3. Объ остаточномъ членѣ интерполяціонной формулы Лагранжа.

Н. М. Крылова.

(Доложено 28 Сентября 1915 г.).

Штурмъ въ своемъ „Курсѣ Анализа (1857) далъ для остатка ряда Маклорена-Тейлора слѣдующую формулу

$$(1)\ R_n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left[f^{(n-1)}(a+\theta x) - f^{(n-1)}(a)\right], 0<\theta<1),$$

нетребующую знанія $f^{(n)}(x)$ для нахожденія предѣловъ R_n

Въ соотвѣтствіи съ этимъ представляется небезъинтереснымъ искать аналогичное выраженіе остатка и для интерполяціонной формулы Лагранжа.

$$(2)\qquad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(x)}{x-x_i}\ \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)} + R_n$$

гдѣ интерполяціонный полиномъ

$$\varphi(x) = (x-x_1)(x\quad x_2)\qquad (x-x_n),$$

а остатокъ R_n, въ обычной формѣ т. н. формѣ Лагранжа, данной Stieltjes'омъ будетъ, какъ извѣстно: [1])

$$R_n = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\qquad (x-x_n)}{1\ \ 2\ \ 3\qquad n} f^{(n)}(\varepsilon),$$

гдѣ ε лежитъ въ интервалѣ $(x, x_1, \ldots x_n)$. Замѣчая, что формула (2) можетъ быть переписана такъ:

$$(3)\qquad \frac{f(x)}{\varphi'(x)} + \frac{f(x_1)}{\varphi'(x_1)} + \frac{f(x_2)}{\varphi'(x_2)} + \cdot\qquad \frac{f(x_n)}{\varphi'(x_n)} = \frac{1}{1\ .\ 2\ .\ 3\qquad n.} f^{(n)}(\varepsilon),\ ^{2})$$

будемъ искать выраженіе для разности

$$f(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(x)}{x-x_i}\ \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)}$$

т. е. для остатка, въ видѣ произведенія

$$\frac{(x\quad x_1)(x-x_2)\qquad (x-x_{n-1})}{1\ \ 2\ \ 3\qquad (n-1).}\psi(x),$$

причемъ для опредѣленія $\psi(x)$ обратимъ вниманіе на то, что разность:

$$(4)\qquad f(z) - \sum_{1}^{n} \frac{\varphi(z)}{z-x_i}\ \frac{f(x_i)}{\varphi(x_i)} -$$

$$\frac{(z\quad x_1)(z\quad x_2\qquad (z-x_{n-1})}{1\ \ 2\qquad (n-1)}\psi(x)$$

обращается въ нуль при $z = x, x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$, и слѣдовательно ея $(n\quad)$-ая производная равна нулю для нѣкотораго значенія $z = \varepsilon_1$ лежащаго между наименьшимъ и наибольшимъ изъ чиселъ x, x_1, $x_2\qquad x_{n-1}$, имѣемъ поэтому:

$$(5)\ f^{(n-1)}(\varepsilon_1) - (1\ \ 2\qquad n-1\ )\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)} = \psi(x).$$

Принимая-же теперь во вниманіе формулу (3), убѣждаемся, что множитель при $(n\ \ 1)!$ въ лѣвой части формулы (5) равняется

$$(6)\qquad \frac{1}{1\ \ 2\qquad (n-1)} f^{(n\quad 1)}(\varepsilon_2)$$

гдѣ ε_2 лежитъ между наименьшимъ и наибольшимъ изъ чиселъ: $x_1\ x_2\qquad x_n$.

Подставляя полученное выраженіе (6) въ формулу (5) получимъ

$$\psi(x) = f^{(n-1)}(\varepsilon_1) - f^{(n-1)}(\varepsilon_2),$$

---

[1]) См. „Курсъ Диффер. Исчисленія“ Проф. Н. М. Крылова Изд. Горнаго Института. 1914.

[2]) Замѣтимъ мимоходомъ, что въ томъ случаѣ, когда $f(x)$ будетъ полиномомъ, степень котораго $r \leq n-2$, формула $\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)} = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\varepsilon)$ дастъ непосредственно намъ $\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)}$ 0, т. е. извѣстную лемму Эйлера въ теоріи разложенія раціональныхъ дробей на простѣйшія.

и слѣдовательно остатокъ R_n интерполяціонной формулы Лагранжа приведенъ такимъ образомъ къ формѣ:

$$(7)\quad R_n = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{1\ 2\ \ldots\ (n-1)}\left[f^{(n-1)}(\varepsilon_1) - f^{(n-1)}(\varepsilon_2)\right],$$

аналогичной формѣ остатка (1) Штурма, причемъ ε_1 и ε_2 лежатъ соотвѣтственно въ интервалахъ: $(x,\ x_2,\ x_3\ \ldots\ x_{n-1})$ и $(x_1, x_2\ \ldots\ x_n)$ *).

Въ виду простоты аналитическихъ средствъ для доказательствъ и отсутствія необходимости изучать большую литературу вопроса, задача о нахожденіи различныхъ формъ остатка интерполяціонныхъ формулъ Лагранжа и Ньютона могла-бы представить особый интересъ для лицъ впервые приступающихъ къ математическимъ изслѣдованіямъ; этимъ лицамъ она и предлагается поэтому въ качествѣ темы для самостоятельной работы *), *не носящей компилятивнаго характера.*

---

1) Замѣчая же, что $f^{(n-1)}(\varepsilon_1) - f^{(n-1)}(\varepsilon_2) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) f^{(n)}[\varepsilon_1 + \Theta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)]$, видимъ, что остатокъ (7) принимаетъ форму аналогичную формѣ Коши.

*) Надлежитъ конечно прежде всего установить слѣдующую формулу (аналогичную теоремѣ о среднихъ Коши), данную Stieltjes'омъ: $f(x) = H(x) + [f_1(x) - H_1(x)]\frac{f^{(n)}(\varepsilon)}{f_1^{(n)}(\varepsilon)}$, гдѣ ε имѣетъ одно и то же значеніе, а $H(x)$ и $H_1(x)$ соотвѣтственно будутъ:

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi(x)}{x-x_i}\cdot\frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)},\quad H_1(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi(x)}{x-x_i}\frac{f_1(x_i)}{\varphi'(x_i)},\quad \text{гдѣ}$$

$$\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$