Записки Ленинградского Горного Института. Том XI, вып. 3, 1938
Annales de l'Institut des Mines à Léningrad. Vol, XI, liv. 3, 1938

К теории движения материала в грохотах и конвейерах

Доц. Н. П. Неронов

Upon the theory of the motion of materials in screens and conveyors

Doz. N. P. Neronoff

Один из вопросов теории грохотов и конвейеров заключается в изучении движения с трением частицы материала по плоскости, совершающей некоторое движение, которое мы в настоящей работе будем считать наперед заданным [1]). Пусть материал расположен по площади прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$. Поместим начало o подвижной системы координат в пересечении диагоналей этого прямоугольника и направим координатные оси ox и oy параллельно его сторонам, а ось oz кверху по нормали к рассматриваемой плоскости.

Введем обозначения направляющих косинусов углов между осями подвижной системы координат $oxyz$ и неподвижной $OXYZ$ на основании следующей таблицы:

	x	y	z
X	α_1	β_1	γ_1
Y	α_2	β_2	γ_2
Z	α_3	β_3	γ_3

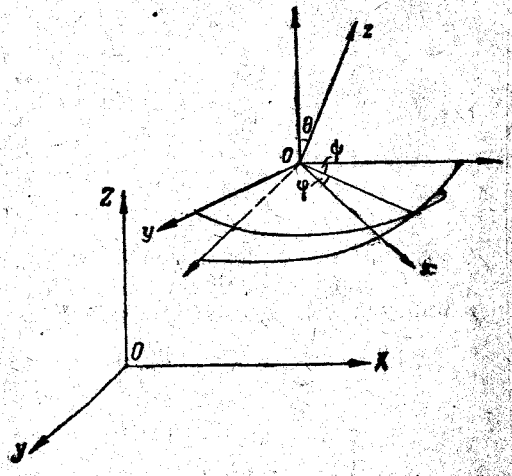


Рис. 1.

Будем предполагать ось OZ направленной вертикально вверх.

---

[1]) Движение этой плоскости (так называемого решета) изучается в работе Н. Р. Малкина (Записки Ленингр. горн. ин-та, т. X, вып. 3, 1937).

Упомянутые выше косинусы следующим образом выражаются через Эйлеровы угол φ, ψ, θ (рис. 1), которые, согласно условию, считаются известными функциями времени t,

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta,\\
\alpha_2 &= \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
\alpha_3 &= \sin\varphi\sin\theta,\\
\beta_1 &= -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta,\\
\beta_2 &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
\beta_3 &= \cos\varphi\sin\theta,\\
\gamma_1 &= \sin\psi\sin\theta,\\
\gamma_2 &= -\cos\psi\sin\theta,\\
\gamma_3 &= \cos\theta.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Формулы, связывающие абсолютные координаты X, Y, Z какой-либо частицы с относительными x, y, z, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
X &= x_0 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z,\\
Y &= y_0 + \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z,\\
Z &= z_0 + \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z,
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где x_0, y_0, z_0 обозначают координаты точки O и также считаются известными функциями времени.

Разберем отдельно случаи относительного равновесия (§ 1) и относительного движения (§ 2) частицы.

§ 1

Для частицы, находящейся в относительном равновесии, имеем:

$$x = \text{const.} \qquad y = \text{const.} \qquad z = \text{const.} = 0.$$

Вычисляем проекции j_x, j_y, j_z абсолютного ускорения j на подвижные координатные оси:

$$\left.\begin{aligned}
j_x &= \alpha_1 X'' + \alpha_2 Y'' + \alpha_3 Z'',\\
j_y &= \beta_1 X'' + \beta_2 Y'' + \beta_3 Z'',\\
j_z &= \gamma_1 X'' + \gamma_2 Y'' + \gamma_3 Z'',
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
X'' &= x_0'' + \alpha_1'' x + \beta_1'' y,\\
Y'' &= y_0'' + \alpha_2'' x + \beta_1'' y,\\
Z'' &= z_0'' + \alpha_3'' x + \beta_1'' y
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

и введены обозначения Лагранжа (штрихи) для производных по времени t.

Составляем диференциальные уравнения абсолютного движения частицы в проекциях на подвижные координатные оси:

$$\left.\begin{aligned}
m j_x &= -mg\sin\varphi\sin\theta + F_x,\\
m j_y &= -mg\cos\varphi\sin\theta + F_y,\\
m j_z &= -mg\cos\theta + N.
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Здесь через m и g обозначены соответственно масса частицы и ускорение свободного падения; j_x, j_y, j_z вычисляются на основании равенств (3); F_x и F_y обозначают проекции силы трения F на подвижные координатные оси; N — нормальная реакция. Отсюда определяем силу трения F и реакцию N:

$$\begin{aligned}
F^2 &= F_x^2 + F_y^2 =\\
&= m^2\left[g^2\sin^2\theta + j_x^2 + j_y^2 + 2g\sin\theta\,(j_x\sin\varphi + j_y\cos\varphi)\right],\\
N &= m\,(j_z + g\cos\theta).
\end{aligned} \qquad (6)$$

Условие неотделения материала от плоскости:

$$N \geqslant 0$$

или

$$j_z + g\cos\theta \geqslant 0, \tag{7}$$

где $0 < x < a, \quad 0 < y < b.$

Условие отсутствия скольжения:

$$F < k_0 N,$$

где k_0 — коэфициент трения скольжения в относительном равновесии, или

$$g^2\sin^2\theta + j_x^2 + j_y^2 + 2g\sin\theta(j_x\sin\varphi + j_y\cos\varphi) < k_0^2(j_z + g\cos\theta)^2, \tag{8}$$

где $0 < x < a,\ 0 < y < b.$

Таким образом, необходимые и достаточные условия относительного равновесия выразятся системой неравенств:

$$\left.\begin{aligned} j_z + g\cos\theta &\geqslant 0, \\ g^2\sin^2\theta + j_x^2 + j_y^2 + 2g\sin\theta(j_x\sin\varphi + j_y\cos\varphi) &< k_0^2(j_z + g\cos\theta)^2. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Наконец, при соблюдении условий:

$$j_z + g\cos\theta > 0, \tag{10}$$

$$g^2\sin^2\theta + j_x^2 + j_y^2 + 2g\sin\theta(j_x\sin\varphi + j_y\cos\varphi) = k_0^2(j_z + g\cos\theta)^2$$

материал начнет скользить по плоскости.

§ 2

Проекции j_x, j_y, j_z абсолютного ускорения j частицы на подвижные координатные оси в период относительного движения могут быть вычислены на основании равенств (3), в которые нужно ввести следующие значения производных X'', Y'', Z'':

$$\left.\begin{aligned} X'' &= x_0'' + (\alpha_1 x)'' + (\beta_1 y)'', \\ Y'' &= y_0'' + (\alpha_2 x)'' + (\beta_2 y)'', \\ Z'' &= z_0'' + (\alpha_3 x)'' + (\beta_3 y)''. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Диференциальные уравнения абсолютного движения частицы в проекциях на подвижные координатные оси имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} mj_x &= -mg\sin\varphi\sin\theta - kN\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \\ mj_y &= -mg\cos\varphi\sin\theta - kN\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \\ mj_z &= -mg\cos\theta + N, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где k — коэфициент трения скольжения в относительном движении.

Третье уравнение из написанных выше позволяет определить реакцию N:

$$N = m(j_z + g\cos\theta). \tag{13}$$

Первые два уравнения после подстановки найденного значения N переписываются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} j_x &= -g\sin\varphi\sin\theta - k(j_z + g\cos\theta)\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \\ j_y &= -g\cos\varphi\sin\theta - k(j_z + g\cos\theta)\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Входящие сюда j_x, j_y, j_z вычисляются при помощи равенств (3) и (11).

Интегрирование полученной системы уравнений (14) дает значения x и y для моментов времени, удовлетворяющих условию:

$$N \geqslant 0$$

или

$$j_z + g\cos\theta \geqslant 0. \tag{15}$$

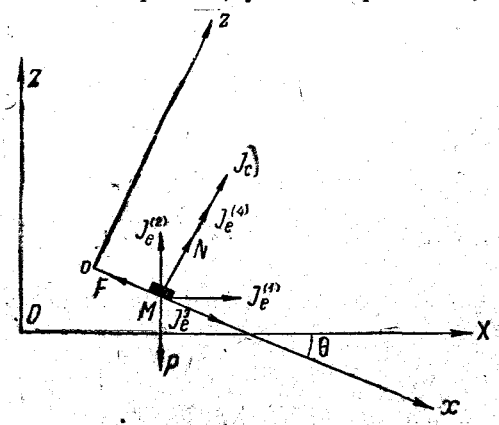


Рис. 2.

Моменты времени, для которых предыдущее условие не соблюдается, т. е.

$$j_z + g\cos\theta < 0,$$

соответствуют отделению частицы от плоскости.

Разберем случай плоского движения грохота, именно случай, когда координатная плоскость xoz во все время движения совпадает с одной и той же вертикальной плоскостью, параллельной координатной плоскости XOZ. Тогда

$$\varphi = 270°, \quad \psi = 90°, \quad y_0 = \text{const.}, \quad y = \text{const},$$

и формулы (2) для X, Y, Z принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} X &= x_0 + x\cos\theta, \quad Y = y_0 + y = \text{const.}, \\ Z &= z_0 - x\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

При помощи равенств (3) определяем j_x, j_y, j_z:

$$\left.\begin{aligned} j_x &= x_0''\cos\theta - z_0''\sin\theta + x'' - x\theta'^2, \\ j_y &= 0, \\ j_z &= x_0''\sin\theta + z_0''\cos\theta - 2x'\theta' - x\theta''. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Подстановка значений j_x и j_z в первое из уравнений (14) дает дифференциальное уравнение относительного движения частицы:

$$x'' - 2kx'\theta' - x(\theta'^2 + k\theta'') + \\ + [(x_0'' + k(g + z_0'')]\cos\theta + [kx_0'' - (g + z_0'')]\sin\theta = 0, \tag{18}$$

где k нужно считать положительным или отрицательным, в зависимости от направления относительного движения, именно $k > 0$, если $x' > 0$, и, наоборот, $k < 0$, если $x' < 0$.

Дифференциальное уравнение (18) может быть получено иным путем, исходя из теории относительного движения. Действительно, рассмотрим прямолинейное движение частицы вдоль оси OX под действием силы веса p, $p = mg$, нормальной реакции N, силы трения F, переносных сил инерции $J_e^{(1)}$, $J_e^{(2)}$, $J_e^{(3)}$, $J_e^{(4)}$ и кориолисовой силы инерции J_c (рис. 2).

Вычисляем величину сил инерции:

$$\left.\begin{aligned} J_e^{(1)} &= -mx_0'', \quad J_e^{(2)} = -mz_0'', \quad J_e^{(3)} = mx\theta'^2, \\ J_e^{(4)} &= mx\theta'', \quad J_c = 2mx'\theta'. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Нормальная реакция N определяется из уравнения:

$$N + J_c + J_e^{(4)} + J_e^{(1)}\sin\theta + J_e^{(2)}\cos\theta - p\cos\theta = 0. \tag{20}$$

Направление силы F на рис. 2 соответствует относительному движению частицы в положительном направлении оси ox. Сохраним прежнее условие и в случае движения в противоположном направлении будем считать коэфициент k в формуле для F ($F=kN$) отрицательным.

Составляем диференциальное уравнение относительного движения:

$$mx''=p\sin\theta-F+J_e^{(1)}\cos\theta-J_e^{(2)}\sin\theta+J_e^{(3)}. \tag{21}$$

После подстановки в предыдущее уравнение значений силы трения и сил инерции снова получим уравнение (18).

Таким образом мы получили линейное неоднородное диференциальное уравнение второго порядка с переменными коэфициентами. Ограничимся указанием двух случаев его интегрируемости. В первом случае θ является линейной функцией времени t, и коэфициенты полученного нами уравнения оказываются постоянными. Второй случай имеет место при очень частном виде функции θ:

$$\theta=k\log\frac{t-a}{b},$$

где a и b обозначают некоторые постоянные, когда коэфициент при x в уравнении (18) обращается в нуль.

Представляет интерес найти решение рассматриваемого уравнения в том случае, когда θ является целой рациональной функцией второй степени времени t. Эта задача составляет предмет исследования проф. М. И. Акимова, так же как и случай периодических коэфициентов.

Частный случай уравнения (18), если $\theta=0$, $x_0=a\sin\omega t$ и $z_0=\text{const.}$, рассматривался Л. Г. Лойцянским [1]), применившим для исследования движения графический прием.

Резюме

Один из вопросов теории грохотов и конвейеров заключается в изучении движения с трением частицы материала по плоскости, совершающей некоторое движение, которое в настоящей работе считается наперед заданным. С этой целью составляются диференциальные уравнения движения материала в самом общем случае движения грохота и затем применяются к случаю плоского движения, представляющему практический интерес. Наконец, указываются некоторые частные случаи интегрируемости полученного диференциального уравнения.

Summary

One of the questions of the theory of screens and conveyors consists in the study of the motion, with friction, of the particles of some material on a surface which also performs a certain movement, the latter being indicated beforehand.

For this purpose, one has to form differential equations concerning the motions of materials in the most general case of the movement of the screen and then to apply them to the case ot plane motion, which is of practical importance.

Lastly, there are indicated some particular cases of integrability of the differential equation obtained.

---

[1]) Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье, Теоретическая механика, ч. III — Динамика, 1934, стр. 207, № 7.