XV. Его же. Циклы коллинеаціи и линейныя примы конопримъ и коносекундъ.

На какой-нибудь конопримѣ мы можемъ произвольно взять двѣ группы точекъ, по четыре въ каждой, и по нимъ, напр. A, B, C, D и A′, B′, C′, D′, установить коллинеарность общаго характера. Каждой точкѣ E плоскости, по условіямъ этой коллинеарности, найдемъ одну, и только одну, гомологичную точку E_1. Если E находится на конопримѣ, то на конопримѣ же находится и точка E_1, потому что коноприма, проходящая чрезъ первыя девять точекъ, коллинеарно преобразуется сама въ себя, а, слѣдовательно и каждая изъ ея точекъ въ одну изъ ея же точекъ.

Но если точка E гомологична E_1, то, въ свою очередь, точкѣ E_1 гомологична точка E_2, послѣдней гомологична E_3 и т. д. и всѣ эти точки образуютъ циклъ послѣдовательно-гомологичныхъ точекъ на конопримѣ. Циклъ этотъ можетъ состоять изъ различнаго числа точекъ, вплоть до безконечности. Если напр. точка въ коллинеаціи самогомологична то весь циклъ состоитъ изъ одной единственной точки; если имѣемъ двойную гомологичность точекъ A и A′, то весь циклъ сводится къ двумъ точкамъ и т. д.

Если (какъ по теоремѣ Паскаля) коллинеарность устанавливается по гомологичности A, B, A′, B′ съ A′, B′,

A, B, то получаемъ безконечное множество цикловъ по двѣ точки въ каждомъ и еще два цикла по одной точкѣ (на оси коллинеаціи).

Въ общемъ же случаѣ циклъ обнимаетъ значительное число точекъ или даже ихъ безконечное число, и можетъ случиться, что всѣ точки конопримы входятъ въ составъ одного цикла.

Напр. возьмемъ на окружности круга пять точекъ на равныхъ другъ отъ друга разстояніяхъ. Коллинеація, устанавливаемая первыми четырьмя точками сводится къ вращенію около центра круга на нѣкоторый постоянный уголъ α, а потому пятой точкѣ гомологична шестая точка, которая получается изъ нея тѣмъ же вращеніемъ на уголъ α. Если $m\alpha = n\pi$, гдѣ m и n цѣлые числа, то получаемъ циклы коллинеаціи съ ограниченнымъ числомъ точекъ (соотвѣтственно оси симметріи); если же уголъ α ирраціоналенъ по отношенію къ 2π, то всѣ точки круга образуютъ одинъ циклъ (соотвѣтственно оси вращенія). Ради наглядности, остановимся подробнѣе на этомъ простѣйшемъ случаѣ коллинеаціи.

Въ этомъ случаѣ операція коллинеарнаго преобразованія приводится къ вращенію около центра на уголъ α.

При вращеніи въ одну сторону мы первую систему коллинеарно преобразуемъ во вторую; при обратномъ вращеніи мы совершаемъ и обратную коллинеарную операцію.

Возьмемъ точку E не на данномъ кругѣ, а гдѣ нибудь внутри или внѣ его, и тогда получаемъ новые циклы на концентрическихъ кругахъ, а потому достаточно опредѣлить коллинеацію по двумъ такимъ гомологичнымъ четырехугольникамъ $E_1\ E_2\ E_3\ E_4$ и $E_2\ E_3\ E_4\ E_5$, пять точекъ которыхъ опредѣляютъ циклъ, чтобы вывести полную линейную приму концентрическихъ круговъ.

Какую бы коллинеацію мы ни воспроизвели по даннымъ пяти точкамъ, мы всегда придемъ къ построенію одной и той же конопримы, ими опредѣляемой, въ данномъ случаѣ круга. Напр. по теоремѣ Паскаля, мы установили бы коллинеацію по гомологичности $E_1\ E_2\ E_3\ E_4$ и $E_2\ E_1\ E_4\ E_3$ и тогда E_6, гомологичная E_5 принадлежитъ той же конопримѣ.

Но если мы установимъ коллинеацію по цикламъ, то мы воспроизводимъ линейную приму конопримъ.

Если мы остановились на простѣйшемъ примѣрѣ концентрической примы круговъ, то это только ради наглядности, потому что тѣ же соображенія одинаково прилагаются и къ какимъ угодно конопримамъ, если только циклы заключаютъ въ себѣ число точекъ, не меньше того, какое нужно для опредѣленія конопримы.

Циклъ A B C D E не только устанавливаетъ коллинеарность, но и достаточенъ для опредѣленія конопримы; вмѣстѣ съ тѣмъ онъ опредѣляетъ линейную приму конопримъ.

Переходя къ пространству, мы въ общемъ случаѣ по девяти точкамъ даже не можемъ установить такой коллинеарности, чтобы циклы распались на пары точекъ.

Такъ какъ элементы симметріи представляютъ лишь весьма спеціальный случай коллинеаціи, то ясно, что нѣтъ такихъ элементовъ симметріи, которые не могли бы принадлежать коносекундамъ.

Но въ пространствѣ представлены такіе элементы симметріи, которые по своему опредѣленію приводятъ къ безконечнымъ цикламъ, а именно винтовыя оси и плоскости симметричнаго скольженія. Что касается послѣднихъ, то онѣ изъ одной данной точки воспроизводятъ такой рядъ точекъ, который всецѣло входитъ въ составъ одной плоскости, которая и играетъ въ этомъ случаѣ роль особо спеціальной коносекунды.

Такой же рядъ воспроизводятъ и двойныя винтовыя оси.

Но, начиная съ тройной винтовой оси, ряды точекъ ложатся на цилиндръ, а слѣдовательно и опредѣляютъ его.

Иныхъ коносекундъ, кромѣ цилиндровъ вращенія, посреди тѣхъ, которыя обладаютъ винтовыми осями, не имѣется.

Если установимъ коллинеарность по ABCDE и BCDEF, то по этимъ шести точкамъ получаемъ циклъ $ABCDEFF_1F_2\ldots$ Достаточно вообще девяти точекъ, чтобы коносекунда была вполнѣ опредѣлена.

Взявъ какую-нибудь точку P внѣ этой коносекунды, мы снова получаемъ циклъ $PP_1P_2\ldots$ и по девяти его точкамъ получаемъ другую секунду, не имѣющую съ первою ни одной общей точки; и такимъ образомъ воспроизведемъ линейную приму коносекундъ.

Но изъ тѣхъ же шести точекъ, устанавливая циклъ въ другомъ порядкѣ точекъ, получимъ нетолько другую коносекунду, но и другую коллинеарность, а слѣдовательно и другую линейную приму коносекундъ.

Принимая во вниманіе тождественность цикловъ $ABCDEF\ldots$, $BCDEFF_1\ldots$, $BCDEFF_1F_2\ldots$, мы можемъ сказать, что циклы различаются только тогда, когда въ его выраженіи при одной начальной буквѣ различается порядокъ буквъ, относящихся къ послѣдовательному ряду гомологичныхъ точекъ то есть когда подвергаемъ перестановкѣ пять буквъ въ этомъ выраженіи, а это число перестановокъ есть $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Итакъ, произвольными шестью точками пространства вообще опредѣляется 120 особыхъ коносекундъ, проходящихъ чрезъ эти точки, и вмѣстѣ съ тѣмъ различныхъ коллинеацій, опредѣляющихъ циклы, а потому и линейныя примы коносекундъ.

Въ этомъ можно усмотрѣть коренное различіе въ условіяхъ построенія конопримъ и коносекундъ, приводящее къ чрезвычайной простотѣ первыхъ и сложности вторыхъ.

Но если въ общемъ случаѣ не можетъ существовать аналогіи съ построеніемъ Паскаля или построеніемъ по циклу ABCDE (въ которомъ мы можемъ какъ угодно переставлять точки и всегда получать одну и ту же коноприму), то есть частные случаи, когда аналогія обоихъ построеній можетъ имѣть мѣсто.

Первый случай есть спеціальный случай инволюторной коллинеаціи (аналогично построенію и теоремѣ Паскаля, для которой принимается коллинеація ABA'B' и A'B'AB [1]). Въ этомъ случаѣ всѣ вообще циклы двучленны (но имѣются и одночленные, а именно на оси коллинеаціи).

Второй случай тотъ, когда коллинеація, хотя и общаго характера, но приводитъ коносекунду къ самосовмѣщенію.

Допустимъ, что для данной коносекунды мы установили одну изъ такихъ коллинеацій. Въ такомъ случаѣ, взявъ на ней произвольную точку A, найдемъ ей гомологичную

---

[1]) Если возьмемъ шестиугольникъ ABCA'B'C' (гдѣ C пятая, а C' искомая шестая точка) и примемъ за противоположныя стороны AB съ A'B', BC съ B'C' и CA' съ C'A, то точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ лежатъ на одной прямой—оси коллинеаціи (центръ же коллинеаціи—точка пересѣченія AA' съ BB'); это составляетъ обычную формулировку этой теоремы.

A_1, этой второй—гомологичную A_2 и т. д.; словомъ, получаемъ циклъ, и значитъ коллинеація, приводящая коносекунду къ самосовмѣщенію, можетъ для каждой ея точки выражаться цикломъ, лишь бы число членовъ цикла было не менѣе девяти (и конечно, чтобы при этомъ точки не имѣли особаго спеціальнаго положенія). Такимъ образомъ, если коллинеація, какъ-нибудь установленная по даннымъ точкамъ, дѣлаетъ коносекунду самогомологичною, то задача построенія точекъ послѣдней, сводится къ простой задачѣ коллинеарныхъ построеній.

Простѣйшія построенія въ общемъ случаѣ будутъ разсмотрѣны въ статьѣ «Теорема аналогичная теоремѣ Паскаля, но относящаяся къ пространству».

2 сентября 1915 г.