

XIV. Его-же. Расширеніе построенія предъидущей замѣтки на конопримы съ двумя или однимъ постояннымъ элементомъ.

Въ предъидущей замѣткѣ мы разрѣшили задачу переноса всякаго рода построеній, произведенныхъ на плоскости, въ систему конопримъ точекъ и лучей; и обратно, мы свели рѣшенія всякаго рода задачъ въ секундахъ конопримъ точекъ и лучей, имѣющихъ три постоянные элемента, къ обыкновеннымъ задачамъ на плоскости.

Естественно является мысль распространить рѣшеніе и на тѣ простѣйшіе случаи, когда въ секундахъ конопримъ имѣются только два или всего одинъ общій элементъ.

Конопримы секунды, имѣющія постоянными пару точекъ 1 и 2, есть ортогональныя гиперболы, такъ какъ для такой конопримы двѣ точки могутъ быть заданы произвольно и слѣдовательно каждая коноприма опредѣляется этими двумя и еще точками 1 и 2 то есть всего четырьмя точками, а потому эти конопримы есть тетрапримы то есть ортогональныя гиперболы.

Имѣется ли въ линейной примѣ тетрапримъ экстра-элементъ то есть особая тетраприма, которую мы можемъ выдѣлить изъ всѣхъ остальныхъ какъ единственную?

Отвѣтъ получается утвердительный, потому что ли-

нейную приму мы можемъ опредѣлить одною произвольною точкою 3, которая совмѣстно съ парю точекъ 1 и 2 дастъ трехугольникъ, чрезъ который пройдутъ всѣ тетрапримы линейной примы. Въ этой примѣ заключаются три особыя тетрапримы, представленныя парю взаимноперпендикулярныхъ прямыхъ, а именно парю состоящею изъ линіи высоты трехугольника и перпендикулярной къ ней стороны. Но изъ этихъ трехъ особыхъ тетрапримъ въ данномъ случаѣ выдѣляется одна, а именно пара, въ составъ которой входитъ прямая 12, а перпендикуляръ къ ней изъ точки 3 представитъ другой лучъ пары.

Коррелятивность между тетрапримами и точками устанавливается тѣмъ простымъ соображеніемъ, что въ каждой изъ нихъ имѣется центръ. Дана тетраприма; вмѣстѣ съ нею дается и центръ. Дана точка; вмѣстѣ съ нею дается и тетраприма, потому что изъ этой точки, какъ центра, и точекъ 1 и 2 выводятъ еще точки 1' и 2', а по четыремъ точкамъ вполне и однозначно опредѣляется тетраприма.

Но это рѣшеніе еще не есть окончательное рѣшеніе поставленной задачи, такъ какъ при немъ экстратетра-

примамъ коррелятивны не экстраточки, а точки на прямой 12. Но теперь ясно, что мы придемъ къ окончательному рѣшенію, если присоединимъ коллинеацію, принявъ прямую 12 за ось инволюціи, а за центръ инволюторной коллинеаціи взявъ произвольную точку Z.

Теперь экстратетрапримамъ коррелятивны экстраточки, и поставленная задача рѣшена окончательно. Распространимъ названіе изотропной коллинеаціи и на этотъ случай (хотя при этомъ тетрапримы и преобразуются въ конопримы общаго характера).

Въ разсматриваемой секундѣ тетрапримъ особую роль играетъ кругъ, имѣющій діаметромъ точки 1 и 2. Каждая точка этого круга, соединенная лучами съ этими двумя постоянными точками, есть центръ особой тетрапримы, представленной двумя перпендикулярными прямыми. Подвергнувъ этотъ кругъ изотропному преобразованію, найдемъ нѣкоторую гиперболу, которую можемъ назвать «гиперболою особыхъ точекъ», потому что всѣмъ этимъ точкамъ въ секундѣ тетрапримъ коррелятивны особые тетрапримы, представленныя парой перпендикулярныхъ лучей.

Итакъ, въ разсматриваемой секундѣ тетрапримъ всѣ особые тетрапримы (не считая экстратетрапримъ) составляютъ гиперболу тетрапримъ, изъ чего, между прочимъ, слѣдуетъ, что всякая линейная прима пересѣкаетъ эту приму тетрапримъ въ парѣ элементовъ (которая можетъ быть и мнимая).

Такъ какъ центръ гиперболы есть точка, сопряженная экстраточкѣ на каждомъ діаметрѣ, а пару другихъ сопряженныхъ на немъ образуютъ точки гиперболы, то на всякой линейной примѣ тетрапримъ, содержащей тетраприму, коррелятивную центру гиперболы, три особые тетрапримы составляютъ съ нею четыре гармоническія, и притомъ экстратетраприма сопряжена этому «центру» «гиперболы тетрапримъ».

Перейдемъ къ секундѣ конопримъ, имѣющихъ одну единственную постоянную точку.

Такъ какъ кромѣ этой постоянной точки 0 для опредѣленія конопримы можемъ взять двѣ произвольныя, то коноприма, какъ элементъ секунды, опредѣляется тремя точками то есть представляетъ кругъ.

Въ каждой линейной примѣ круговъ, пересѣкающихся въ двухъ точкахъ (изъ коихъ одна есть постоянная точка 0, а другая опредѣляетъ приму), имѣется одинъ единственный экстракругъ, представляющій специальный кругъ, состоящій изъ прямой, проходящей черезъ эти двѣ точки, и

экстрапрямой. Если для каждого круга мы примемъ центръ за коррелятивную точку, то по отношенію къ экстракругу за коррелятивную точку придется признать экстраточку на централи примы. Какъ видимъ, въ данномъ случаѣ, никакого изотропнаго преобразованія и не требуется и каждому построенію на плоскости находится соотвѣтствующее построеніе въ секундѣ круговъ, если каждую точку въ построеніи мы замѣтимъ кругомъ, имѣющимъ центръ въ этой точкѣ и проходящемъ черезъ общій центръ 0.

Въ частности, каждому кругу плоскости коррелятивна сфероприма круговъ.

Также секундѣ сферопримъ лучей съ однимъ постояннымъ лучомъ родственна система точекъ на плоскости, а именно каждой такой сферопримѣ коррелятивенъ центръ вписаннаго круга. И обратно, по центру и постоянному лучу мы воспроизводимъ коррелятивную ему сфероприму лучей.

Экстраточкамъ коррелятивны экстрасферопримы лучей то есть спеціальныя ихъ сферопримы.

Отъ секундъ конопримъ мы можемъ перейти къ секундамъ элементовъ другого рода, родственныхъ системъ точекъ на плоскости.

Сюда напр можно отнести секунду параллельныхъ векторовъ. Въ самомъ дѣлѣ, каждая линейная прима такихъ характеризуется присутствіемъ одного единственнаго экстравектора, а такъ какъ этотъ экстрасэлементъ примы находится на экстрапрямой, то за точку, коррелятивную вектору можно прямо принять его начальную точку. Этимъ устанавливается переносъ построеній съ точекъ на векторы.

Впрочемъ на этотъ случай можно смотрѣть какъ на специальный случай секунды не параллельныхъ векторовъ, въ которыхъ начальныя и концевыя точки связаны кристаллографическою проективностью то есть экстраточкамъ коррелятивны и экстравекторы. Въ такой секундѣ имѣется центръ, и если изъ него проведемъ какой-нибудь кругъ начальныхъ точекъ, то соотвѣтственная концевая точки опишутъ концентрический эллипсъ, а совокупность векторовъ, соединяющихъ точки круга съ соотвѣтственными точками эллипса, составятъ сфероприму векторовъ. Если на плоскости возьмемъ какой-нибудь другой кругъ, то соотвѣтственный эллипсъ уже не будетъ концентрическимъ.

Векторы линейной примы, какъ извѣстно, огибаютъ параболу, но прямой начальныхъ точекъ соотвѣтствуетъ прямая концевыхъ точекъ.

14 іюля 1915 г.