Записки Ленинградского Горного Института. Том XI, вып. 3 1938
Annales de l'Institut des Mines à Léningrad. Vol. XI, liv. 3 1938

О теории барабанного сепаратора и некоторых ее аналогиях [1]

Доц. Н. П. Неронов

Upon the theory of the drum-separator and some analogics of that theory

Doz. N. P. Neronoff

§ 1

Схема действия барабанного сепаратора в общих чертах такова: материал, двигаясь по питающему жолобу, поступает в точку A поверхности барабана, вращающегося вокруг горизонтальной оси O с постоянной угловой скоростью ω (рис. 1). В зависимости от соотношения между величиной угла α, соответствующего точке A, и коэфициентом γ трения скольжения ($k=\operatorname{tg}\gamma$) для данного материала последний или будет увлекаться барабаном в сторону его вращения или начнет двигаться в противоположном направлении. Таким образом, принцип действия барабанного сепаратора, находящего себе применение при обогащении руд, основан на различии коэфициентов трения полезного ископаемого и примеси [2].

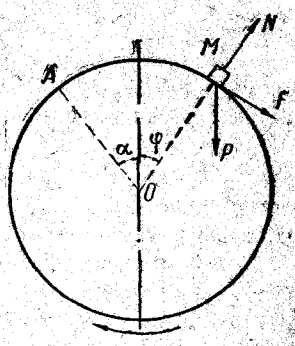


Рис. 1.

В дальнейшем будем считать начальную скорость материала в точке A равной нулю. Как было указано выше, могут представиться следующие два случая.

1-й случай. Пусть $\alpha>\gamma$, где γ обозначает угол трения в движении. Частица M материала начнет скользить в направлении, противоположном вращению барабана, т. е. в сторону убывания угла φ под действием следующих сил: силы веса p, $p=mg$, нормальной реакции N и силы трения F, $F=kN$, направленной противоположно относительной (по отношению к вращающемуся барабану) скорости частицы.

Выше N обозначает абсолютное значение нормальной реакции, m — массу движущейся частицы и g — ускорение свободного падения.

---

[1]) Работа выполнена в 1935 г. по Научно-исследовательскому сектору Ленинградского горного института.

[2]) Проф. Л. Б. Левенсон, Машины для обогащения полезных ископаемых, 1933, § 132, стр. 724.

Составляем диференциальные уравнения движения частицы в проекциях на касательную и нормаль к ее траектории:

$$mr\varphi'' = p\sin\varphi + kN, \quad mr\varphi'^2 = p\cos\varphi - N, \tag{1}$$

где φ' и φ'' — соответственно производные первого и второго порядков по времени t и r — радиус барабана.

Исключаем из предыдущих уравнений реакцию N:

$$r\varphi'' = g\sin\varphi + kg\cos\varphi - kr\varphi'^2. \tag{2}$$

Уравнение (2) может быть представлено в виде:

$$r\frac{d\varphi'^2}{d\varphi} = 2g(\sin\varphi + k\cos\varphi) - 2kr\varphi'^2$$

и поэтому имеет следующий первый интеграл:

$$\varphi'^2 = Ce^{-2k\varphi} + \frac{2g}{r(1+4k^2)}[3k\sin\varphi - (1-2k^2)\cos\varphi], \tag{3}$$

где e — основание натуральных логарифмов [1]).

Произвольная постоянная C определяется при помощи начальных условий:

$$\varphi|_{t=0} = -\alpha, \qquad \varphi'|_{t=0} = 0.$$

Именно:

$$C = \frac{2g}{r(1+4k^2)}e^{-2k\alpha}[3k\sin\alpha + (1-2k^2)\cos\alpha]. \tag{4}$$

Вычисляем значение нормальной реакции N, внося значение φ'^2 из уравнения (3) во второе из уравнений (1):

$$N = \frac{p}{1+4k^2}[3\cos\varphi - 6k\sin\varphi - 2C_1e^{-2k\varphi}], \tag{5}$$

где

$$C_1 = e^{-2k\alpha}[3k\sin\alpha + (1-2k^2)\cos\alpha]. \tag{6}$$

Значение угла φ, соответствующее обращению в нуль нормальной реакции N и, следовательно, сходу частицы с поверхности барабана, является отрицательным корнем трансцендентного уравнения:

$$3\cos\varphi - 6k\sin\varphi - 2C_1e^{-2k\varphi} = 0. \tag{7}$$

Внося найденное значение угла φ в уравнение (3), находим угловую скорость частицы в момент ее отделения от барабана.

2-й случай. Если $\alpha < \gamma$, начнется скольжение материала в направлении вращения барабана, т. е. в сторону возрастания угла φ. При этом угловая скорость частицы будет увеличиваться. Рассмотрим момент времени, характеризующийся прекращением скольжения частицы по поверхности барабана. Для этого момента $\varphi' = \omega$, и соответствующее значение угла φ ($\varphi = \varphi_1$) является корнем трансцендентного уравнения:

$$\omega^2 = Ce^{-2k\varphi} + \frac{2g}{r(1+4k^2)}[3k\sin\varphi - (1-2k^2)\cos\varphi]. \tag{8}$$

Вносим найденное значение $\varphi = \varphi_1$ угла φ в выражение (5) для нормальной реакции N.

В дальнейшем при числовом решении задачи необходимо исследовать возможность двух вариантов, смотря по тому, будет ли $N|_{\varphi=\varphi_1} < 0$ или, наоборот, $N|_{\varphi=\varphi_1} > 0$. С этой целью найдем предварительно границы изменения угла φ, между которыми возможно вращение частицы вместе с барабаном без скольжения.

---

[1]) Уравнения (2) и (3) встречаются в сходной задаче еще у Saint—Germain, см. примечание к § 3.

Для рассматриваемого движения частицы:

$$F = k_0 N, \tag{9}$$

где k_0 — коэфициент трения в относительном равновесии ($k_0 = \operatorname{tg} \gamma_0$).

Далее:

$$F = \pm p \sin \varphi, \quad N = p \cos \varphi - mr\omega^2 > 0, \tag{10}$$

где верхний знак берется при $\varphi > 0$, а нижний при $\varphi < 0$. Отсюда:

$$\cos \varphi > \frac{r\omega^2}{g}$$

и необходимое условие возможности рассматриваемого движения выражается неравенством:

$$\frac{r\omega^2}{g} < 1. \tag{11}$$

После подстановки значений F и N неравенство (9) принимает вид:

$$\pm g \sin \varphi < k_0 (g \cos \varphi - r\omega^2). \tag{12}$$

Решаем его относительно угла φ:

$$\varphi_2 < \varphi < \varphi_3, \tag{13}$$

где φ_3 и φ_2 — соответственно положительный и отрицательный корни уравнения ($\varphi_2 < 0$, $\varphi_3 > 0$)

$$\pm g \sin \varphi = k_0 (g \cos \varphi - r\omega^2), \tag{14}$$

вычисляемые на основании равенства:

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = -\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{k_0}{g^2 - k_0^2 r^2 \omega^4} \left[g^2 - \sqrt{g^4 - (g^2 - r^2\omega^4)(g^2 - k_0^2 r^2 \omega^4)} \right] \tag{15}$$

и равные по абсолютной величине. Легко устанавливается, что $0 < \varphi_3 < \gamma_0$.

Возвращаемся к исследованию двух вариантов второго случая.

В первом варианте ($N|_{\varphi=\varphi_1} < 0$) частица отделится от барабана до момента прекращения скольжения при значении угла φ, определяемом уравнением (7).

Второй вариант ($N|_{\varphi=\varphi_1} > 0$) сложнее предыдущего и вызывает необходимость произвести более подробное исследование.

Так, если $\varphi_1 > \varphi_3$, прекращение скольжения частицы по поверхности барабана будет иметь место только для одного момента времени ($\varphi = \varphi_1$). При $\varphi > \varphi_1$ скольжение возобновится. Значения угла φ и угловой скорости частицы в момент ее схода с поверхности барабана могут быть найдены, как и в первом случае, при помощи уравнения (7) и (3). Однако эти уравнения сохраняют силу только до момента времени, соответствующего значению φ_1 угла φ, после чего сила трения меняет свое направление на противоположное, и в уравнениях (7) и (3) нужно заменить k на $-k$. Принимая упомянутый выше момент за начальный, будем иметь новые начальные данные:

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_1, \quad \varphi'|_{t=0} = \omega$$

и соответствующие значения постоянных C и C_1:

$$\left.\begin{aligned} C &= e^{-2k\varphi_1} \left\{ \omega^2 + \frac{2g}{r(1+4k^2)} [3k \sin \varphi_1 + (1 - 2k^2) \cos \varphi_1] \right\}, \\ C_1 &= e^{-2k\varphi_1} \left[\frac{r\omega^2}{2g} (1 + 4k^2) + 3k \sin \varphi_1 + (1 - 2k^2) \cos \varphi_1 \right]. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Если $\varphi_2 < \varphi_1 < \varphi_3$, движение без скольжения будет происходить в течение некоторого промежутка времени, в продолжение которого частица вращается вместе с барабаном, составляя с ним как бы одно целое, до момента, когда

угол φ получит значение $\varphi = \varphi_3$. После этого скольжение снова будет иметь место. Значения φ и φ' в момент схода частицы с поверхности барабана попрежнему найдутся при помощи уравнения (7) и (3) с заменой k на $-k$. В силу начальных условий:

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_3, \quad \varphi'|_{t=0} = \omega.$$

Для определения постоянных C и C_1 можно воспользоваться уравнениями (16), заменив в них φ_1 на φ_3.

После отделения частицы от поверхности барабана ее дальнейшее движение будет свободным параболическим.

§ 2

Изложенная в предыдущем параграфе теория находит себе применение также при исследовании сбрасывающих устройств, имеющих назначение выгружать в определенном пункте материал, перемещаемый при помощи ленточных транспортеров. Последние часто применяются в горно-обогатительном деле, в частности при устройстве питателей бункеров.

Мы рассмотрим ниже так называемый барабанный сбрасыватель [1]). Принцип его действия основан на том, что лента, огибая направляющий барабан, резко изменяет направление своего движения, в то время как материал, двигаясь по инерции, сходит с ленты и попадает в отводящие трубы. Первоначально материал перемещается вместе с лентой, которая в точке A приходит в соприкосновение с поверхностью барабана, вращающегося вокруг горизонтальной оси (рис. 2). С указанного выше момента времени лента и материал начинают вращаться вместе с барабаном.

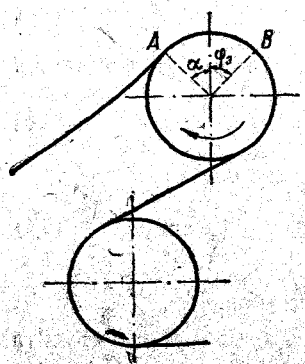


Рис. 2.

Обозначим через r радиус последнего, через ω — его постоянную угловую скорость вращения и через α — угол, соответствующий точке A. Найдем положение и угловую скорость частицы в момент ее отделения от ленты. Этим самым будут определены необходимые начальные данные для последующего свободного параболического движения частицы материала.

Предположим, что до соприкосновения ленты с поверхностью барабана в точке A, а также в самой точке A отсутствует скольжение материала по ленте, т. е. угол α удовлетворяет неравенству:

$$\alpha < \varphi_3, \tag{17}$$

где угол φ_3 имеет прежнее значение и определяется равенством (15).

Таким образом материал в течение некоторого времени будет вращаться вместе с барабаном, как одно целое, при условии, что имеет место неравенство:

$$\frac{r\omega^2}{g} < \cos\alpha < 1. \tag{18}$$

В противном случае материал отделится от ленты в точке A. Предположим в дальнейшем выполнение неравенства (17) и (18).

Указанное выше совместное вращение материала и барабана будет происходить до точки B, характеризуемой углом φ_3 (рис. 2), в которой начнется скольжение материала по ленте. Однако нет оснований в общем случае отождествлять начальный момент скольжения с моментом отделения материала от ленты [2]). Усло-

[1]) Проф. П. С. Козьмин, Элеваторы, транспортеры и конвейеры, 1932, стр. 205, § 27.

[2]) Проф. П. С. Козьмин, idem, стр. 212.

вием отделения является обращение в нуль нормальной реакции N, меняющей при этом свой знак.

Диференциальные уравнения движения частицы в период скольжения имеют вид:

$$mr\varphi'' = p\sin\varphi - kN, \quad mr\varphi'^2 = p\cos\varphi - N.$$

Исключаем из них нормальную реакцию N:

$$r\varphi'' = g\sin\varphi - kg\cos\varphi + kr\varphi'^2.$$

Первый интеграл предыдущего уравнения:

$$\varphi'^2 = Ce^{2k\varphi} - \frac{2g}{r(1+4k^2)}[3k\sin\varphi + (1-2k^2)\cos\varphi].$$

Произвольная постоянная C определяется при помощи начальных данных $\varphi|_{t=0} = \varphi_3$, $\varphi'|_{t=0} = \omega$, а именно:

$$C = e^{-2k\varphi_3}\left\{\omega^2 + \frac{2g}{r(1+4k^2)}[3k\sin\varphi_3 + (1-2k^2)\cos\varphi_3]\right\}.$$

Выражение для нормальной реакции:

$$N = \frac{p}{1+4k^2}[3\cos\varphi + 6k\sin\varphi - 2\cdot C_1 e^{2k\varphi}],$$

где

$$C_1 = e^{-2k\varphi_3}\left[\frac{r\omega^2}{2g}(1+4k^2) + 3k\sin\varphi_3 + (1-2k^2)\cos\varphi_3\right].$$

Приравняв нормальную реакцию нулю, получаем для определения угла схода частицы следующее уравнение:

$$3\cos\varphi + 6k\sin\varphi - 2C_1 e^{2k\varphi} = 0.$$

Найдя этот угол, без труда вычисляем угловую скорость частицы в момент ее отделения от ленты. Полученные нами данные определяют параболическую траекторию частицы после этого момента.

§ 3

В заключение рассмотрим задачу, сходную с двумя предыдущими [1]). Материальная точка M движется с трением под влиянием силы тяжести по внутренней поверхности неподвижного круглого цилиндра с горизонтальной осью O (рис. 3). Движение предполагается совершающимся в вертикальной плоскости. Удерживаем обозначения предыдущих параграфов. Диференциальные уравнения движения имеют вид:

$$mr\varphi'' = p\sin\varphi \pm F, \quad mr\varphi'^2 = N - p\cos\varphi, \tag{19}$$

где знак перед F нужно брать противоположный знаку угловой скорости φ'. Исключая при помощи соотношения $F = kN$ нормальную реакцию N из предыду-

---

[1]) A. de Saint-Germain, Recueil d'exercices sur la Mécanique rationnelle..., 1887. В работе „К вопросу о критическом числе оборотов шаровых мельниц" (Сборник научных трудов Московского горного института, 1935, вып. 1, стр. 359). В. М. Осецкий рассматривает движение с трением материальной точки по внутренней поверхности вращающегося цилиндрического барабана с горизонтальной осью вращения. Нужно, однако, заметить, что в шаровой мельнице мы, вообще говоря, имеем дело с движением шаров и кусков руды не изолированных, а находящихся в контакте друг с другом. Это обстоятельство существенно усложняет теорию шаровой мельницы. Наконец, при движении по поверхности барабана изолированного шара последний будет не только скользить, но и катиться. Учет качения изменяет анализ явления, произведенный автором.

щих двух уравнений, получаем следующее дифференциальное уравнение, определяющее угол φ:

$$r\varphi'' = g \sin \varphi \pm k(g \cos \varphi + r\varphi'^2).$$

Последнее уравнение можно написать в виде:

$$r\varphi'' = g \sin \varphi + k(g \cos \varphi + r\varphi'^2), \tag{20}$$

считая k положительным, если $\varphi' < 0$, и отрицательным, если $\varphi' > 0$.

Первый интеграл уравнения (20):

$$\varphi'^2 = Ce^{2k\varphi} + \frac{2g}{r(1+4k^2)}[3k \sin \varphi + (1-2k^2) \cos \varphi]. \tag{21}$$

Выражение для произвольной постоянной C определяется начальными данными: $\varphi|_{t=0} = \varphi_0$, $\varphi'|_{t=0} = \varphi'_0$ и имеет следующий вид:

$$C = e^{-2k\varphi_0}\left\{\varphi_0'^2 - \frac{2g}{r(1+4k^2)}[3k \sin \varphi_0 + (1-2k^2) \cos \varphi_0]\right\}. \tag{22}$$

Подставляя значение φ'^2 из уравнения (21) во второе из уравнений (19), находим значение нормальной реакции:

$$N = \frac{p}{1+4k^2}(3 \cos \varphi + 6k \sin \varphi + 2C_1 e^{2k\varphi}), \tag{23}$$

где

$$C_1 = e^{-2k\varphi_0}\left[\frac{r\varphi_0'^2}{2g}(1+4k^2) - 3k \sin \varphi_0 - (1-2k^2) \cos \varphi_0\right].$$

Чтобы найти значение φ_I угла φ, соответствующее крайнему положению точки, нужно решить трансцендентное уравнение:

$$Ce^{2k\varphi} + \frac{2g}{r(1+4k^2)}[3k \sin \varphi + (1-2k^2) \cos \varphi] = 0, \tag{24}$$

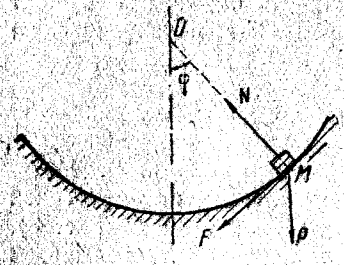


Рис. 3.

получающееся из уравнения (21), если в последнем положить $\varphi' = 0$. Точка действительно достигнет этого крайнего положения при условии, что за время рассматриваемого движения нормальная реакция не сделается отрицательной. В противном случае точка при $N = 0$ оставит поверхность и будет далее двигаться свободно по параболической траектории. Вопрос приводится к нахождению корня φ_{II} уравнения $N = 0$, т. е. уравнения:

$$3 \cos \varphi + 6k \sin \varphi + 2C_1 e^{2k\varphi} = 0. \tag{25}$$

Если $|\varphi_I| < |\varphi_{II}|$, точка достигнет упомянутого выше крайнего положения. При невыполнении этого неравенства она оставит поверхность цилиндра. Предположим, что предыдущее неравенство выполнено. Далее могут представиться следующие два случая.

Если $|\varphi_I| < \gamma_0$, где γ_0 — угол трения в покое ($k_0 = \operatorname{tg} \gamma_0$), дальнейшее движение точки прекратится. Если же $|\varphi_I| > \gamma_0$, — точка будет двигаться в обратном направлении, причем придется повторить весь предыдущий анализ, считая k отрицательным и приняв за начальные данные следующие:

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_I, \quad \varphi'|_{t=0} = 0.$$

Заметим еще, что дифференциальное уравнение (20) при помощи подстановки

$$\varphi = \varphi \pm \gamma, \tag{26}$$

где γ — угол трения в движении ($|k| = \operatorname{tg}\gamma$), может быть приведено к виду:

$$r\varphi'' = -\frac{g}{\cos\gamma}\sin\varphi + kr\varphi'^2, \qquad (27)$$

где $k = \pm \operatorname{tg}\gamma$, $\gamma = 0$.

Уравнение (27) совпадает с диференциальным уравнением кругового колебательного движения точки под действием восстанавливающей силы, проекция которой Q на направление касательной выражается формулой:

$$Q = -\frac{mg}{\cos\gamma}\sin\varphi,$$

и при сопротивлении среды R, пропорциональном квадрату скорости:

$$R = |k|\, mr\varphi'^2.$$

Подобного рода задача была предметом исследования нескольких авторов. Именно ею занимались Пуассон [1]), Резаль [2]), А. Н. Крылов [3]) и др. Один из современных способов интегрирования диференциального уравнения (27), а также подобных ему уравнений, но значительно более общего вида, принадлежит проф. М. И. Акимову [4]) и основан на разработанной им теории функций Бесселя от многих переменных, которая дает интеграл уравнения (27) в виде сходящегося ряда, свободного от так называемых вековых членов. При других способах интегрирования вековые члены обычно появляются, и для их устранения употребляется специальный метод Lindstedt. Последний был применен к уравнению (27) Burkhardt [5]).

Резюме

Задача состоит в исследовании движения частицы, движущейся под влиянием силы тяжести и при наличии трения по наружной поверхности круглого цилиндра, вращающегося вокруг горизонтальной оси. Рассматриваемая задача находит себе приложение в некоторых вопросах горно-обогатительного дела, именно в теории барабанного сепаратора, применяющегося для обогащения руд, а также в теории барабанного сбрасывателя, имеющего назначение выгружать в определенном пункте материал, перемещаемый при помощи ленточного транспортера. Полученные результаты позволяют уточнить указанные выше теории, излагаемые обычно в технических руководствах [6]).

Summary

The problems consists in an investigation of the motion of a particle moving under the influence of gravity and in the presence of friction, on the exterior surface of a round cylinder which revolves on a horizontal axis.

The problem considered is applicable to some cases in mining and ore-dressing namely in the theory of drum-separators and drum-dischargers, whose purpose it is to discharge materials transported by means of a belt conveyor. The results obtained allow to make more precise the above-mentioned theories, which are usually set, forth in technical text-books [7]).

---

[1]) Poisson, Traité de mécanique, 1833, t. I, p. 358.
[2]) Resal, Traité de mécanique générale, 1873, t. I, p. 172.
[3]) A. N. Kriloff, Trans. of the Inst. of Naval Architects, London, 1898, vol. XL, p. 41—42.
[4]) М. И. Акимов, Записки Ленингр. горн. ин-та, печатается.
[5]) Burkhardt, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. LXIII, 1915, S. 303—311.
[6]) Проф. Л. Б. Левенсон, Машины для обогащения полезных ископаемых, 1933, стр. 724, § 132.
Проф. П. С. Козьмин, Элеваторы, транспортеры и конвейеры, 1932, стр. 205, § 27.
[7]) Prof. L. B. Levenson, Ore-dressing machines, 1933, p. 724, § 132;
Prof. P. S. Kozmin, Elevators, transporters and conveyors, 1932, p. 205, § 27.