_{x+h}^{x+h}\frac{P_n(x)\,dx}{(x-x_i)\,P_n'(x_i)}+$$

$$+\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} Rn\,(x)\,dx;$$

но

$$\int_{x-h}^{x+h} Rn\,(x)\,dx\leq\int_{x+h}^{x+h}|Rn\,(x)|\,dx\leq$$

$$\leq\sqrt{b-a}\ \sqrt{\int_a^b R_n^2(x)\,dx}=\sqrt{b-a}\ \sqrt{S_n}$$

а потому предположивъ доказаннымъ

$$(6)\qquad \lim_{n=\infty} S_n=0,$$

при стремленіи n къ ∞, замѣтимъ, что выраженія

$$\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}\frac{P_n(x)\,dx}{(x-x_i)\,P_n'(x_i)}$$

представляютъ собою очевидно полиномы $(n-1)$ степени въ x; тогда въ виду непрерывности функціи $F(x)$ можно очевидно взять $h=h_0$ столь малымъ, чтобы при произвольномъ напередъ заданномъ,

$$\left|\frac{1}{2h_0}\int_{x-h_0}^{x+h_0} F(x)\,dx-F(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2};$$

выбравъ такимъ образомъ число $h=h_0$, возьмемъ $n=n_0$ столь большимъ, чтобы

$$\frac{\sqrt{b-a}\ \sqrt{S_n}}{2h_0}<\frac{\varepsilon}{2};$$

тогда

$$\left|F(x)\quad\sum_1^{n_0}\frac{1}{2h_0}\int_{x-h_0}^{x+h_0}\frac{P_n(x)\,dx}{(x-x_i)\,P_n'(x_i)}\right|<\varepsilon,$$

что и представитъ собою теорему Weierstrass'a, выведенную въ предположеніи справедливости соотношенія (6).

Для доказательства формулы (6), замѣчаемъ, что

$$S_n=\int_a^b\left[F(x)-\sum_1^n\frac{F(x_i)\,P_n(x)}{(x-x_i)\,P_n'(x_i)}\right]^2dx,$$

а потому

$$(7)\qquad S_n=\int_a^b F(x)^2\,dx+$$

$$+\sum_1^n F^2(x_i)\int_a^b\frac{P_n^2(x)\,dx}{(x-x_i)^2\,P_n'(x_i)^2}+$$

$$+2\sum_1^n F(x_i)\,F(x_k)\int_a^b\frac{P_n^2(x)\,dx}{(x-x_i)\,(x-x_k)\,P_n'(x_i)\,P_n'(x_k)}-$$

$$-2\sum_1^n F(x_i)\int_a^b\frac{F(x)\,P_n(x)\,dx}{(x-x_i)\,P_n'(x_i)},$$

но формула механическихъ квадратуръ составленная для опредѣленнаго значенія указателя n спра-

[1]) Въ дальнѣйшемъ мы намѣрены къ этому возвратиться.

ведлива для всякаго полинома степени $(2n-1)$,— слѣдовательно:

$$\int_a^b \frac{P_n^2(x)\,dx}{(x-x_i)^2\,P_n'(x_i)^2} = A_i;$$

$$\int_a^b \frac{P_n^2(x)\,dx}{(x-x_i)(x-x_k)\,P_n'(x_i)\,P_n'(x_k)} = 0; \text{ (для } i \neq k)$$

формула (7) дастъ такимъ образомъ:

$$(8) \qquad S_n = \int_a^b F(x)^2\,dx + \sum_1^n F^2(x_i)\,A_i -$$

$$-2\sum_1^n F(x_i)\int_a^b \frac{F(x)\,P_n(x)dx}{(x-x_i)\,P_n'(x_i)};$$

принимая теперь во вниманіе ранѣе доказанную сходимость формулы квадратуръ для всякой непрерывной функціи, т. е:

$$\int_a^b F(x)^2\,dx = \lim_{n=\infty} \sum_1^n F^2(x_i)\,A_i,$$

видимъ, что для установленія (6) достаточно будетъ доказать справедливость слѣдующей формулы:

$$(9) \qquad \int_a^b F^2(x)\,dx =$$

$$\lim_{n=\infty} \sum_1^n F(x_i) \int_a^b \frac{F(x)\,.\,P_n(x)\,dx}{(x-x_i)P_n'(x_i)},$$

причемъ выраженіе стоящее подъ знакомъ предѣла въ правой части (9) представляетъ собою очевидно формулу квадратуръ для непрерывной функціи $F(x)$, составленную по интерполяціоннымъ полиномамъ Лежандра, но *при* той же функціи $F(x)$; роль коэффиціентовъ A_i выполняютъ теперь интегралы правой части (9), которые обозначимъ черезъ B_i, причемъ:

$$\sum_1^n |B_i| \quad \sum_1^n \left| \int_a^b \frac{F(x)\,P_n(x)\,dx}{(x-x_i)\,P_n'(x_i)} \right|$$

$$\leq \sqrt{\int_a^b F(x)^2 dx} \sum_1^n \sqrt{\int_a^b \frac{P_n^2(x)\,dx}{(x-x_i)^2\,P_n'^2(x_i)}} =$$

$$= \sqrt{\int_a^b F^2(x)\,dx} \sum_1^n \sqrt{A_i};$$

откуда по извѣстному неравенству Cauchy, имѣемъ:

$$(10) \qquad \sum_1^n B_i \leq \sqrt{\int_a^b F(x)^2\,dx}\ \sqrt{n}\ \sqrt{\sum_1^n A_i} =$$

$$= \sqrt{(b-a)\int_a^b F^2(x)\,dx}\ \sqrt{n},$$

т. е. въ разсматриваемомъ случаѣ сумма абсолютныхъ значеній коэффиціентовъ формулы квадратуръ будетъ менѣе нѣкотораго опредѣленнаго числа умноженнаго на степень n съ показателемъ равнымъ половинѣ; такимъ образомъ теорема Weierstrass'a о приближеніи непрерывныхъ функцій помощью полиномовъ могла была-бы быть установлена этимъ путемъ помощью квадратуръ при условіи доказательства сходимости формулы квадратуръ для всякой непрерывной функціи, когда коэффиціенты B_i удовлетворяютъ выше-высказанному условію; оставляя вопросъ этотъ для непрерывной функціи пока открытымъ, ограничимся только замѣчаніемъ, что примѣняя выраженіе для остатка разложенія функціи удовлетворяющей условію Липшица (съ коэф. λ) по полиномамъ въ формѣ данной напр. Jackson'омъ, т. е. въ формѣ $\frac{3\lambda}{n}$, убѣждаемся анализомъ § 1, въ сходимости формулы [1]) квадратуръ между прочимъ и для случая $\sum_1^n |B_i| < Mn^{1/2}$, а потому и въ справедливости теоремы Weierstrass'a для нихъ; результатъ полученный въ такой формѣ не представляетъ особаго интереса, но соображенія относящіеся къ установленію формулы (10) и связи ея съ (6) намъ понадобятся въ дальнѣйшей части работы, и потому мы позволили себѣ ихъ привести.

§ 4. Въ случаѣ тригонометрическаго интерполированія можно также утверждать, какъ это и будетъ ниже доказано, сходимость соотвѣтствующихъ квадратуръ, которые можно было-бы назвать напр. тригонометрическими квадратурами.

Возьмемъ для этого среди многочисленныхъ интерполяціонныхъ формулъ ту, сходимость которой была указана Jackson'омъ [2]), причемъ замѣтимъ мимоходомъ, что изъ сходимости ея никоимъ образомъ не вытекаетъ безъ предварительнаго доказательства сходимость формулы соотвѣтствующихъ

[1]) Сходимость формулы квадратуръ при условіи $\sum_1 |A_i| < \frac{O_n^k}{n}$ $(k<1)$ для всякой функціи удовлетворяющей условію Липшица слѣдуетъ также какъ намъ привелось въ личной бесѣдѣ узнать отъ Академика В. А. Стеклова изъ его изслѣдованій по этому вопросу.

[2]) Transactions of the American Math Society. 1913.

квадратуръ, подобно тому, какъ и изъ возможности разложенія функціи въ тригонометрическій рядъ, нельзя заключить безъ доказательства о возможности почленнаго интегрированія ряда.

Итакъ, пусть $f(x)$ періодическая функція съ періодомъ 2π и

$$x_1,\ x_2 \qquad\qquad x_{2n+1}$$

рядъ такихъ значеній x, что

$$x_{i+1} - x_i = \frac{2\pi}{2n+1} \quad (i=1,\ 2 \qquad\qquad 2n)$$

Тогда, если коеффиціенты тригонометрической суммы n-го порядка

$$(11)\quad T_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + \qquad\qquad a_n \cos nx + \\ + \qquad\qquad b_n \sin nx$$

опредѣлены помощью формулъ:

$$a_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} f(x_i) \cos kx_i,$$

$$b_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} f(x) \sin kx_i,$$

то помощью простыхъ и хорошо извѣстныхъ преобразованій, убѣждаемся въ справедливости соотношенія

$$T_n(x) = \frac{1}{2n+1} \sum_{1}^{2n+1} f(x_i) \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})(x-x_i)\right]}{\sin\frac{1}{2}(x-x_i)},$$

откуда непосредственно ясно, что мы имѣемъ дѣло съ интерполяціонной формулой, такъ какъ:

$$T_n(x_k) = f(x_k),$$

для каждаго значенія x_k, гдѣ $k = 1, 2, \qquad 2n+1$; замѣтимъ также, что $T_n(x)$ формулы (13) будетъ единственной тригонометрической суммой n-го порядка обладающей этимъ свойствомъ, такъ что двѣ подобныя суммы, равныя болѣе чѣмъ для $2n$ различныхъ (мод. 2π) значеній аргумента, должны быть тождественны.

Для доказательства сходимости формулы тригонометрическихъ квадратуръ:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx - \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} f(x_i) \int_0^{2\pi} \frac{\sin[(n+1/2)(x-x_i)]}{\sin 1/2\,(x-x_i)}\,dx = \int_0^{2\pi} R_n(x)\,dx$$

или, что все равно

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - T_n(x)]\,dx = \int_0^{2\pi} [f(x) - \frac{a_0}{2} - \\ - a_1 \cos x - \qquad . - b_1 \sin x \qquad - b_n \sin nx]\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} R_n(x)\,dx,$$

достаточно установить

$$(12)\quad \lim_{n=\infty} \int_a^b R_n(x)\,dx = 0,$$

но это непосредственно ясно, ибо:

$$\int_0^{2\pi} R_n(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx - \pi a_0 =$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx - \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} f(x_i),$$

а потому въ силу самого опредѣленія интеграла, какъ предѣла суммы, имѣемъ

$$\lim_{n=\infty} \left[\int_0^{2\pi} f(x)\,dx - \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} f(x_i) \right] =$$

$$= \lim_{n=\infty} \int_a^b R_n(x)\,dx = 0,$$

что и т. д.

Можно было бы также при доказательствѣ сходимости формулы тригонометрическихъ квадратуръ примѣнять методъ перваго § настоящей статьи; для этого достаточно вспомнить, что всякая періодическая функція $f(x)$ обладающая первой производной, разлагается въ тригонометрическій рядъ, равномѣрно сходящійся во всемъ интервалѣ $(0,2\pi)$.

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos x + \qquad A_n \cos nx + B_1 \sin x + \\ + \qquad B_n \sin nx + \qquad = S_n(x) + R_n(x),$$

а потому можно взять n столь большимъ, чтобы при всякомъ x

$$|Rn(x)| < \varepsilon,$$

каково-бы ни было положительное, напередъ заданное число ε [1]).

Обозначая тогда черезъ C_i коеффиціенты формулы квадратуръ, имѣемъ очевидно:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx - \sum_1^{2n+1} f(x_i)\,C_i = \int_0^{} S_n(x)\,dx - \sum_1^{2n+1} C\,S_n(x_i) + \int_0^{2\pi} R_n(x)\,dx - \sum_1^{2n+1} C_i R_n(x_i),$$

при чемъ

$$(13)\quad \int_0^{2\pi} S_n(x)\,dx \qquad \sum_1^{2n+1} C_i S_n(x_i),$$

---

[1]) Причемъ $R^n(x)$ будетъ опредѣленной степени малости въ зависимости отъ условій налагаемыхъ на функцію $f(x)$.

ибо формула эта можетъ быть представлена въ видѣ

$$\int_0^{2\pi} [S_n(x) - T_n(x)]\,dx = 0,$$

и въ справедливости ея можно убѣдиться, замѣчая, что $T_n(x)$ представляетъ собою тригонометрическую сумму n-го порядка, принимающую тѣ-же значенія, что и $S_n(x)$ въ $2n+1$ точкахъ, а потому и тождественную съ $Sn(x)$ на основаніи ранѣе сдѣланнаго замѣчанія.

Остальная часть разсужденія тождественна съ ранѣе приведенной, надлежитъ только анализомъ „особенныхъ“ интегралovъ типа Dirichlet—опредѣлить выраженіе бо́льшее $\sum_1^{2n+1} |C_i|$, при всѣхъ значеніяхъ n.

Въ слѣдующей части настоящей работы предполагаю изучить нѣкоторыя типы формулъ квадратуръ съ точки зрѣнія ихъ сходимости, займемся также и вопросомъ о сходимости самихъ интерполяціонныхъ формулъ.