2. Замѣтка объ остаточномъ членѣ ряда Тейлора *).

Н. М. Крылова.

(Доложено 28-го Сентября).

Для рѣшенія вопроса о томъ, будетъ ли остатокъ R_n ряда Тейлора стремиться къ нулю при $\lim n = \infty$, стараются, какъ извѣстно, представить остатокъ въ различныхъ видахъ, ибо часто для этого одинъ видъ является болѣе удобнымъ другого, въ чемъ можно убѣдиться напр. хотя-бы на разложеніи $\log(1+x)$.

Предложимъ поэтому далѣе, въ виду важности задачи, способъ нахожденія остатка формулы Тейлора, отличающійся отъ обычно излагаемаго въ курсахъ Дифф. Исчисленія, причемъ попутно будутъ получены различныя формы остаточнаго члена, а именно формула Roche—Schlömilche'a, заключающая въ себѣ, какъ частные случаи, наиболѣе извѣстныя формы остатковъ, а именно формы Лагранжа и Коши. Слѣдуя ниже указанному методу можно было-бы пытаться получить еще иныя формулы остатка R_n, что и предлагается поэтому въ качествѣ темы для изслѣдованія интересующимся этимъ вопросомъ.

Введемъ прежде всего слѣдующія обозначенія:

$$F(z) = f(z) + \frac{(x-z)}{1} f'(z) + \\ + \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(z);$$

$$\Phi(z) = \varphi(z) + \frac{(x-z)}{1} \varphi'(z) + \\ + \frac{(x-z)^{m-1}}{(m-1)!} \varphi^{(m-1)}(z);$$

$$T(z) = \psi(z) + \frac{(x-z)}{1} \psi'(z) + \\ + \frac{(x-z)^{p-1}}{(p-1)!} \psi^{(p-1)}(z);$$

тогда очевидно:

$$F(x) = f(x);\ \Phi(x) = \varphi(x);\ T(x) = \psi(x);$$

$$F(x_1) = f(x_1) + \frac{(x-x_1)}{1} f'(x_1) + \\ + \ldots \frac{(x-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_1) = f(x) - R_n$$

$$\Phi(x_1) = \varphi(x) - R'_m;$$

$$T(x_1) = \psi(x) - R''_p;$$

замѣтивъ это, разсмотримъ такой опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} F(\eta) & \Phi(\eta) & T(\eta) \\ F(x) & \Phi(x) & T(x) \\ F(x_1) & \Phi(x_1) & T(x_1) \end{vmatrix};$$

онъ очевидно обращается въ нуль при $\eta = x$ и $\eta = x_1$, а потому и производная его обращается въ нуль для нѣкотораго средняго значенія ε между x и x_1, т. е. для

$$\varepsilon = x_1 + \theta(x - x_1),$$

гдѣ $$0 < \theta < 1;$$

слѣдовательно:

$$\begin{vmatrix} F'(\varepsilon) & \Phi'(\varepsilon) & T'(\varepsilon) \\ F(x) & \Phi(x) & T(x) \\ F(x_1) & \Phi(x_1) & T(x_1) \end{vmatrix} = 0;$$

подставляя теперь вышенайденныя значенія вмѣсто $F(x)$, $F(x_1)$,... и замѣчая, что:

$$F'(\varepsilon) = \frac{(x-\varepsilon)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\varepsilon);$$

$$\Phi'(\varepsilon) = \frac{(x-\varepsilon)^{m-1}}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(\varepsilon);$$

$$T'(\varepsilon) = \frac{(x-\varepsilon)^{p-1}}{(p-1)!} \psi^{(p)}(\varepsilon);$$

получимъ слѣдующее соотношеніе между остатками R_n, R'_m, R''_p:

*) Изъ курса лекцій по Диффер. Исчисленію. Проф. Н. М. Крылова. Изданіи Горнаго Института 1914.

$$\begin{vmatrix} \frac{(x-\varepsilon)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\varepsilon); & \frac{(x-\varepsilon)^{m-1}}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(\varepsilon); & \frac{(x-\varepsilon)^{p-1}}{(p-1)!} \psi^{(p)}(\varepsilon); \\ f(x) & \varphi(x) & \psi(x) \\ f(x) - R_n & \varphi(x) - R'_m & \psi(x) - R''_p \end{vmatrix} = 0;$$

вычитая изъ элементовъ послѣдней строки соотвѣтственные элементы второй, и мѣняя знаки у ея элементовъ на противоположные, имѣемъ окончательно такое соотношеніе, изъ котораго при частныхъ видахъ функцій $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, получаемъ всѣ извѣстныя формулы остатка:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \frac{(x-\varepsilon)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\varepsilon); & \frac{(x-\varepsilon)^{m-1}}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(\varepsilon); & \frac{(x-\varepsilon)^{p-1}}{(p-1)!} \psi^{(p)}(\varepsilon); \\ f(x) & \varphi(x) & \psi(x) \\ R_n(x) & R'_m(x) & R''_p(x) \end{vmatrix} = 0;$$

при этомъ совершенно ясно, *что въ цѣляхъ еще большей общности можно было бы ввести въ разсмотрѣніе опредѣлитель образованный помощью произвольнаго, конечнаго числа k функцій f, φ, ψ...;* ограничиваясь для краткости разсмотрѣніемъ опредѣлителя (1), и полагая въ немъ:

$$\varphi(x) = (x - x_1)^{m-1},$$

(или вообще $(x-x_1)^r$ гдѣ $r \leq m-1$),

$$\psi(x) = (x - x_1)^p,$$

получимъ такой опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} \frac{(x-\varepsilon)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\varepsilon); & 0; & (x-\varepsilon)^{(p-1)} p \\ f(x) & ; (x-x_1)^r; & (x - x_1)^p \\ R_n(x) & 0; & (x-x_1)^p \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(x-\varepsilon)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\varepsilon)\,(x-x_1)^{r+p} -$$

$$-(x-\varepsilon)^{p-1} p (x-x_1)^r \quad R_n(x) = 0;$$

откуда

$$R_n(x) = \frac{(x-\varepsilon)^{n-p} f^n(\varepsilon)\,(x-x_1)^p}{(n-1)!\,p}.$$

изъ этой формулы, извѣстной подъ именемъ формулы Roche—Schlömilche'a, при $p = n$ получается остатокъ въ формѣ Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\varepsilon)(x-x_1)^n}{1.2 \qquad n},$$

а при $p = 1$ имѣемъ остатокъ въ формѣ Коши:

$$R_n(x) = \frac{(x-x_1)^n (1-\Theta)^{n-1} f^n(\varepsilon)}{1.2. \qquad .(n-1)}.$$

Этотъ методъ можетъ быть очевидно обобщенъ и для нахожденія различныхъ формъ остатка интерполяціонныхъ формулъ [1].

---

[1]) См. «Объ остаточномъ членѣ интерполяціонной формулы Лагранжа». Записки Горн. Института. Т. VI.