1. Къ основной задачѣ въ теоріи волнъ, образующихся при погруженіи твердаго тѣла въ жидкость (ondes par émersion).

Н. М. Крылова.

(Доложено 21-го сентября 1915 г).

Относящійся сюда вопросъ сводится, какъ извѣстно въ математической физикѣ, къ опредѣленію такой функціи $\varphi(x, y, t)$, зависящей отъ точки (x, y) и отъ времени t, которая удовлетворяетъ слѣдующимъ условіямъ:

1) внутри контура C функція $\varphi(x, y, t)$ удовлетворяетъ уравненію Лапласа:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \qquad (1)$$

2) на контурѣ C граничному условію, выражаемому дифференціальнымъ уравненіемъ:

$$\frac{d\varphi}{dn} = c(s)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \qquad (2)$$

гдѣ $\frac{d\varphi}{dn}$ означаетъ внутреннюю нормальную производную, s — криволинейную абсциссу какой-либо точки граничнаго контура C, $c(s)$ данную функцію на контурѣ

3) для начальнаго момента (при $t = 0$) функція $\varphi(x, y, t)$ удовлетворяетъ (на контурѣ C) слѣдующимъ начальнымъ условіямъ:

$$\varphi = 0\ ;\ \frac{\partial\varphi}{\partial t} = f(s), \qquad (3)$$

гдѣ $f(s)$ нѣкоторая данная функція на томъ-же контурѣ C.

Замѣчая, что при не отрицательной функціи $c(s)$, поставленная задача обладаетъ, какъ извѣстно, только однимъ рѣшеніемъ, примѣняютъ обычный методъ математ. физики, а именно, такъ наз. *методъ наложенія простыхъ рѣшеній.*

Для этой цѣли стараются удовлетворить двумъ первымъ выше перечисленнымъ условіямъ *простыми рѣшеніями* вида:

$$\sin\left(\sqrt{k}\,t\right)\quad \mathrm{U}(x,y),$$

подставляя которыя въ уравненія (1) и (2), получимъ для опредѣленія функцій $\mathrm{U}(x, y)$ такія условія:

(1^1) внутри контура $\Delta\mathrm{U} = \frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial y^2} = 0$;

(2^1) на контурѣ $\frac{d\mathrm{U}}{dn} = -k\,c(s)\,\mathrm{U}$.

Задача поставленная такимъ образомъ была предметомъ изслѣдованія M. H. Vergne, который въ своей работѣ. „Contribution à la théorie des ondes liquides" (Thése. Gauthier Villars. Paris. 1909) установилъ существованіе безчисленнаго множества „особенныхъ" значеній параметра k, а также имъ соотвѣтствующихъ, отличныхъ отъ нуля, рѣшеній системы $(1')$, $(2')$

$$\mathrm{U}_0 = 1\ ;\ \mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2 \qquad \mathrm{U}_i$$

обозначая черезъ $\mathrm{V}_i(s)$ значеніе принимаемое функціей $\mathrm{U}_i(x, y)$ на контурѣ C, M. Vergne установилъ также *замкнутость* системы $\mathrm{U}_i(s)$, понимая подъ этимъ необходимость равенства нулю всякой функціи, ортогональной къ системѣ функцій $\mathrm{U}_i(s)$.

Методъ наложенія простыхъ рѣшеній даетъ очевидно такую функцію

$$(\alpha)\varphi = \Sigma\frac{c_i}{\sqrt{k_i}}\sin\left(\sqrt{k_i}\,t\right)\mathrm{U}_i(s),$$

удовлетворяющую всѣмъ условіямъ задачи, а въ томъ числѣ и условіямъ (3), если

$$f(s) = \Sigma\, c_i\,\mathrm{U}_i(s),$$

т. е. если будетъ разрѣшенъ вопросъ о разложеніи т. н. *произвольныхъ* функцій въ ряды, расположенные по *особеннымъ* функціямъ $U_i(s)$. Вопросъ этотъ и былъ предметомъ дальнѣйшихъ изслѣдованій M. Vergne, который доказалъ въ своемъ мемуарѣ: „Sur un cas particulier de développement d'une fonction"... (Annales de l'Ecole Normale Supér. Paris 1912) такую теорему: всякая періодическая функція $f(x)$ (періода равнаго единицѣ), обладающая отъ квадрата интегрируемой первой производной, разлагается въ абсолютно и равномѣрно сходящійся рядъ, расположенный по функціямъ

$$[\varphi_\nu(x) - \overline{\varphi}_\nu],$$

гдѣ $\overline{\varphi}_\nu$ означаетъ среднее значеніе $\varphi_\nu(x)$ въ интервалѣ (0,1), если: 1) система первыхъ производныхъ $\varphi'_\nu(x)$ ортогональна и нормирована, 2) данная замкнутая система $\varphi_\nu(x)$ ($\nu = 0, 1, 2...$) состоитъ изъ періодическихъ функцій (того же періода), обладающихъ первыми и вторыми производными, *причемъ эти послѣднія предполагаются разлагающимися въ равномѣрно сходящіеся ряды Fourier.*

Совершенно ясно однако, что чѣмъ менѣе „*правиленъ*" контуръ C и функція $c(s)$, т. е. чѣмъ менѣе ограничительныхъ условій на нихъ наложено, тѣмъ менѣе ограничительныхъ условій можетъ быть наложено на функціи $U_i(s)$, которыя играютъ роль функцій $\varphi_\nu(x)$ теоремы Vergne. Отюда вытекаетъ необходимость возможно менѣе ограничивать функціи $U_i(s)$ для того чтобы сдѣлать рѣшеніе задачи возможнымъ при болѣе общихъ условіяхъ относительно контура C, и предметомъ настоящей статьи будетъ показать достаточность предположенія о существованіи интегрируемыхъ вторыхъ производныхъ функцій $U_i(s)$, *не предполагая* ихъ разлагающимися въ равномѣрно сходящіеся ряды Fourier.

Для этой цѣли предложимъ себѣ, примѣняя *уравненіе замкнутости*[1]) теоріи тригонометрическихъ рядовъ, доказать слѣдующую основную лемму, на которой строится все доказательство возможности разложенія:

Если система періодическихъ функцій (періода равнаго единицѣ)

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x) \cdot \quad \cdot \varphi_\nu(x)$$

обладающихъ первыми и вторыми производными, замкнута, то всякая отъ квадрата интегрируемая функція, ортогональная ко всѣмъ вторымъ производнымъ $\varphi''(x)$ будетъ постоянной.

Для доказательства образуемъ извѣстнымъ пріемомъ изъ функцій $\varphi_i(x)$ линейныя комбинаціи $\psi_i(x)$, такъ чтобы построенная система функцій $\psi_i(x)$ была ортогональна и нормирована, т. е.:

$$\int_0^1 \psi_i(x)\psi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq j \\ 1, \text{ если } i = j. \end{cases}$$

Въ виду замкнутости системы $\varphi_i(x)$, система періодическихъ функцій $\psi_i(x)$, выражающихся линейно черезъ $\varphi_i(x)$, будетъ также замкнута, и потому достаточно будетъ показать, что всякая отъ квадрата интегрируемая функція ортогональная ко всѣмъ $\psi''_i(x)$ является постоянной.

Примѣняя для этого уравненіе замкнутости къ каждому изъ интеграловъ.

$$(4)\qquad \int_0^1 f(x)\psi_i(x)\,dx\ ,\ \text{гдѣ } i = 0,\ 1,\ 2$$

получимъ, въ предположеніи равенства нулю всѣхъ интеграловъ (4), такую систему безконечно большого числа уравненій съ безконечнымъ числомъ неизвѣстныхъ;

$$(5)\quad 0 = \frac{a_i^0 x_0}{2} + a_i^1 x_1 + b_i^1 y_1 + \cdots a_i^k x_k + b_i^k y_k + \cdots$$

гдѣ

$$a_i^k = \int_0^1 \psi_i(x)\cos 2k\pi x\,dx\ ,\ x_k = \int_0^1 f(x)\cos 2k\pi x\,dx;$$

$$b_i^k = \int_0^1 \psi_i(x)\sin 2k\pi x\,dx\ ,\ y_k = \int_0^1 f(x)\sin 2k\pi x\,dx.$$

Совершенно ясно, что система (5) не можетъ имѣть рѣшенія отличнаго отъ $x_k = y_k = 0$, такъ какъ коефиціенты a_i^k, b_i^k этой системы, въ виду ортогональности и нормированности системы функцій $\psi_i(x)$, удовлетворяютъ очевиднымъ соотношеніямъ:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{a_i^0 a_j^0}{2} + \sum\limits_k a_i^k a_j^k + b_i^k b_j^k = 0. \\ \dfrac{[a_i^0]^2}{2} + \sum\limits_k [a_i^k]^2 + [b_i^k]^2 = 1; \end{cases}$$

система уравненій (5) принадлежитъ слѣдовательно къ типу уравненій F Riesz'a [1]), а потому допу-

[1]) Существуетъ много различныхъ доказательствъ уравненія замкнутости для тригоном. функцій, см. напр. «Sur l'équation de fermeture pour les series trigonometriques» N. Kryloff. (Nouvel. Annal. des Math. 1914).

[1]) См. Comptes Rendus, 18 Mars 1907.

скаетъ по крайней мѣрѣ одно рѣшеніе со сходящейся суммой

$$\Sigma x_n^2 + y_\kappa^2;$$

ли рѣшеніе это отлично отъ нуля, то по извѣстной теоремѣ Riesz-Ficher'a, количества x_k, y_k могли-бы быть разсматриваемы какъ коэффиціенты Fourier нѣкоторой, отъ квадрата интегрируемой функціи, ортогональной ко всѣмъ функціямъ $\psi_i(x)$, что не имѣетъ мѣста, ибо система $\psi_i(x)$ замкнута.

Итакъ, убѣдившись въ томъ, что система (5) не можетъ имѣть рѣшеній отличныхъ отъ нуля, примѣнимъ уравненіе замкнутости къ системѣ интегралов:

$$\int_0^1 f(x)\,\psi_i''(x)\,dx, \text{ гдѣ } i=0,\ 1,\ 2$$

замѣчая, что

$$\psi(0)=\psi(1);\ \psi'(0)=\psi'(1),$$

легко увидимъ, интегрируя по частямъ, что к-ый коэффиціентъ Fourier функціи $\psi''_i(x)$ получается умноженіемъ на k^2 соотвѣтствующаго коэффиціента Fourier функціи $\psi_i(x)$, а потому предположеніе о существованіи, отъ квадрата интегрируемой, функціи, которая была бы ортогональна ко всѣмъ функціямъ $\psi''_i(x)$, приводитъ къ допущенію существованія рѣшенія, отличнаго отъ нуля, такой системы уравненій:

$$(7)\quad 0 = a_i^1 x + b_i^1 y_1 + \qquad a_i^\kappa k^2 x_\kappa + b_i^\kappa k^2 y_\kappa + \cdot$$

это обстоятельство находится въ очевидномъ противорѣчіи съ тѣмъ, что было сказано ранѣе по поводу системы (5), а потому всякая функція ортогональная ко всѣмъ $\psi''_i(x)$, а слѣдовательно и къ $\varphi''_i(x)$, будетъ постоянной, что и тр. док.

Исходя изъ замкнутой системы функцій $\Phi_i(x)$, обладающихъ отъ квадрата интегрируемыми первыми и вторыми производными, предположимъ теперь (что всегда возможно сдѣлать) ортогональной и нормированной систему первыхъ производныхъ $\varphi'_i(x)$.

Тогда предполагая періодическую функцію $f(x)$ абсолютно-непрерывной, обладающей во всѣхъ точкахъ интервала (0,1), за исключеніемъ быть можетъ ансамбля мѣры нуль, отъ квадрата интегрируемой, первой производной, убѣждаемая примѣненіемъ извѣстной леммы Стеклова—Schmidt'a въ абсолютной и равномѣрной сходимости ряда:

$$\Sigma_\nu[\Phi_\nu(x)-\varphi_\nu(0)]\int_0^1 \varphi'_\nu(\varepsilon)\,f'(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

а равнымъ образомъ и такого ряда:

$$S(x)=\sum_\nu[\Phi_\nu(x)-\overline{\Phi_\nu}]\int_0^1 \varphi'_\nu(\varepsilon)\,f'(\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Пользуясь извѣстной формулой Ляпунова интегрированія по частямъ, видимъ, что

$$\int_0^1 \varphi'_\nu(\varepsilon)\,f'(\varepsilon)\,d\varepsilon = f(1)\,\varphi'_\nu(1) - f(0)\varphi'_\nu(0) - \int_0^1 f(\varepsilon)\,\varphi''_\nu(\varepsilon)\,d\varepsilon = -\int_0^1 f(\varepsilon)\,\varphi'_\nu(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

а потому составляя разность

$$(8)\quad f(x)-s(x),$$

умножая ея на $\varphi''_\nu(x)$ и интегрируя въ предѣлахъ (0,1), получимъ ортогональность непрерывной функціи (8) по всѣмъ функціямъ $\varphi''_\nu(x)$, откуда на основаніи леммы и слѣдуетъ:

$$f(x)=s(x)+\text{const},$$

т. е. теорема разложенія, которая поэтому можетъ быть высказана въ такой, болѣе общей по сравненію съ данной Vergne'мъ, формѣ: *Всякая періодическая* [1]), *абсолютно непрерывная функція* $f(x)$, *обладающая во всѣхъ точкахъ интервала* (0,1), *за исключеніемъ быть можетъ ансамбля мѣры нуль, отъ квадрата интегрируемой первой производной, разлагается въ абсолютно и равномѣрно сходящійся рядъ расположенный по функціямъ*

$$[\Phi_\nu(x)-\overline{\Phi_\nu}];$$

гдѣ $\overline{\Phi_\nu}$ *означаетъ среднее значеніе* $\Phi_\nu(x)$ *въ интервалѣ* (0,1), *если: 1) система первыхъ производныхъ* (*періодическія функціи*) $\varphi'_\nu(x)$ *ортогональна и нормирована, 2) данная замкнутая система* $\Phi_\nu(x)$, *состоитъ изъ періодическихъ функцій* (*того-же періода*) *обладающихъ первыми и вторыми, отъ квадрата интегрируемыми, производными.* Совершенно ясно, какъ это и замѣчаетъ M. Vergne въ своемъ интересномъ мемуарѣ, что теорема разложенія имѣетъ мѣсто и для волнъ, происходящихъ подъ дѣйствіемъ импульсивныхъ силъ, приложенныхъ на поверхности жидкости (ondes par impulsion),—разница заключается только въ томъ, что sin, замѣняется cos въ формулѣ (α).

[1]) Періода равнаго единицѣ.

Н. М. Крыловъ.

Петроградъ.
14/x 1915 г.