Записки Ленинградского Горного Института. Том XI, вып. 3, 1938
Annales de l'Institut des Mines à Léningrad. Vol. XI, liv. 3, 1938

О колебаниях рамы инерционного грохота

Доц. Н. Р. Малкин

Upon the small vibrations of the frame of the inertial screen

Doz. N. R. Malkin

§ 1. Вывод общих уравнений движения

В предыдущей работе „Об инерционных грохотах" [1]) я рассматривал вибрирующий грохот как систему с тремя степенями свободы, что отвечает предположению симметричности всех масс грохота и сил, приложенных к ним относительно некоторой вертикальной плоскости симметрии, пересекающейся с решетом грохота вдоль линии наибольшего ската его. Эта линия принималась за OX. Возьмем теперь более общий случай, предполагая, что грохот есть твердое тело, обладающее всеми шестью степенями свободы. Такой грохот можно рассматривать как прямоугольную пластину, наклоненную под углом α к горизонту и поддерживаемую четырьмя пружинами, перпендикулярными к плоскости грохота. На раме грохота расположены валы с невыбалансированными шкивами. Центробежные силы инерции, возникающие при вращении шкивов, снабженных соответствующими инерционными грузами, сообщают раме грохота вынужденные колебания.

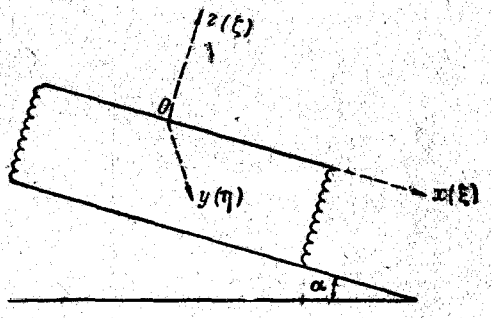


Рис. 1. Грохот в положении равновесия.

Расположим снова начало O относительных координат ξ, η, ζ, связанных с рассматриваемым твердым телом, грохотом, в центре тяжести его и направим ось $O\xi$ по линии наибольшего ската рамы, ось $O\eta$ тоже в плоскости рамы и перпендикулярно к $O\xi$, и ось $O\zeta$ перпендикулярно к двум предыдущим и вверх (рис. 1).

Абсолютные координаты точки O, центра тяжести грохота, обозначим через x_0, y_0, z_0 (в дальнейшем будем иногда пропускать для сокращения нулевые значки и писать просто x, y, z). За начало абсолютных координат примем то положение точки O, которое отвечает нормальному положению пружин, когда рама грохота предполагается невесомой. Рассматривая вращение рамы грохота около трех подвижных осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, мы можем принять их за главные центральные оси инерции, ибо они будут осями симметрии для непогруженной ничем рамы грохота.

[1]) Том X, вып. 3, 1937.

Обозначая через θ_ξ, θ_η, θ_ζ углы поворота рамы грохота около этих осей и через $\dot\theta_\xi$, $\dot\theta_\eta$, $\dot\theta_\zeta$ — угловые скорости соответствующих вращений, получим для живой силы грохота выражение [1]):

$$T=\frac{M}{2}(\dot x_0^2+\dot y_0^2+\dot z_0^2)+\frac{1}{2}(I_1\dot\theta_\xi^2+I_2\dot\theta_\eta^2+I_3\dot\theta_\zeta^2), \qquad (1)$$

где M есть масса грохота, а I_1, I_2 и I_3 — моменты инерции его относительно указанных осей.

Определим далее потенциальную энергию сжатия пружин. Обозначим через a_i, b_i, c_i относительные координаты верхних концов пружин, где $i=1, 2, 3, 4$, и определим абсолютные координаты тех же точек.

При нормальном положении грохота обе системы координат, абсолютная и относительная, совпадают, т. е. все разности $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$ равны нулю. После того, как центр тяжести грохота переместится из точки (O, O, O) в точку (x_0, y_0, z_0), а самый грохот повернется вокруг осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ на углы $\theta_\xi=\theta_1$, $\theta_\eta=\theta_2$ и $\theta_\zeta=\theta_3$, разности $x-\xi$, $y-\eta$ и $z-\zeta$ примут значения:

$$\left.\begin{aligned} x-\xi&=x_0+\eta\theta_3-\zeta\theta_2,\\ y-\eta&=y_0+\zeta\theta_1-\xi\theta_3,\\ z-\zeta&=z_0+\xi\theta_2-\eta\theta_1. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Это известные из механики твердого тела формулы для поворота на бесконечно малый угол. Они дают, очевидно, приращения абсолютных координат какой-нибудь точки грохота при переходе грохота из нормального положения в любое заданное. Нас интересуют те точки грохота, в которых он прикреплен к пружинам; для них положим:

$$\xi=a_i,\quad \eta=b_i,\quad \zeta=c_i=0,\qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Тогда, обозначая жесткость пружин в направлении длины их через k_i и в перпендикулярном направлении — через k_i' получим [2]) для потенциальной энергии деформированных пружин выражение:

$$V_1=\sum_{i=1}^{4}\frac{k_i'}{2}(x_0+b_i\theta_3)^2+\sum_{i=1}^{4}\frac{k_i'}{2}(y_0-a_i\theta_3)^2+\sum_{i=1}^{4}\frac{k_i}{2}(z_0+a_i\theta_2-b_i\theta_1)^2. \qquad (3)$$

Потенциальная энергия силы тяжести, действующей на грохот, будет:

$$V_2=g(z_0\cos\alpha-x_0\sin\alpha)$$

и полная потенциальная энергия:

$$V=V_1+V_2. \qquad (4)$$

Введем, наконец, в рассмотрение силы трения, пропорционально скорости движения, благодаря которым затухают собственные колебания системы и остаются только вынужденные колебания ее. Допустим, как обычно, что такая сила, приложенная к любой точке (x_i, y_i, z_i) равна $-l_i\vec{V_i}$ где V_i абсолютная скорость этой точки, или в проекциях:

$$X_i'=-l_i\dot x_i,\quad Y_i'=-l_i\dot y_i,\quad Z_i'=-l_i\dot z_i,$$

где l_i — положительная постоянная.

---

[1]) См. например К. Шефер, Теоретическая физика, т. I (механика), стр. 380, форм. (80), 1935.

[2]) Так же, как это было сделано в предыдущей статье.

Введем диссипативную функцию Рейлея [1]):

$$H=\frac{1}{2}\sum l_i\,(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2), \tag{5}$$

тогда, очевидно,

$$X_i'=-\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i},\quad Y_i'=-\frac{\partial H}{\partial \dot{y}_i},\quad Z_i'=-\frac{\partial H}{\partial \dot{z}_i},$$

т. е. диссипативные силы выражаются через функцию Рейлея и через скорости точек совершенно так же, как обычные (консервативные или имеющие потенциал) силы выражаются через потенциальную энергию и через координаты точек. Отсюда легко показать, что и для обобщенных диссипативных сил получатся аналогичные выражения через обобщенные скорости:

$$-\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_j}\qquad j=1,\ 2,\ 3\ldots$$

Подставляя выражения (2) и (5), получим (считая $\zeta=0$):

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} l_i\,[(\dot{x}_0+\eta_i\dot{\theta}_3)^2+(\dot{y}_0-\xi_i\dot{\theta}_3)^2+(\dot{z}_0+\xi_i\dot{\theta}_2-\eta_i\dot{\theta}_1)^2], \tag{6}$$

где роль $\dot{q}_j$ играют $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$.

Диссипативные силы будем считать приложениями к четырем концам пружин и к центру тяжести грохота, учитывая в последнем случае лишь движение его в направлении Oz, так как сопротивление пружин и трение проваливающейся сквозь сито породы будет действовать, главным образом, в этом направлении.

Остается рассмотреть еще неконсервативные силы, зависящие от времени, причем, как и в предыдущей работе, ограничимся центробежными силами инерции инерционных грузов, пренебрегая очень малыми силами переносного и кориолисова ускорений. Заранее почти очевидно, что и в настоящем случае достаточно ограничиться силами:

$$P_{ox}=P_0\sin\omega t$$

и

$$P_{oz}=P_0\cos\omega t, \tag{7}$$

где ω — угловая скорость вращения груза, а M_0 и r_0 — масса и радиус инерции его и $P_0=M_0r\omega^2$ — полная центробежная сила инерции.

Можно проверить также, что с указанной точностью можно вращение вокруг осей подвижных заменить вращением вокруг осей неподвижных.

Исходя из полученных выражений, можно приступить к составлению системы уравнений, определяющих движение грохота. Это будут три уравнения движения центра инерции и три уравнения Эйлера:

$$\left.\begin{aligned}
M\ddot{x}_0&=F_x,\\
M\ddot{y}_0&=F_y,\\
M\ddot{z}_0&=F_z,\\
I_1\dot{\omega}_1+(I_2-I_3)\,\omega_2\omega_3&=L_x,\\
I_2\dot{\omega}_2+(I_3-I_1)\,\omega_3\omega_1&=L_y,\\
I_3\dot{\omega}_3+(I_1-I_2)\,\omega_1\omega_2&=L_z,
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

[1]) См. например, Лойцянский и Лурье Теоретическая механика, ч. III, § 50, стр. 439. 1934.

где M — масса грохота, а I_1, I_2 и I_3 — моменты инерции его относительно осей $O\xi$, $O\eta$ и $O\zeta$.

Далее F_x, F_y, F_z — составляющие главного вектора всех сил, L_x, L_y и L_z — составляющие главного момента этих сил, а $\omega_1 = \dot{\theta}_1$, $\omega_2 = \dot{\theta}_2$ и $\omega_3 = \dot{\theta}_3$ — угловые скорости вращения вокруг осей.

При этом:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} + \sum X_i$$

(где X_i — составляющие сил, зависящих от времени, V — потенциал консервативных и H — потенциал диссипативных сил),

$$L_x = -\frac{\partial V}{\partial \theta_1} - \frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}_1} + Q_1,$$

где

$$Q_1 = \sum_i \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial \theta_1} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial \theta_1} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial \theta_1} \right).$$

Аналогично

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} + \sum Y_i,$$

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial \dot{z}} + \sum Z_i, \quad L_y = -\frac{\partial V}{\partial \theta_2} - \frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}_2} + Q_2$$

и

$$Q_2 = \sum_i \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial \theta_2} + \ldots \right)$$

$$L_z = -\frac{\partial V}{\partial \theta_3} - \frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}_3} + Q_3$$

и

$$Q_3 = \sum_i \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial \theta_3} + \ldots \right)$$

Выражения для F_x, F_y и F_z очевидны.

Что же касается составления L_x, L_y, L_z, то, как известно, $\frac{\partial V}{\partial \theta_1}$ есть, действительно, момент консервативных сил относительно оси $O\xi$, а Q_1 — такой же момент сил, зависящих от времени.

В три последние уравнения (8) входят квадратичные члены $\omega_2\omega_3$, $\omega_3\omega_1$ и $\omega_1\omega_2$, в первом приближении, однако, ими можно пренебречь, считая скорости ω_1, ω_2 и ω_3 малыми величинами первого порядка. Тогда все эти уравнения станут линейными и интегрирование их не представит никаких принципиальных затруднений. Чтобы получить эти уравнения в явном виде, выпишем вышеполученные значения функций V, H, X_i, Z_i и т. д.

$$V = \sum_{i=1}^{4} \frac{k_i'}{2} (y_0 - a_i\theta_3)^2 + \sum_{i=1}^{4} \frac{k_i'}{2} (x_0 + b_i\theta_3)^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{4} \frac{k_i}{2} (z_0 + a_i\theta_2 - b_i\theta_1)^2 + g(z_0 \cos\alpha - x_0 \sin\alpha) \qquad (4)$$

$$H = \frac{1}{2} \sum l_i \left[(\dot{x}_0 + b_i\dot{\theta}_3)^2 + (\dot{y}_0 + a_i\dot{\theta}_3)^2 + (\dot{z}_0 + a_i\dot{\theta}_2 - b_i\dot{\theta}_1)^2 \right] + \frac{1}{2} L_0 \dot{z}_0^2, \qquad (6)$$

где последний член $\frac{1}{2} L_0 \dot{z}_0^2$ выражает диссипативные силы, приложенные к центру грохота, упомянутые на стр. 35.

$$X_i = P_i \sin \omega t, \quad Z_i = P_i \cos \omega t, \quad Y_i = 0 \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} x - \xi &= x_0 + \eta\theta_3 - \zeta\theta_2 \\ y - \eta &= y_0 + \zeta\theta_1 - \xi\theta_3 \\ z - \zeta &= z_0 + \xi\theta_2 - \eta\theta_1 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

причем, ввиду того, что наши оси $O\xi$, $O\eta$ и $O\zeta$ на самом деле неточно совпадают с главными осями инерции, следует или 1) прибавить к T выражение

$$\Delta T = -d\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 - e\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1 - f\theta_1\theta_2,$$

где d, e, f — малые величины, называемые произведениями инерции, или 2) веса масс, создающие эту несимметричность, включить в силы $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ или в Q_i (т. е. в X_i и Z_i), или 3) допустить, что оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ идут не точно по указанным им геометрическим направлениям, но так, чтобы совпадать с главными осями инерции; при этом направление всех сил изменится на малые углы, которыми пренебрежем.

Выберем последний способ, как самый простой. Получим таким образом следующие шесть уравнений типа (8):

$$\left.\begin{aligned}
M\ddot{x}_0 + \left(\sum_{i=1}^{4} k_i'\right) x_0 &= -\left(\sum_{i=1}^{4} l_i\right)\dot{x}_0 - \left(\sum_{i=1}^{4} l_i b_i\right)\dot{\theta}_3 + \\
&+ \sum P_i \sin \omega t + g \sin \alpha - \left(\sum_{i=1}^{4} k_i' b_i\right)\theta_3, \\
M\ddot{y}_0 + \left(\sum k_i'\right) y_0 &= -\left(\sum l_i\right)\dot{y}_0 + \\
&+ \left(\sum l_i a_i\right)\dot{\theta}_3 + \left(\sum k_i' a_i\right)\theta_3, \\
M\ddot{z}_0 + \left(\sum k_i\right) z_0 &= -\left(\sum l_i\right)\dot{z}_0 - \left(\sum l_i a_i\right)\dot{\theta}_2 + \\
+ \left(\sum l_i b_i\right)\dot{\theta}_1 + \sum P_i \cos \omega t - g \cos \alpha - L_0\dot{z}_0 &- \left(\sum ka\right)\theta_2 + \left(\sum kb\right)\theta_1 \\
I_1\ddot{\theta}_1 - \left(\sum k_i b_i\right) z_0 - \left(\sum k_i a_i b_i\right)\theta_2 &+ \left(\sum k_i b_i\right)\theta_1 = \\
= -\sum \eta_i P_i \cos \omega t + \left(\sum l_i b_i\right)\dot{z}_0 &+ \left(\sum l_i a_i b_i\right)\theta_2 - \left(\sum l_i b_i^2\right)\dot{\theta}_1 \\
I_2\ddot{\theta}_2 + \left(\sum k_i a_i\right) z_0 + \left(\sum k_i a_i^2\right)\theta_2 &- \left(\sum k_i a_i b_i\right)\theta_1 = \\
= -\left(\sum l_i a_i\right)\dot{z}_0 - \left(\sum l_i a_i^2\right)\dot{\theta}_2 &+ \left(\sum l_i a_i b_i\right)\dot{\theta}_1 - \\
- \sum P_i (\zeta_i \sin \omega t - \xi_i &\cos \omega t), \\
I_3\ddot{\theta}_3 - \left(\sum k_i' a_i\right) y_0 + \left(\sum k_i' b_i\right) x_0 &+ \left(\sum k_i' (a_i^2 + b_i^2)\right)\theta_3 = \\
= -\left(\sum l_i b_i\right)\dot{x}_0 + \left(\sum l_i a_i\right)\dot{y}_0 &- \left(\sum l_i (b_i^2 + a_i^2)\right)\theta_3 + \eta P \sin \omega t.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Вводя сокращенные обозначения

$$\left.\begin{gathered}\sum k_i' = K', \quad \sum k_i = K, \quad \sum l_i = L,\\ \sum k_i b_i = \beta, \quad \sum k_i a_i = \alpha, \quad \sum l_i a_i = \alpha_1,\\ \sum k_i' b_i = \beta', \quad \sum k_i' a_i = \alpha', \quad \sum l_i b_i = \beta_1,\\ \sum k_i a_i^2 = A, \quad \sum k_i b_i^2 = B, \quad \sum l a^2 = A_1, \quad \sum l b^2 = B_1,\\ \sum k_i a_i b_i = \gamma, \quad \sum l a_i b_i = \gamma_1, \quad \sum k_i' a_i^2 = A', \quad \sum k_i' b_i^2 = B' \text{ [1]},\end{gathered}\right\} \tag{11}$$

и перенося в правые части члены, содержащие малые множители, обозначенные греческими буквами, получаем:

$$\left.\begin{gathered}M\ddot{x}_0 + K'x_0 + L\dot{x}_0 = \sum P_j \sin \omega t + g \sin \alpha - \beta_1 \dot{\theta}_3 - \beta' \theta_3\\ M\ddot{y}_0 + K'y_0 + L\dot{y}_0 = \alpha_1 \dot{\theta}_3 + \alpha' \theta_3\\ M\ddot{z}_0 + Kz_0 + (L + L_0)\dot{z}_0 =\\ = \sum P_j \cos \omega t - \alpha_1 \dot{\theta}_2 + \beta_1 \dot{\theta}_1 - g \cos \alpha - \alpha \theta_2 + \beta \theta_1\\ I_1 \ddot{\theta}_1 + B\theta_1 + B_1 \dot{\theta}_1 = -\sum \eta_j P_j \cos \omega t + \beta z_0 + \gamma \theta_2 + \beta_1 \dot{z}_0 + \gamma_1 \dot{\theta}_2\\ I_2 \ddot{\theta}_2 + A\theta_2 + A_1 \dot{\theta}_2 =\\ = \sum P_j (\xi_j \cos \omega t - \zeta_j \sin \omega t) - \alpha z_0 + \gamma \theta_1 - \alpha_1 z_0 + \gamma_1 \dot{\theta}_1\\ I_3 \ddot{\theta}_3 + (A' + B')Q_3 - (A_1 + B_1)\dot{\theta}_3 =\\ = \sum \eta_j P_j \sin \omega t + \alpha' y_0 - \beta' x_0 - \beta_1 \dot{x}_0 - \alpha_1 \dot{y}_0.\end{gathered}\right\} \tag{12}$$

§ 2. Исследование решений для частных случаев

Из (12) видно, что система распадается на шесть отдельных уравнений, если положить равными нулю восемь малых величин α, α', β, β', α_1, β_1, γ, γ_1, зависящих от двадцати аргументов a_i, b_i, k_i, k_i' $l_i i = 1, 2, 3, 4$, чего легко добиться бесконечным множеством способов, конструируя соответственным образом машину. Например, предположив, что пружины одинаковы ($k_1 = k_2 = k_3 = k_4$ и $k_1' = k_2' = k_3' = k_4'$, $l_1 = l_2 = l_3 = l_4$) и расположены симметрично относительно центра тяжести, т. е.

$$\sum a_i = 0, \quad \sum b_i = 0, \quad \sum c_i = 0, \tag{13}$$

увидим, что все эти члены обращаются в нуль и получатся 6 отдельных уравнений:

---

[1]) Во всех суммах пределы $i = 1$ до $i = 4$.

$$\left.\begin{aligned}
M\ddot{x}_0 + L\dot{x}_0 + K'x_0 &= \sum P_j \sin \omega t + Mg \sin \alpha \\
M\ddot{y}_0 + L\dot{y}_0 + K'y_0 &= 0 \\
M\ddot{z}_0 + (L + L_0)\dot{z}_0 + Kz_0 &= \sum P_j \cos \omega t - Mg \cos \alpha. \\
I_1\ddot{\theta}_1 + B_1\dot{\theta}_1 + B\theta_1 &= -\sum \eta_j P_j \cos \omega t \\
I_2\ddot{\theta}_2 + A_1\dot{\theta}_1 + A\theta_2 &= \sum P_j (\xi_j \cos \omega t - \zeta_j \sin \omega t) \\
I_3\ddot{\theta}_3 + (A' + B')\theta_3 - (A_1 + B_1)\dot{\theta}_3 &= \sum \eta_j P_j \sin \omega t,
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

где

$$K = 4k, \quad K' = 4k', \quad L = 4l$$

$$A = 4ka^2, \quad A' = 4k'a^2, \quad B = 4kb^2, \quad B' = 4k'b^2,$$

$$A_1 = 4la^2, \quad B_1 = 4lb^2$$

k и k' — продольные и поперечные жесткости пружин, a и b — координаты их, l — коэфициенты внутреннего трения. Решением второго уравнения будет очевидно $y_0 = 0$, остальные же уравнения дадут однотипные решения, и грохот, вообще говоря, будет испытывать пять различных колебательных движений: два поступательных и три вращательных.

Однако, выбирая соответствующим образом места для расположения инерционных грузов, легко число колебательных движений уменьшить до двух; положив, например, что все грузы расположены по средней линии грохота ($\eta_i = 0$), видим, что четвертое и шестое уравнения также дадут нулевые решения. Этот случай был разобран мною в предыдущей работе.

Можно, наконец, добиться уничтожения и пятого уравнения, взяв два инерционные груза P_1 и P_2 с разностью фаз в $\pi/2$.

Тогда соответствующие силы будут:

$$X_1 = P_1 \sin \omega t \qquad X_2 = P_2 \cos \omega t$$

$$Z_1 = P_1 \cos \omega t \qquad Z_2 = -P_2 \sin \omega t$$

$$Q_z = Z_1 \frac{\partial z_1}{\partial z_0} + Z_2 \frac{\partial z_2}{\partial z_0} = Z_1 + Z_2 = P_1 \cos \omega t - P_2 \sin \omega t$$

$$Q_x = X_2 + X_1 = P_2 \cos \omega t + P_1 \sin \omega t$$

$$Q_{\theta_2} = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} + Z_1 \frac{\partial z_1}{\partial \theta_2} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} + Z_2 \frac{\partial z_2}{\partial \theta_2},$$

где из (3) следует:

$$x_1 - \xi_1 = x_0 + \eta_1\theta_3 - \zeta_1\theta_2,$$

$$x_2 - \xi_2 = x_0 + \eta_2\theta_3 - \zeta_2\theta_2 \text{ и т. д.,}$$

т. е.

$$Q_{\theta_2} = -\zeta_1 X_1 - \zeta_2 X_2 + \xi_1 Z_1 + \xi_2 Z_2$$

или

$$Q_{\theta_2} = (P_1\xi_1 - P_2\zeta_2)\cos \omega t + (-P_1\zeta_1 - P_2\xi_2)\sin \omega t$$

и, следовательно,

$$Q_{\theta_2} = 0,$$

при условии $P_1\xi_1 = P_2\zeta_2$; $-P_1\zeta_1 = P_2\xi_2$, чего можно добиться бесчисленным множеством способов, например, положив:

$$P_1 = P_2, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \xi_1, \quad \xi_2 = -\xi_1, \qquad (15)$$

т. е. расположив два одинаковые инерционные груза на одинаковой высоте и на отдельных шкивах, расположенных симметрично относительно центра тяжести на расстояниях от него, равных высоте грузов.

При этом Q_z можно переписать следующим образом:

$$Q_z = \sqrt{P_1^2+P_2^2}\left[\frac{P_1}{\sqrt{P_1^2+P_2^2}}\cos\omega t - \frac{P_2}{\sqrt{P_1^2+P_2^2}}\sin\omega t\right]$$

и полагая, как обычно,

$$\frac{P_1}{\sqrt{P_1^2+P_2^2}} = \cos D,\quad \frac{P_2}{\sqrt{P_1^2+P_2^2}} = \sin D,\ \text{т. е. } \operatorname{tg} D = \frac{P_2}{P_1},$$

получим:

$$Q_z = \sqrt{P_1^2+P_2^2}\cos(\omega t + D)$$

и, аналогично,

$$Q_x = \sqrt{P_1^2+P_2^2}\,[\sin\omega t\cos D + \cos\omega t\sin D] = \sqrt{P_1^2+P_2^2}\sin(\omega t + D).$$

Тогда система (14) сведется к двум отдельным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x} + L\dot{x} + K'x &= Mg\sin\alpha + \sqrt{P_1^2+P_2^2}\sin(\omega t + D)\\ M\ddot{z} + (L+L_0)\dot{z} + KZ &= -Mg\cos\alpha + \sqrt{P_1^2+P_2^2}\cos(\omega t + D)\end{aligned}\right\}. \qquad (16)$$

Полагая $\frac{L+L_0}{M} = 2n_z$, $\frac{K}{M} = p_z^2$, $t - \frac{D}{\omega} = \tau$, получим уравнение:

$$\ddot{z} + 2n_z\dot{z} + p_z^2 z = -g\cos\alpha + \frac{\sqrt{P_1^2+P_2^2}}{M}\cos\omega\tau, \qquad (16а)$$

отличающееся от обычного уравнения вынужденных колебаний лишь постоянным членом $-g\cos\alpha$, которому, очевидно, отвечает частное решение:

$$z = -\frac{g\cos\alpha}{p^2}.$$

Решением же уравнения без члена $-g\cos\alpha$ является, как известно из механики, выражение:

$$e^{-n\tau}\left[R_1\cos\sqrt{p_z^2-n_z^2}\,\tau + R_2\sin\sqrt{p_z^2-n_z^2}\,\tau\right] + \frac{\sqrt{P_1^2+P_2^2}}{M\sqrt{(p_z^2-\omega^2)^2+4n_z^2\omega^2}}\sin(\omega\tau+\delta),$$

где $\operatorname{tg}\delta = \frac{2n\omega}{\omega^2-p^2}$.

Следовательно, полное решение уравнения (16а) будет иметь вид:

$$z = -\frac{g\cos\alpha}{p^2} + e^{-n_z\left(t-\frac{D}{\omega}\right)}\left[R_1\cos\sqrt{p_z^2-n_z^2}\left(t-\frac{D}{\omega}\right) + R_2\sin\sqrt{p_z^2-n_z^2}\left(t-\frac{D}{\omega}\right)\right] +$$

$$+\frac{\sqrt{P_1^2+P_2^2}}{M\sqrt{(p_z^2-\omega^2)^2+4n_z^2\omega^2}}\cos(\omega t - D + \delta). \qquad (17)$$

Интерес в этой формуле представляет лишь последний член правой части, ибо первый член дает статическое отклонение, второй — очень быстро затухающие собственные колебания и последний — вынужденные колебания.

Вынужденные же колебания для x представляются, очевидно, членом:

$$x = \frac{\sqrt{P_1^2+P_2^2}}{M\sqrt{(p_x^2-\omega^2)^2+4n_x^2\omega^2}}\sin(\omega t - D + \delta_x), \qquad (17а)$$

где $2n_x = \frac{L}{M}$, $p_x^2 = \frac{k'}{M}$, $\operatorname{tg}\delta_x = \frac{2n_x\omega}{\omega^2-p_x^2}$.

В обоих последних формулах член $4n^2\omega^2$ весьма мал по сравнению с ω^4 и потому, если подобрать K и K' так, чтобы $p_z=\omega$, а p_x отличалось бы от ω довольно значительно, то амплитуда вынужденных колебаний по z будет весьма велика по сравнению с амплитудой колебаний по x, так, что практически будут происходить только первые колебания, чего, видимо, обычно стремятся достигнуть.

При соблюдении же условий (15 и § 1) будут происходить пять отдельных колебательных движений, каждое из которых выразится формулами типа (17) или (17а), причем преобладать будут те колебания, которые окажутся ближе к резонансу, т. е. те, для которых значения p_x окажутся ближе к ω, о чем можно судить заранее по формулам:

$$\left.\begin{aligned} p_x^2 &= \frac{K'}{M} = \frac{4k'}{M}, \quad p_z^2 = \frac{K}{M} = \frac{4k}{M} \\ p_{\theta_1}^2 &= \frac{B}{I_1} = \frac{4kb^2}{I_1}, \quad p_{\theta_2}^2 = \frac{A}{I_2} = \frac{4ka^2}{I_2} \\ p_{\theta_3}^2 &= \frac{A'+B'}{I_3} = \frac{4k'(a^2+b^2)}{I_3}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Рассматривая грохот как прямоугольный параллелепипед малой толщины $2c$ (и обозначая два другие измерения его через $2a$ и $2b$), будем иметь для моментов инерции его известные выражения:

$$I_1 = \frac{M}{3}(b^2+c^2) = \frac{M}{3}b^2,$$

$$I_2 = \frac{M}{3}(c^2+a^2) = \frac{M}{3}a^2,$$

$$I_3 = \frac{M}{3}(a^2+b^2),$$

откуда получим:

$$p_{\theta_1}^2 = p_{\theta_2}^2 = 3\frac{4k}{M}, \quad p_{\theta_3}^2 = 3\frac{4k'}{M}, \tag{18а}$$

или

$$p_{\theta_1}^2 = p_{\theta_2}^2 = 3p_z^2, \quad p_{\theta_3}^2 = 3p_x^2.$$

Здесь a и b — полудлина и полуширина грохота, k и k' — жесткость пружин в продольном и поперечном направлениях. Впрочем, при совершенном достижении резонанса главное значение уже могут приобрести члены $4n^2\omega^2$, где:

$$\left.\begin{aligned} 2n_x &= \frac{L}{M} = \frac{4l}{M}, \quad 2n_z = \frac{L+L_0}{M}, \\ 2n_{\theta_1} &= \frac{B_1}{I_1} = \frac{4lb^2}{M/3\,b^2} = 3\frac{4l}{M}, \\ 2n_{\theta_2} &= \frac{A_1}{I_2} = 3\frac{4l}{M}, \quad 2n_{\theta_3} = \frac{A_1+B_1}{I_3} = 3\frac{4l}{M}, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

или

$$n_{\theta_3} = n_{\theta_2} = n_{\theta_1} = 3n_x = 3\frac{4l}{M}.$$

Надо обратить также внимание на величину амплитуд возмущающих колебаний согласно правым частям формул (14).

Для случая одного инерционного груза:

$$P_j = P_1, \quad \xi_j = \xi_1, \quad \zeta_i = \zeta_1.$$

Вынужденные колебания всех обобщенных координат уравнений (14) представляются формулами:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{P_1}{M\sqrt{(p_x^2-\omega^2)^2+4n_x^2\omega^2}}\sin(\omega t+\delta_x),\\ y_0 &= 0,\\ z_0 &= \frac{P_1}{M\sqrt{(p_z^2-\omega^2)^2+4n_z^2\omega^2}}\cos(\omega t+\delta_z),\\ \theta_1 &= \frac{-\eta P_1}{I_1\sqrt{(p_{\theta_1}^2-\omega^2)^2+4n_{\theta_1}^2\omega^2}}\cos(\omega t+\delta_{\theta_1}),\\ \theta_2 &= \frac{P_1\sqrt{\xi_1^2+\zeta_1^2}}{I_2\sqrt{(p_{\theta_2}^2-\omega^2)^2+4n_{\theta_2}^2\omega^2}}\cos(\omega t+\delta_{\theta_2}),\\ \theta_3 &= \frac{\eta_1 P_1}{I_3\sqrt{(p_{\theta_3}^2-\omega^2)^2+4n_{\theta_3}^2\omega^2}}\sin(\omega t+\delta_{\theta_3}), \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

где ξ_1, η_1, ζ_1 — относительные координаты инерционного [1]) груза.

Проф. Левенсон указывает, что в грохотах прежних систем инерционный груз помещался иногда не по середине грохота, а у верхнего края, что плохо отзывалось на работе и долговечности грохота.

Как видно из (20), это должно было вызвать колебания вокруг одной лишь оси $O\eta$ — правда, колебания весьма сильные (так как длина грохота порядка 2—$2^1/_2$ *м*, а ширина — 1 *м*). Очевидно при одном грузе эти колебания можно довести до минимума, положив $\xi_1=0$ и уменьшив, насколько возможно, ζ_1. Если вынести инерционный груз за пределы грохота, то можно положить точно $\zeta_1=0$ и колебания по координате θ_2 уничтожатся совсем. Но это вряд ли будет выгодно, ибо тогда возникнут аналогичные и тоже довольно сильные колебания сразу вокруг двух других осей $O\xi$ и $O\zeta$. Полного уничтожения всех крутильных колебаний можно достигнуть, как указывалось выше, при помощи двух симметричных относительно центра тяжести валов.

Колебания представляются тогда формулами (17) и (17а).

Можно, впрочем, достигнуть той же цели и при помощи одного вала с двумя равными и симметрично относительно $O\xi$ расположенными грузами, вынесенными за пределы грохота и с $\zeta_1=0$. Тогда в формулах (14) правые части четвертого и шестого уравнений обратятся в нуль (ибо $\eta_1+\eta_2=0$). Точно так же равна нулю будет правая часть пятого уравнения ($\xi_1=\xi_2=\zeta_1=\zeta_2=0$), и решения представятся в виде:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= 0, \quad \theta_1=0, \quad \theta_2=0, \quad \theta_3=0\\ x_0 &= \frac{2P_1}{M\sqrt{(p_x^2-\omega^2)^2+4n_x^2\omega^2}}\sin(\omega t+\delta_x),\\ z_0 &= \frac{2P_2}{M\sqrt{(p_z^2-\omega^2)^2+4n_z^2\omega^2}}\cos(\omega t+\delta_z). \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

§ 3. О решении уравнений в общем случае

Если малые величины α, α', γ, γ_1 не точно равны нулю, то уравнения (12) легко решить последовательными приближениями: рассматривая формулы (20) как первое приближение и представляя их символически в виде

$$q_i = R_i\cos\omega t + S_i\sin\omega t, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots\ 6, \qquad (20)$$

[1]) Все эти формулы можно представить символически одной:

$$q_i = C_i\sin(\omega t+\delta_i \qquad i=1,\ 2,\ \ldots\ 6.$$

подставим эти выражения в правые части (12) вместо входящих туда неизвестных q_i и $\dot{q}_i$ $\quad i = 1, 2, \ldots 6$.

Тогда все уравнения (12) примут вид:

$$\ddot{q}_i + 2n_i q_i + p_i^2 q_i = C_i \cos \omega t + D_i \sin \omega t,$$

и решение их (второе приближение) будет иметь снова вид:

$$q_i = R_i' \cos \omega t + S_i' \sin \omega t,$$

но лишь с другими постоянными R_i и S_i', причем можно ожидать чрезвычайно быстрой сходимости величин R_i, R_i', R_i'', ... и S_i, S_i', S_i''... так что и точное решение должно иметь тот же вид.

Вместо последовательных приближений можно поэтому сразу искать точные решения (12) в виде системы функций (20′), определив величины R_i, S_i подстановкой в уравнении по методу неопределенных коэфициентов. Процесс этот облегчится тем, что уравнения (12) распадаются на две отдельные группы по три уравнения с тремя неизвестными в каждой. В конце концов, дело все-таки сведется к вычислению определителей 6-го порядка, что на практике приведет к утомительным вычислениям и потому относящихся сюда формул я приводить не буду.

Можно также учесть погрешность отбрасываемых квадратичных членов в уравнениях Эйлера (8), действуя последовательным приближением, как это принято при решении нелинейных уравнений с малыми нелинейными членами. При этом следовало бы учесть и малые члены, происходящие от переносного и кориолисова ускорения инерционного груза. Однако, имея в виду, что колебания грохота очень малы, всеми этими поправками на практике можно пренебречь.

Резюме

Разбирается общий случай малых колебаний инерционного грохота, рассматриваемого как твердое тело, обладающее всеми 6 степенями свободы, и выясняются условия, при которых задача может быть сведена к трем степеням свободы (случай, разобранный в предыдущей статье — „Об инерционных грохотах“).

Уравнения Эйлера, определяющие движение твердого тела, упрощаются в виду малости колебаний его, и в первом приближении задача сводится к решению системы 6 совокупных линейных уравнений с постоянными коэфициентами или даже к отдельным линейным уравнениям. В случае надобности, результат может быть улучшен последовательным приближением, с учетом также и нелинейных членов.

Summary

In this paper is examined a general case of the small vibrations of the inertial screen considered as a rigid body possessing all the 6 degrees of liberty. There are also determined the conditions under which the problem can be reduced to three degrees of liberty (the case examined in a previous paper entitled „Upon inertial screens“).

Euler's equations determining the motion of a rigid body are simplified considering the smallness of its vibrations and in the first approximation the problem is reduced to the solution of a system of 6 simultaneous linear equations with constant coefficients, or even to separate linear equations. In case of need the result can be improved by consecutive approximations taking also non-linear equations into consideration