5. О нѣкоторыхъ неравенствахъ, устанавливаемыхъ при изложеніи метода Schwartz-Poincaré — Стеклова и встрѣчающихся также при рѣшеніи многихъ минимальныхъ задачъ.

Н. М. Крылова.

(Доложено 4 Октября 1915 г.).

Въ различныхъ математическихъ изслѣдованіяхъ связанныхъ съ вопросомъ о существованіи минимума весьма часто бываетъ полезно, какъ мы постараемся ниже показать, приложеніе того основного соотношенія въ теоріи тригонометрическихъ рядовъ, которое было названо проф. В. А. Стекловымъ *уравненіемъ замкнутости* и обобщено имъ для многихъ другихъ системъ ортогональныхъ функцій, встрѣчающихся въ анализѣ и математической физикѣ.

Въ качествѣ конкретнаго примѣра разсмотримъ такую, весьма важную, лемму установленную [1]) В. А. Стекловымъ, помощью тождества E. Picard'a: *„нижній точный предѣлъ отношенія*

$$\frac{\int_a^b u'^2(x)\,dx}{\int_a^b u^2(x)\,dx}$$

равняется

$$\frac{\pi^2}{(b-a)^2},$$

какова-бы не была непрерывная функція $u(x)$, обладающая первой производной въ интервалѣ (a,b) удовлетворяющая одному изъ двухъ условій:

$$\alpha)\ u(a)=0\quad u(b)=0\,;\ \beta)\ \int_a^b u(x)\,dx=0.$$

Лемма эта, которая можетъ быть доказана также, замѣтимъ это кстати, при условіяхъ α) методомъ варіаціоннаго исчисленія [2]), при изложеніи метода Schwartz-Poincaré—Стеклова въ примѣненіи къ дифференціальнымъ уравненіямъ 4-го порядка была обобщена Я. Д. Тамаркинымъ въ его интересной работѣ [1]) и установлена, путемъ перемноженія двухъ неравенствъ В. А. Стеклова, въ слѣдующей формѣ: *„если непрерывная функція $u(x)$ обладаетъ двумя первыми производными въ интервалѣ (a,b) и кромѣ того удовлетворяетъ условіямъ*

$$\omega(a)=\omega(b);\ \int_a^b \omega(x)\,dx=0,$$

то всегда имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$\frac{\int_a^b \omega''^2(x)\,dx}{\int_a^b \omega^2(x)\,dx}\geqq\frac{\pi^4}{(b-a)^4}. \tag{1}$$

Принимая такимъ образомъ во вниманіе важность нижняго точнаго предѣла для того отношенія двухъ интеграловъ, которое фигурируетъ въ лѣвой части формулы (1), предложимъ себѣ, примѣняя уравненіе замкнутости теоріи тригонометрическихъ рядовъ [2]), доказать слѣдующую, общую по этому поводу теорему:

для всякой функціи $\omega(x)$, обладающей въ интервалѣ (a,b) абсолютно непрерывной первой производной [3] разлагающейся притомъ въ равномѣрно

---

[1]) Stekloff. Problème de réfroidissement d'une barre hétcrogène. Annales de Fac. des Sc. de Toulouse 2 s. t. III)

[2]) Hadamard. Calcul des variations. стр. 335.

[1]) Tamarkine. Applications de la méthode des fonctions fondamentales. (Сообщенія Харьковскаго Мат. Общества 1910 г.).

[2]) См. напр. «Записки Горнаго Института. t. IV вып. VI. «О теоремѣ замкнутости въ теоріи тригонометрическихъ рядовъ».

[3]) Обладающей въ свою очередь во всѣхъ точкахъ, за исключеніемъ ансамбля мѣры нуль, отъ квадрата интегрируемой первой производной.

сходящійся рядъ Fourier во всемъ интервалѣ (a,b), *имѣетъ мѣсто соотношеніе*:

$$(2)\qquad \frac{\int_a^b \omega''^2(x)\,dx}{\int_a^b \omega^2(x)\,dx} \geqq \frac{16\pi^4}{(b-a)^4},$$

при слѣдующихъ условіяхъ для функціи $\omega(x)$:

$$(3)\qquad \omega(a)=\omega(b);\ \int_a^b \omega(x)\,dx=0.$$

Для доказательства приведемъ интервалъ (a,b) къ интервалу $(0,2\pi)$ путемъ замѣны перемѣнной:

$$x=a+\frac{b-a}{2\pi}\,z;$$

полагая теперь

$$\omega\left(a+\frac{b-a}{2\pi}\,z\right)=\varphi(x),$$

преобразуемъ условія (3) въ слѣдующія:

$$(4)\qquad \varphi(o)=\varphi(2\pi);\ \int_o^{2\pi}\varphi(z)\,dz=0.$$

Замѣчая, что:

$$(5)\qquad \begin{cases} \int_a^b \omega^2(x)\,dx=\frac{b-a}{2\pi}\int_o^{2\pi}\varphi(z)^2\,dz; \\ \int_a^b \omega''(x)^2\,dx=\left[\frac{2\pi}{(b-a)}\right]^3\int_o^{2\pi}\varphi''^2(z)\,dz; \\ \left[\int_a^b \omega(x)\,dx\right]^2=\left[\frac{b-a}{2\pi}\right]^2\left[\int_o^{2\pi}\varphi(z)\,dz\right]^2 \end{cases}$$

предложимъ себѣ установить такое соотношеніе

$$(6)\qquad \int_a^b \omega^2(x)\,dx-\left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^4\int_a^b \omega''(x)^2\,dx \leqq \leqq \frac{1}{(b-a)}\left[\int_a^b \omega(x)\,dx\right]^2$$

или, что все равно, на основаніи формулъ (5):

$$(6^1)\qquad \int_o^{2\pi}\varphi^2(z)\,dz-\int_o^{2\pi}\varphi''(z)^2\,dz \leqq \frac{1}{\pi}\left[\int_o^{2\pi}\varphi(z)\,dz\right]^2$$

Исходя теперь изъ условій теоремы, а именно: періодичности функціи $\varphi(z)$ и существованія первой производной, можемъ утверждать возможность разложенія $\varphi(z)$ въ рядъ *Fourier* равномѣрно сходящійся во всемъ интервалѣ $(0,2\pi)$:

$$(7)\qquad \varphi(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nz+b_n\sin nz,$$

причемъ рядъ *Fourier* для $\varphi'(z)$ получится почленнымъ дифференцированіемъ ряда (7), т. е.:

$$(8)\qquad \varphi'(z)=\sum_1^{\infty} n\,(-a_n\sin nz+b_n\cos nz);$$

изъ условія абсолютной непрерывности функціи $\varphi'(z)$ и свойствъ абсолютно-непрерывныхъ функцій вытекаетъ существованіе $\varphi''(z)$ во всѣхъ точкахъ интервала $(0,2\pi)$ за исключеніемъ, быть можетъ, точекъ ансамбля мѣры нуль, и мы имѣемъ:

$$\int_o^z \varphi''(z)\,dz=\varphi'(z)-\varphi'(o);$$

отсюда благодаря періодичности функціи $\varphi(z)$, что слѣдуетъ изъ формулы (8), получимъ рядъ *Fourier* для $\varphi''(z)$ почленнымъ дифференцированіемъ ряда (8), причемъ само разложеніе можетъ не имѣть мѣста, и потому примѣняемъ знакъ $\sim$ эквивалентности, введенный Hurwitz'омъ, т. е.

$$(9)\qquad \psi''(z)\,dz\sim-\Sigma\,n^2\,(a_n\cos nz+b_n\sin nz),$$

при этомъ изъ (9) слѣдуетъ только, что коэффиціенты *Fourier* $\varphi''(z)$ будутъ: $-n^2a_n, -n^2b_n$.

Надлежитъ здѣсь замѣтить, что вмѣсто предположенія о равномѣрной сходимости во всемъ интервалѣ ряда *Fourier* для $\varphi'(z)$ можно было-бы ограничиться предположеніемъ періодичности $\varphi'(z)$, т. е. $\varphi'(0)\ \varphi'(2\pi)$, что опять также привело-бы къ разложенію (8), ибо функція $\varphi'(z)$, какъ абсолютно непрерывная функція, будетъ функціей ограниченной варіаціи и тогда достаточно было-бы примѣнить критерій Jordan'а.

Возвращаясь теперь къ формуламъ (7) и (9), примѣнимъ уравненіе замкнутости имѣющее мѣсто, какъ извѣстно для всѣхъ отъ квадрата интегрируемыхъ функцій:

$$(10)\qquad \begin{cases} \int_o^{2\pi}\varphi^2(z)dz=\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2\right]; \\ \int_o^{2\pi}\varphi''^2(z)\,dz=\pi\left[\sum_{n=1}^{\infty}n^4\,(a_n^2+b_n^2)\right]; \end{cases}$$

вычитая почленно полученныя равенства (10), получимъ формулу (6'), предложенную для доказательства:

$$\int_o^{2\pi}\varphi^2(z)\,dz-\int_o^{2\pi}\varphi''^2(z)\,dz \leqq \frac{\pi a_0^2}{2} \leqq \frac{1}{2\pi}\left[\int_o^{2\pi}\varphi(z)\,dz\right]^2$$

причемъ знакъ равенства можетъ очевидно имѣть мѣсто только, если

$$a_n = 0;\ b_n = 0,$$

начиная съ $= 2$, т. е. если

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos z + b_1 \sin z$$

Установивъ формулу (6′), изъ соотвѣтствующаго ей соотношенія (6), получимъ

$$\frac{\int_a^b \omega'^2(x)\, dx}{\int_a^b \omega^2(x)\, dx} \geqq \frac{16\pi^4}{(b-a)^4},$$

это и тр. док., причемъ совершенно ясно, что доказанная теорема легко обобщается на тотъ случай, *когда вмѣсто* $\omega''(x)$ *имѣются производныя болѣе высшаго порядка.*

Въ томъ случаѣ, когда вмѣсто $\omega(x)$ имѣется $\omega'(x)$, тождественное съ вышеприведеннымъ доказательство, даетъ намъ соотношеніе

$$\frac{\int_a^b \omega'^2(x)\, dx}{\int_a^b \omega^2(x)\, dx} \geqq \frac{4\pi^2}{(b-a)^2},$$

причемъ нижній точный предѣлъ получился выше, чѣмъ къ леммѣ В. А. Стеклова, отличаясь отъ него коэффиціентомъ 4.

Произошло это вслѣдствіи добавленія равенства $\omega(a)\ \ \omega(b)$ къ условію леммы В. А. Стеклова, а именно къ условію $\int_a^b \omega(x)dx = 0$, но можно разумѣется, пользуясь уравненіемъ замкнутости, возстановить лемму непосредственно въ той формѣ, которая была упомянута въ началѣ настоящей статьи, а именно доказавъ ее напр для всѣхъ, обладающихъ первой производной, функцій $\omega(x)$, удовлетворяющихъ граничнымъ условіямъ

$$\omega(a) = 0;\ \omega(b) = 0.$$

Для этой цѣли достаточно будетъ установить такую формулу:

$$\frac{}{(b-a)} \int_a^b \omega^2(x)\, dx \quad \frac{(b-a)}{\pi} \int_a^b \omega'^2(x)\, dx \leqq 0,$$

которая путемъ замѣны перемѣнной:

$$x = a + \frac{(b-a)}{\pi} z,$$

приведетъ къ соотношенію

$$(11) \qquad \int_0^\pi \varphi^2(z)\, dz - \int_0^\pi \varphi'^2(z)\, dz \leqq 0,$$

доказываемому помощью уравненія замкнутости. примѣненнаго къ системѣ ортогональныхъ функцій

$$V_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nz$$

и

$$U_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nz,\ U_o = \sqrt{\frac{1}{\pi}}.$$

Примѣняя теперь уравненіе замкнутости [1]) къ этимъ системамъ, представляющимъ собою очевидно частный случай функцій Sturm-Liouvill'я, легко получимъ

$$(12) \qquad \int_0 \varphi^2(z)\, dz - \int_0 \varphi'^2(z)\, dz = 2\pi \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 - \frac{b_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right]$$

гдѣ:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0 \varphi(z) \sin nz\, dz$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0 \varphi'(z) \cos nz\, dz;$$

отсюда слѣдуетъ, благодаря условію $\varphi(0) = 0;\ \varphi(\pi) = 0$

$$b_n = a_n n;\ b_0 = 0,$$

а потому изъ (12) получается искомая формула (11), причемъ знакъ равенства можетъ имѣть мѣсто при

$$\varphi(z) = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x,$$

т. е. знакъ равенства въ формулѣ

$$(13) \qquad \frac{\int_a^b \omega'^2(x)\, dx}{\int_a^b \omega^2(x)\, dx} \geqq \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$$

будетъ при

$$\omega(x) = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{\pi(x-a)}{b-a},$$

что вполнѣ согласуется съ результатами В. А. Стеклова.

Надлежащимъ образомъ выбирая ту систему ортогональныхъ функцій, къ которой мы примѣняемъ уравненіе замкнутости, можно также доказать соотношеніе (13) и при условіи:

$$\int_a^b \omega(x)dx = 0$$

[1]) См. Comptes Rendus. 1902. 10. Septembre.

для этой цѣли при вычисленіи интегралов

$$\int_0^{\pi} \varphi^2(z)\,dz, \quad \int_0^{\pi} \varphi'^2(z)\,dz$$

беремъ соотвѣтственно системы функцій:

$$V_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \; V_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nz$$

$$U_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nz;$$

тогда

$$\int_0^{\pi} \varphi^2(z)\,dz - \int_0^{\pi} \varphi'^2(z)\,dz = 2\pi \left[\frac{b_0^2}{2} + \right.$$

$$\left. + \sum_1^{\infty} b_n^2 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right]$$

гдѣ:

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(z)\,dz; \; b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(z) \cos nz\,dz;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi'(z) \sin nz\,dz$$

а потому:

$$b_0 = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\varphi(z) \frac{\sin nz}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \varphi'(z) \sin nz\,dz =$$

$$-\frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \varphi'(z) \sin nz\,dz \quad -\frac{a_n}{n}$$

слѣдовательно:

$$\int_0^{\pi} \varphi^2(z)\,dz - \int_0^{\pi} \varphi'^2(z)\,dz = 2\pi \left[\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \left[\frac{1}{n^2} - 1 \right] \right],$$

т. е.

$$\int_0^{\pi} \varphi^2(z)\,dz - \int_0^{\pi} \varphi'^2(z)\,dz \leq 0,$$

откуда и слѣдуетъ соотношеніе (13), причемъ знакъ равенства можетъ очевидно имѣть мѣсто только если всѣ b_n, начиная съ $n = 2$, равны нулю, т. е. для функціи

$$\omega(x) = C \cos \frac{\pi(x-a)}{(b-a)},$$

что и т. д.

Совершенно ясно, что тѣ же разсужденія, т. е. выборъ соотвѣтственной системы ортогональныхъ функцій, могли-бы быть приложены при доказательствѣ теоремы относительно нижняго предѣла отношенія

$$\frac{\int_a^b \omega''(x)^2\,dx}{\int_a^b \omega^2(x)\,dx},$$

чего мы для краткости дѣлать не будемъ ограничиваясь только утвержденіемъ справедливости ея и при условіяхъ отличныхъ отъ:

$$\omega(a) \quad \omega(b); \quad \int_a^b \omega(x)\,dx = 0;$$

такъ напр. можно утверждать справедливость формулы

$$\frac{\int_a^b \omega''^2(x)\,dx}{\int_a^b \omega^2(x)\,dx} \geq \frac{\pi^4}{(b-a)^4}$$

для всякой обладающей двумя первыми производными функціи $\omega(x)$ удовлетворяющей условіямъ γ):

$$(\gamma) \qquad \int_a^b \omega(x)\,dx = 0 \quad \omega'(a) = 0 \quad \omega'(b) = 0$$

Всѣ вышеприведенныя леммы, какъ было уже сказано, легко обобщаются на случай производныхъ высшаго порядка, входящихъ подъ знакомъ интеграла въ числителѣ отношенія и имѣютъ важное значеніе не только при обобщеніяхъ метода Schwartz-Poincaré—Стеклова для дифференціальныхъ уравненій высшихъ порядковъ, но встрѣчаются также при рѣшеніи многихъ другихъ вопросовъ.

Отъ нижняго точнаго предѣла отношенія

$$\frac{\int_a^b \omega'^2(x)\,dx}{\int_a^b \omega^2(x)\,dx}$$

при условіяхъ

$$\omega(a) = \omega(b); \int_a^b \omega(x)\,dx = 0.$$

зависитъ напр., какъ показалъ [1]) Almansi, вопросъ объ устойчивости фигуръ равновѣсія Plateau въ

[1]) См. Annali di Matematica t. 12. serie III.

теоріи капиллярности, причемъ этимъ путемъ итальянскому геометру удалось строго доказать теорему, экспериментальнымъ путемъ найденную Plateau.

Наконецъ примѣненіемъ уравненія замкнутости возможно трактовать, какъ мы намѣрены показать въ одной изъ слѣдующихъ статей, вопросъ о нахожденіи минимальной величины такого интеграла, подъ знакомъ котораго стоитъ квадратичная форма составленная изъ неизвѣстной функціи и ея производныхъ, разумѣется при существованіи нѣкоторыхъ ограничительныхъ условій налагаемыхъ на функцію.

Петроградъ
4 Октября 1915 г.