## XIII. Его-же. Простой способъ построенія коррелятивныхъ элементовъ въ родственныхъ секундахъ точекъ, конопримъ точекъ и конопримъ лучей съ тремя постоянными элементами.

Проективныя отношенія, выясненныя въ предъидущей замѣткѣ, получили бы высокую степень наглядности, если бы удалось установить простымъ построеніемъ такую коррелятивность между конопримами секунды и точками плоскости, чтобы экстраэлементамъ одной соотвѣтствовали экстраточки другой.

Непосредственное простое построеніе мнѣ неизвѣстно, а сложно-косвенное, совершающееся въ два пріема. Уже въ моей статьѣ о полярныхъ отношеніяхъ вещественнаго трехугольника [1]) было показано, что можемъ мы принять таковой для установленія коррелятивности между точками плоскости и конопримами, проходящими чрезъ три его вершины. Каждому лучу, исходящему изъ этой точки, въ качествѣ его полюса, соотвѣтствуетъ нѣкоторая точка, а совокупности всѣхъ лучей—коноприма, проходящая чрезъ всѣ три вершины трехугольника.

Но при этой полярности экстраточкамъ на плоскости соотвѣтствуютъ не экстраконопримы секунды то есть не ортогональныя гиперболы; и обратно, примѣ этихъ гиперболъ соотвѣтствуетъ не экстрапрямая, а нѣкоторая другая прямая $e$. Но если мы такъ коллинеарно преобразуемъ систему, чтобы $e$ преобразовалась въ экстрапрямую, а точка высотъ трехугольника стала одновременно и его центромъ, цѣль будетъ достигнута. Для этого прямую $e$ примемъ за ось инволюціи, а центръ тяжести P трехугольника за центръ инволюторной коллинеаціи; лучи, соединяющіе P съ вершинами трехугольника, сопряжены со сторонами, противоположными вершинамъ. Въ этой инволюціи, какъ и во всякой инволюціи лучей, должны быть два взаимноперпендикулярные сопряженные (мнимые двойные) луча. Принявъ одинъ изъ нихъ за ось растяженія, произведемъ такое растяженіе по направленію другого луча, чтобы какая-нибудь пара сопряженныхъ лучей стала взаимноперпендикулярною; тогда всѣ сопряженные лучи станутъ взаимноперпендикулярными, инволюція преобразуется въ изотропную.

Теперь имѣемъ трехугольникъ (правильный), который вполнѣ осуществляетъ поставленную цѣль. Нетолько каждой точкѣ на плоскости коррелятивна нѣкоторая коноприма, проходящая чрезъ вершины трехугольника, но и каждой экстраточкѣ коррелятивна экстраконоприма то есть ортогональная гипербола, потому что центръ тяжести, чрезъ который проходитъ каждая таковая, есть одновременно и точка высотъ; въ частности, экстраточкамъ на сторонахъ трехугольника коррелятивна эта самая сторона, совокупно съ перпендикулярною къ ней высотою трехугольника.

Назовемъ, ради удобства, найденное нами коллинеарное преобразованіе «изотропнымъ». Въ частности, данный трехугольникъ изотропно преобразуется въ правильный.

Преобразованная такимъ образомъ система точекъ родственна данной системѣ конопримъ, а потому всѣ вообще построенія, производимыя въ ней, могутъ быть непосредственно переносимы въ данную систему, и при томъ, какъ видимъ, сравнительно простыми операціями Въ частности, по тремъ конопримамъ системы легко построимъ и ихъ сфероприму.

Такъ какъ всѣ конопримы данной системы проходятъ чрезъ вершины даннаго трехугольника, то заданіе сводится къ тремъ произвольнымъ парамъ точекъ.

Послѣ изотропнаго преобразованія эти пары точекъ преобразуются, конечно, въ другія пары. Если найдемъ поляру каждой изъ точекъ такой пары по отношенію къ преобразованному трехугольнику, то и получимъ искомую точку пересѣченія обѣихъ поляръ, коррелятивную каждой данной конопримѣ. По тремъ точкамъ проведемъ кругъ, и тогда конопримы, коррелятивныя его точкамъ и составляютъ рѣшеніе поставленной задачи.

Мы можемъ провести любой кругъ въ изотропно-преобразованной системѣ, и каждая совокупность конопримъ, коррелятивная совокупности точекъ такого круга, есть сфероприма конопримъ. Въ частности, если изъ трехъ точекъ, опредѣляющихъ кругъ, одна есть экстраточка, то опредѣляемый такимъ образомъ кругъ есть кругъ спеціальный и состоитъ изъ прямой, проходящей чрезъ двѣ обыкновенныя точки и экстрапрямой; такому спеціальному кругу въ данной системѣ коррелятивна также спеціальная сфероприма, состоящая изъ одной обыкновенной линейной примы и экстрапримы конопримъ. Построеніе таковыхъ настолько просто, что нѣтъ надобности производить преобразованія.

Благодаря установленному простому способу коррелятивнаго преобразованія родственныхъ системъ точекъ и конопримъ, мы можемъ непосредственно переносить всякія построенія и теоремы изъ одной системы въ другую.

Напр. точка имѣетъ полярою (по отношенію къ трехугольнику) нѣкоторую прямую, а пара точекъ—пару прямыхъ. Если возьмемъ на прямой инволюцію паръ точекъ, то коррелятивно получимъ коноприму лучей съ попарно сопряженными лучами; наконецъ, если чрезъ пару точекъ инволюціи на прямой и вершины трехугольника проведемъ приму конопримъ, то коррелятивно получимъ приму точекъ пересѣченія паръ сопряженныхъ касательныхъ конопримы. Но, какъ извѣстно [1]), сопряженныя пары касательныхъ конопримы пересѣкаются въ точкахъ на прямой; слѣдовательно, прима конопримъ, проходящихъ чрезъ три постоянныя точки и пары инволюціи на прямой, есть прима линейная.

Напомню еще разъ, что конечно изъ одной системы въ другую, родственную, не переносятся тѣ теоремы, которыя связаны съ индивидуальною особенностью элементовъ этихъ системъ. Мы можемъ совмѣстить точку съ каждою другою, но мы не можемъ совмѣстить, и при томъ во всѣхъ оріентировкахъ, двухъ любыхъ конопримъ.

Отсюда слѣдуетъ, что вообще не переносятся теоремы симметріи, или, точнѣе сказать, онѣ не переносятся съ системы точекъ на систему конопримъ, но не обратно.

Если системы точекъ и лучей на плоскости не родственны, то это не относится къ системамъ конопримъ точекъ и лучей. Это станетъ очевиднымъ, когда для по-

[1]) Эти Записки V 174.

[1]) Ср. напр. *Reye* Geometrie der Lage. I, 250.

строенія секундъ этихъ конопримъ мы возьмемъ правильный трехугольникъ.

Каждой экстраточкѣ поляренъ лучъ, проходящій чрезъ центръ трехугольника; полюсъ экстрапрямой есть самъ центръ. Слѣдовательно, каждому экстраэлементу системы конопримъ точекъ то есть ортогональной гиперболѣ, какъ необходимо проходящей чрезъ этотъ центръ, полярна конприма лучей, въ составъ которыхъ входитъ экстрапрямая то есть парабола, а таковыя и составляютъ экстраконпримы лучей.

Въ общемъ случаѣ, когда постоянный, опредѣляющій систему, трехугольникъ, не есть правильный, мы не имѣемъ такого простого построенія коррелятивности этихъ двухъ родственныхъ системъ. Но, какъ видно изъ вышеизложеннаго, мы приходимъ къ этому построенію, присоединяя изотропное преобразованіе. Если дана напр., ортогональная гипербола, ей коррелятивна точка на прямой, которая при изотропномъ преобразованіи принимается за ось инволюціи и точки которой преобразуются въ экстраточки. Послѣ преобразованія такимъ точкамъ полярны прямыя, проходящія чрезъ центръ правильнаго трехугольника, а такимъ прямымъ коррелятивны параболы. Такимъ образомъ каждому экстраэлементу въ первоначальной, не преобразованной, системѣ коррелятивенъ экстраэлементъ въ системѣ, изотропно преобразованной.

И, обратно, параболѣ то есть экстраэлементу первоначальной системы, принимаемой за систему конопримъ лучей, коррелятивна нѣкоторая прямая, проходящая чрезъ центръ тяжести. Послѣ изотропнаго преобразованія полюсъ такой прямой есть нѣкоторая экстраточка, а экстраточкѣ коррелятивна ортогональная гипербола. Обѣ системы (конопримъ точекъ и лучей) родственны системѣ точекъ, а слѣдовательно, родственны и другъ другу.

Совершенно очевидно, что въ составъ сферопримы конопримъ точекъ не входитъ ни одной ортогональной гиперболы, а если имѣется хоть одна, то сфероприма спеціальна, и тогда всѣ гиперболы, входящія въ ея составъ, ортогональны. Полная совокупность параболъ въ этой системѣ образуетъ сфероприму (что въ болѣе общемъ видѣ было уже доказано мною раньше [1]). Въ самомъ дѣлѣ, каждой такой параболѣ коррелятивна (по отношенію къ трехугольнику) нѣкоторая точка, совокупность которыхъ составляетъ экстраэллипсъ (вписанный въ трехугольникъ [2]). Такъ какъ въ каждой линейной примѣ конопримъ имѣется три особыхъ конопримы, представленныхъ парою лучей, то значитъ совокупность точекъ, коррелятивнымъ особымъ конопримамъ, есть кривая 3-го порядка.

Послѣ изотропнаго преобразованія этотъ эллипсъ превращается въ кругъ то есть коррелятивную сфероприму точекъ. Отсюда слѣдуетъ, что вообще въ составъ сферопримъ параболы (равно какъ и вообще подобныя конопримы точекъ) входятъ въ числѣ двухъ, такъ какъ всякая другая сфероприма со сферопримою параболъ пересѣкается только въ двухъ элементахъ, въ частномъ случаѣ (касанія) только въ одномъ, или же параболъ вовсе не входитъ. Если же въ составъ входитъ болѣе двухъ параболъ, то всѣ конопримы сферопримы есть параболы.

Коррелятивно для секунды конопримъ лучей выводимъ, что полная совокупность ортогональныхъ гиперболъ образуетъ сфероприму. Во всякой другой сферопримѣ заключается только двѣ таковыхъ, въ особомъ случаѣ одна единственная, или же таковыхъ въ ея составѣ вовсе не имѣется.

И въ секундѣ конопримъ лучей заключается прима такихъ, которые представлены парою точекъ (точнѣе парою линейныхъ примъ лучей). Такъ какъ въ каждой линейной примѣ такихъ особыхъ конопримъ представлено три (изъ коихъ одна пара можетъ быть мнимою), то совершенно очевидно, что примѣ особыхъ конопримъ лучей коррелятивна кривая 3-го порядка.

14 іюля 1915 г.

---

[1]) Эти Записки III 322.
[2]) Эти Записки V 176.