4. О варіаціонныхъ методахъ Ritz'a и Boussinesq'a.

Н. М. Крылова.

(Доложено 4 Октября).

Въ статьѣ: „Sur l'application de la méthode de W. Ritz au problème des oscillations contraintes". (Bulletin de la Soc. mathem. de Kharkoff. 1914), нами была установлена такая теорема: если примѣняя къ диф. уравненію задачи вынужденныхъ колебаній методъ W. Ritz'a, ищутъ искомую функцію, т. е. интегралъ уравненія, въ формѣ ряда, расположеннаго по соотвѣтствующимъ „фундаментальнымъ" функціямъ, то коеффиціенты финальнаго разложенія Ritz'a опредѣляются индивидуально, и ихъ выраженія будутъ тождественны съ тѣми, которые получаются примѣненіемъ основного метода математической физики, такъ называемаго, метода Schwartz-Poincaré—Стеклова.

Въ методѣ Ritz'a какъ извѣстно, данное диффер. уравненіе разсматривается какъ уравненіе Эйлера, происшедшее отъ варьированія нѣкотораго интеграла, причемъ подъинтегральная функція этого послѣдняго представляетъ собой квадратичную форму отъ неизвѣстной функціи и ея первой производной; естественной представляется поэтому мысль примѣнить къ разсматриваемому вопросу „уравненіе замкнутости", что и составитъ предметъ перваго § настоящей статьи; но прежде чѣмъ приступить къ этому, надлежитъ отмѣтить, что результатъ такимъ образомъ полученный, и тождественный съ результатомъ вышеупомянутой статьи, представляется небезъинтереснымъ, по нашему мнѣнію, уже по одному тому, что такимъ путемъ попутно получается, правда въ частномъ случаѣ, *доказательство сходимости процесса Ritz'a даже и въ томъ случаѣ, когда квадратичная форма подъ знакомъ интеграла, подлежащаго варіированію, не будетъ опредѣленной, положительной формой, т. е. когда не выполняется то условіе, которое являлось существеннымъ въ разсужденіяхъ самого Ritz'a.*

§ 1. Всѣ дальнѣйшія разсужденія непосредственно обобщаются для двухъ и трехъ измѣреній, а потому, ограничиваясь для краткости изложенія случаемъ одного измѣренія, напомнимъ что задача интегрированія уравненія:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda A(x)u + f(x) = 0 \quad (1)$$

при граничныхъ условіяхъ:

$$u(a) = 0,\ u(b) = 0\ ^2),$$

[1]) Гдѣ $A(x)$ *можетъ даже* мѣнять знакъ въ интервалѣ (a,b), при условіи существов нія фундаментальныхъ функцій.

[2]) Можно было-бы пользоваться и иными условіями, изслѣдованными В. А. Стекловымъ и др. авторами.

приводится, согласно основной идеи Ritz'a, къ розысканію среди функцій обладающихъ первой производной и обращающихся въ нуль на концахъ (a,b) интервала, той, которая придаетъ минимальное значеніе интегралу

$$(2)\quad 1 = \int_a^b \left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \lambda A(x)u^2 - 2fu \right] dx;$$

получающееся при варьированіи интеграла I уравненіе Эйлера и будетъ исходнымъ диф. уравненіемъ (1). Замѣчая теперь, что такъ какъ, согласно изслѣдованіямъ академика В. А. Стеклова [1]), всякая функція, обладающая первой производной и обращающаяся въ нуль въ a и b, разлагается въ абсолютно и равномѣрно сходящійся рядъ, расположенный по фундаментальнымъ функціямъ $v_n(x)$, имѣемъ право утверждать, что искомый интегралъ, *если онъ существуетъ*, можетъ быть представленъ въ видѣ:

$$(3)\quad u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n v_n(x),$$

гдѣ

$$\alpha_n = \int_a^b u(x) A(x) v_n(x) dx;$$

отсюда слѣдуетъ, примѣняя обозначеніе для эквивалентности введенное Hurwitz'омъ:

$$\frac{du}{dx} \sim \sum_{n}^{\infty} \alpha_n v'_n(x),$$

ибо, какъ извѣстно,

$$\int_a^b v_n(x) v'_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n \\ \lambda_n, & m = n, \end{cases}$$

а потому изъ дифф. уравненія фундаментальныхъ функцій имѣемъ интегрируя по частямъ и вспоминая граничныя условія:

$$\alpha_n = \int_a^b u(x) A(x) v_n(x) dx = -$$

$$-\frac{1}{\lambda_n}\int_a^b u(x) \frac{d^2 v_n}{dx^2} dx = \frac{\int_a^b u'(x) v'_n(x) dx}{\int_a^b v_n'^2(x) dx};$$

слѣдовательно въ силу уравненія замкнутости В. А. Стеклова [1]), получимъ:

$$\int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = \sum_n \lambda_n \alpha_n^2;$$

вспоминая, что функціи $v_n(x)$ ортогональны и нормированы при функціи $A(x)$, можемъ интегралъ I представить поэтому въ видѣ:

$$(4)\quad I = \sum_n^{\infty} \lambda_n \alpha_n^2 - \lambda \sum_u^{\infty} \alpha_n^2 - 2 f_n \alpha_n,$$

гдѣ

$$f_n = \int_a^b f(x) v_n(x) dx$$

Совершенно ясно, что подставляя въ формулу (2) вмѣсто $u(x)$ *конечное* разложеніе по $v_n(x)$, получимъ, благодаря свойству фундаментальныхъ функцій и ихъ производныхъ, выраженіе типа правой части формулы (4), а потому опредѣляя искомыя коеффиціенты α изъ условій обращенія I въ минимумъ, т. е. изъ условій:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_m} = 0, \text{ (гдѣ } m = 1, 2, \quad n)$$

имѣемъ такое выраженіе для искомыхъ коеффиціентовъ:

$$\alpha_n = \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda}$$

которое является тождественнымъ съ выраженіемъ полученнымъ примѣненіемъ метода Schwartz-Poincaré—Стеклова, какъ было доказано въ нашей выше цитированной статьѣ.

Роль уравненія замкнутости сводится такимъ образомъ къ возможности непосредственнаго перехода къ предѣлу въ правой части формулы (4); это не было существеннымъ въ предшествующихъ разсужденіяхъ, но можетъ принести по нашему мнѣнію пользу при попыткахъ обобщить методу Ritz'a.

§ 2. Въ томъ частномъ случаѣ, когда коеффиціентъ $A(x) = \text{Const.}$ и намъ приходится разлагать по функціямъ

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin \frac{n\pi(x-a)}{(b-a)},$$

ортогональнымъ (равно какъ и ихъ производныя) при функціи равной единицѣ, имѣемъ

$$(5)\quad \alpha_n = \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda A}$$

[1]) См. его многочисленныя работы въ «Annales de Toulouse, Comptes Rendus de l'Ac. de Paris. e. t. c.

[1]) См. предъидущую ссылку.

3. Въ своей „Théorie analytique de la chaleur" Boussinesq предложилъ другой методъ, который, также какъ и методъ Ritz'a приводитъ къ нѣкоторой варіаціонной задачѣ: исходя непосредственно изъ даннаго дифф. уравненія (1), пытаются слѣлать наименьшей среднюю величину квадрата ошибки, т. е. другими словами, дѣло идетъ объ обращеніи въ минимумъ интеграла:

$$I_1 = \int_a^b \left[\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda A(x)u + f\right]^2 dx$$

Замѣчая, что ищется такое рѣшеніе уравненія (1), которое обращается въ нуль въ граничныхъ точкахъ интервала (a,b), можно искать его, благодаря существованію производныхъ, среди такихъ равномѣрно въ интервалѣ (a,b) сходящихся рядовъ, которыя расположены по фундаментальнымъ функціямъ $v_n(x)$, причемъ коэффиціенты ряда опредѣлятся изъ условія обращенія интеграла I въ минимумъ, т е. пріемомъ Ritz'a.

Относительно метода Boussinesq а обычныя замѣчанія сводятся къ слѣдующимъ. преимущество его передъ методомъ Ritz'a заключаются, якобы въ томъ, что заранѣе извѣстно то минимальное значеніе—равное нулю, которое придаетъ интегралу искомое точное рѣшеніе дифф уравненія; равнымъ образомъ минимальное значеніе интеграла I_1 будетъ очевидно понижаться по мѣрѣ того, какъ мы будемъ брать все большее и большее число коэффиціентовъ, а потому значенія интеграла I_1 обладаютъ нижней точной границей, ибо

$$I_1 > 0,$$

но совершенно не извѣстно достигается-ли эта нижняя точная граница функціей $u(x)$, и стремится-ли этотъ минимумъ къ нулю, по мѣрѣ безграничнаго увеличенія числа коэффиціентовъ, такъ какъ методъ Boussinesq'a не разработанъ въ теоретическомъ отношеніи.

Представляется поэтому не безъинтереснымъ изслѣдовать получимъ-ли мы сходящійся процессъ поставляя въ интегралъ I_1

(6) $u(x) = \alpha_1 v_1(x) + \alpha_2 v_2(x) + \quad \cdot \alpha_n v_n(x)$

и опредѣляя коэффиціенты α_i изъ условій минимума, т е. изъ условій.

$$\frac{\partial I_1}{\partial \alpha_i} = 0 \text{ (гдѣ } i = 1,\ 2 \qquad n).$$

Для этой цѣли возьмемъ простѣйшій случай выше изслѣдованный, когда разложеніе производится по соотвѣтствующимъ фундаментальнымъ функціямъ, и когда въ уравненіи (1) коэффиціентъ $A(x) = \text{const}$. тогда принимая во вниманіе, что фундаментальныя функціи задачи и „особенныя" значенія параметра будутъ соотвѣтственно:

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\frac{n\pi(x-a)}{(b-a)},$$

и

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2},$$

видимъ, что интегралъ Boussinesq'a

$$I_1 = \int_a^b \left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]^2 dx + \lambda^2 A^2 \int_a^b u^2 dx +$$

$$+ \int_a^b f^2 dx + 2\int_a^b f\frac{d^2u}{dx^2}\,dx + 2\lambda A\int_a^b f\,dx +$$

$$+ 2\lambda A\int \frac{d^2u}{dx^2}\,u\,dx$$

послѣ подстановки выраженія (6) приметъ видъ:

(7) $$I_1 \quad \sum_n \frac{\pi^4 n^4}{(b-a)^4}\alpha_n^2 \quad \lambda^2 A^2 \sum_n \alpha_n^2$$

$$+ \int_a^b f^2 dx - 2\left(\sum f \quad \alpha_n \cdot \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2} + 2\lambda A f_n \alpha_n\right.$$

$$2\lambda A\alpha_n^2 \quad \frac{n^2}{(b\quad)^2}$$

ибо

$$v''(x) = -\frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}\left[\sqrt{\frac{2}{(b-a)}}\right] \sin \quad \frac{n}{(b-a)}(x \quad a) =$$

$$= -\frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2} v_n(x),$$

а потому изъ условій

$$\frac{\partial I_1}{\partial \alpha_1} = 0$$

для индивидуальнаго опредѣленія коэффиціентовъ получимъ уравненія·

$$\frac{\pi^4 n^4}{(b-a)^4}\alpha_n + \lambda^2 A^2 \alpha_n - f_n \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2} + \lambda A f_n$$

$$- 2\lambda A\alpha_n \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2} \quad 0,$$

откуда

$$\alpha_n = \frac{f_n\left[\frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2} - \lambda A\right]}{\left[\frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2} - \lambda A\right]^2} \qquad \frac{f_n}{\left[\frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2} - \lambda A\right]} = \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda A};$$

полученное выраженіе тождественно съ тѣмъ (5), которое получается примѣненіемъ метода Ritz'a, а потому, въ силу результата нашей выше цитированной статьи, можемъ утверждать, что процессъ Boussinesq'a въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ даетъ точное рѣшеніе задачи.

Въ общемъ случаѣ вопросъ остается открытымъ, хотя нѣкоторыя соображенія заставляютъ предполагать, что разсмотрѣнный выше частный случай не будетъ единственнымъ случаемъ „сходимости“ процесса Boussinesq'a.

Петроградъ. 3/x 1915 г.