34. Теорія осевыхъ коллинеацій какъ расширеніе теоріи Штейнера конопримъ (Kegelschnittbüschel).

Е. С. Федорова.

По знаменитой теоріи Штейнера двумя данными на плоскости инволюціями паръ точекъ на прямыхъ опредѣляется инволюція на любой прямой на плоскости то есть полная секунда инволюцій. Опредѣляющимъ факторомъ всѣхъ этихъ инволюцій является линейная прима кривыхъ, а именно конопримъ (Kegelschnittbüschel по Штейнеру), имѣющихъ общія двѣ пары точекъ, изъ коихъ нетолько одна, но и обѣ могутъ быть мнимыми. Каждая прямая пересѣкаетъ каждую кривую примы въ парѣ точекъ принадлежащей ей инволюціи.

Кромѣ упомянутыхъ двухъ паръ точекъ, общихъ всѣмъ кривымъ, чрезъ всякую другую точку плоскости проходитъ лишь одна кривая примы, и потому на всѣхъ лучахъ, проведенныхъ изъ этой точки, окажется еще только одна точка, принадлежащая той же кривой, и такая пара точекъ на каждомъ лучѣ и есть пара сопряженныхъ точекъ инволюціи на немъ. Такимъ образомъ, на каждомъ лучѣ, то есть на каждой прямой на плоскости, каждой точкѣ сопряжена (проективна) нѣкоторая другая точка.

Послѣдующими геометрами теорія Штейнера расширена, между прочимъ, и въ томъ отношеніи, что заданными принимаются двѣ инволюціи на прямыхъ не пересѣкающихся то есть не находящихся въ одной плоскости, и въ результатѣ рѣшенія задачи получается также секунда инволюцій на лучахъ, но уже конечно не находящихся въ одной плоскости; ни одинъ лучъ этой секунды не пересѣкается ни съ какимъ другимъ ея лучомъ, но чрезъ каждую точку пространства непремѣнно проходитъ одинъ, и только одинъ, лучъ секунды, и на этомъ лучѣ данной точкѣ сопряжена одна единственная точка, составляющая съ данною пару точекъ инволюціи [1]).

Теорія, благодаря этому, пріобрѣтаетъ новое значеніе, такъ какъ такимъ образомъ устанавливается особая проективность точекъ пространства, а именно коллинеація, называющаяся осевою. Каждой точкѣ пространства гомологична опредѣленная точка, каждой прямой опредѣленная прямая, и каждой плоскости—опредѣленная плоскость (нѣмецкіе геометры употребляютъ названіе geschaart involutorischer Raum [1]).

Хотя этой коллинеаціи уже была посвящена одна изъ моихъ замѣтокъ [2]), но въ ней разсмотрѣнъ лишь тотъ случай, когда обѣ оси коллинеаціи вещественны. Насколько мнѣ извѣстно, ни въ математической литературѣ, ни въ учебныхъ руководствахъ не было систематическаго и связнаго изложенія теоріи этой коллинеаціи въ полномъ видѣ, а особенно съ проводимой здѣсь точки зрѣнія, какъ расширеніе теоріи Штейнера.

По этой теоріи линейная прима конопримъ можетъ быть опредѣлена нетолько двумя произвольными инволюціями на прямыхъ то есть или 1) просто четырьмя точками, двѣ пары которыхъ мы произвольно можемъ взять за пары вещественныхъ двойныхъ точекъ инволюціи, или 2) двумя вещественными точками и парою мнимыхъ точекъ, принимаемую за пару мнимыхъ двойныхъ точекъ инволюціи, но также 3) и тремя точками съ присоединеніемъ нѣкоторой инволюціи, разсматриваемой не

---

[1]) Понятнымъ исключеніемъ является тотъ случай, когда два луча пересѣкаются въ вещественныхъ двойныхъ точкахъ ихъ инволюцій; тогда эти точки самогомологичны, и въ нихъ пересѣкается вся прима лучей въ плоскости. Этотъ случай можетъ имѣть мѣсто только въ гиперболической коллинеаціи.

[1]) Помимо неудобства буквальнаго перевода этого названія на русскій языкъ, въ немъ не выражаются двѣ главныя особенности этой гомологичности, а именно, что она представляетъ коллинеацію и что она опредѣляется двумя осями, вещественными или мнимыми, какъ это будетъ видно изъ дальнѣйшаго изложенія.

[2]) Эти Записки III 394.

какъ пары сопряженныхъ точекъ относительно всѣхъ кривыхъ примы, но какъ пары точекъ пересѣченія кривыхъ на этой прямой. Такъ какъ двѣ конопримы никоимъ образомъ не могутъ пересѣкаться въ трехъ вещественныхъ точкахъ, то въ послѣднемъ случаѣ должна имѣться и четвертая общая точка пересѣченія двухъ, а слѣдовательно и всѣхъ конопримъ, и заданіе приводится къ первому случаю.

Какъ увидимъ, и при расширеніи этой теоріи мы можемъ задаваться нетолько двумя инволюціями, то есть въ сущности двумя лучами съ нанесенными на нихъ инволюціями, но напр. тремя лучами, изъ которыхъ только на одномъ нанесена инволюція или, наконецъ, четырьмя лучами безъ всякихъ данныхъ инволюцій.

Для насъ особенно интересенъ тотъ случай, когда даны три луча и лишь на одномъ изъ нихъ дана инволюція.

Такъ какъ лучами осевой коллинеаціи мы называемъ тѣ прямыя, на которыхъ гомологичныя точки пространства образуютъ пары точекъ инволюціи, или иначе, такія прямыя, которыя въ двухъ пространствахъ самогомологичны, то отсюда слѣдуетъ, что каждой плоскости, проходящей чрезъ такой лучъ, гомологична плоскость, проходящая чрезъ него же, почему каждый лучъ осевой коллинеаціи является прямою пересѣченія примы плоскостей, образующей ихъ инволюцію. Если данъ хоть одинъ лучъ коллинеаціи съ нанесенною на немъ инволюціею, то инволюція плоскостей, имѣющихъ осью одинъ изъ лучей коллинеаціи, окажется въ перспективномъ положеніи съ инволюціей точекъ на данномъ лучѣ, а потому инволюція какъ точекъ на лучѣ, такъ и плоскостей, пересѣкающихся въ лучѣ будетъ одного и того же рода то есть обѣ будутъ или инволюціи съ двумя вещественными (гиперболическая) или двумя мнимыми (эллиптическая) или, въ особомъ частномъ случаѣ, только однимъ (параболическая) двойнымъ элементомъ.

Если же инволюція плоскостей, пересѣкающихся въ одномъ лучѣ, перспективна со всѣми инволюціями точекъ на остальныхъ лучахъ коллинеаціи, то значитъ всѣ инволюціи какъ точекъ на всѣхъ лучахъ, такъ и плоскостей, пересѣкающихся въ лучахъ, одного и того же рода, а потому всѣ вообще осевыя коллинеаціи могутъ относиться лишь къ двумъ разрядамъ: гиперболическимъ или эллиптическимъ.

Что касается параболической осевой коллинеаціи, то она сведется къ задачѣ на плоскости.

Въ самомъ дѣлѣ, если чрезъ одинъ изъ лучей проходитъ параболическая инволюція плоскостей, то между ними должна выдѣлиться одна единственная двойная плоскость, съ которою сопряжены всѣ остальныя плоскости линейной примы, и въ этой двойной плоскости должны находиться всѣ двойныя точки всѣхъ лучей коллинеаціи; если проведемъ двойную плоскость чрезъ другіе лучи, то въ нихъ должны находиться двойныя точки, а слѣдовательно всѣ лучи должны находиться въ этой то есть въ одной и той же плоскости.

Если два луча находятся въ одной плоскости то есть пересѣкаются, то и вся секунда лучей находится въ этой же плоскости; въ этомъ случаѣ, какъ мы знаемъ, инволюціи на двухъ лучахъ могутъ быть взяты произвольно, въ частности, одна можетъ быть гиперболической, а другая эллиптической. При расширеніи же этой задачи на два не пересѣкающіеся луча обѣ инволюціи должны быть одного рода.

Поэтому расширенная задача раздѣляется всего на двѣ: или 1) обѣ данныя инволюціи на лучахъ гиперболическія и тогда всѣ лучи секунды несутъ на себѣ гиперболическія инволюціи, также какъ и всѣ плоскости, пересѣкающіяся въ лучахъ, или 2) всѣ такія инволюціи есть эллиптическія.

Итакъ, пусть даны три луча и на одномъ изъ нихъ инволюція 1-го рода (гиперболическая). Каждый изъ двухъ остальныхъ лучей можно принять за ось инволюціи плоскостей, перспективно, по инволюціи перваго луча, отмѣчающей инволюцію на третьемъ. Въ частности, обѣ двойныя точки инволюціи перспективно переносятся на этотъ третій лучъ и тѣмъ вполнѣ и однозначно опредѣляютъ инволюцію на немъ, причемъ обѣ перспективныя двойныя точки находятся на двухъ прямыхъ, пересѣкающихъ ось инволюціи плоскостей въ двухъ опредѣленныхъ точкахъ. И эти точки, въ свою очередь, есть двойныя точки инволюціи на этомъ лучѣ, потому что эти точки проектируются плоскостями, проходящими чрезъ третій лучъ и двойныя точки даннаго луча; а такъ какъ на три данные луча можно смотрѣть какъ на лучи, взятые произвольно изъ лучей секунды, то значитъ всѣ лучи секунды имѣютъ двойныя точки на двухъ осяхъ.

Это и есть оси гиперболической коллинеаціи, а лучи всей секунды есть прямыя, пересѣкающія обѣ эти оси.

Чрезъ любую точку пространства проходитъ только одинъ лучъ коллинеаціи, а именно прямая, пересѣкающая обѣ оси. Инволюція на лучѣ опредѣляется этими двумя точками пересѣченія какъ двойными точками инволюціи, а потому каждой точкѣ на лучѣ опредѣляется сопряженная точка, гомологичная данной.

Любая плоскость пересѣкаетъ обѣ оси въ двухъ

двойныхъ точкахъ инволюціи на лучѣ—единственномъ въ данной плоскости. Этотъ лучъ есть ось инволюціи плоскостей, перспективно пересѣкающихъ инволюціи на всѣхъ остальныхъ лучахъ. Въ частности, двѣ плоскости этой инволюціи, проходящія чрезъ обѣ оси, есть двойныя плоскости инволюціи, потому что онѣ на всѣхъ лучахъ пересѣкаютъ одну изъ двойныхъ точекъ на этихъ лучахъ. Этимъ опредѣляется плоскость, сопряженная данной, какъ ей гомологичная плоскость коллинеаціи.

Отсюда видимъ, что полная секунда лучей опредѣляется четырьмя любыми изъ нихъ, которые однако не могутъ быть заданы произвольно, если принадлежать къ гиперболической коллинеаціи, а должны пересѣкаться парою прямыхъ, которая и составляетъ пару осей коллинеаціи.

Если даны только два луча съ нанесенными на нихъ инволюціями, то, какъ мы видѣли, обѣ инволюціи должны быть, одного и того же рода то есть въ данномъ случаѣ обѣ гиперболическими, и тогда обѣ оси коллинеаціи соединяютъ по одной двойной точкѣ инволюцій на лучахъ. Отсюда видно, что по двумъ инволюціямъ рѣшеніе получается не однозначное, а двузначное, такъ какъ за одну изъ осей можемъ принять каждую изъ прямыхъ, соединяющихъ одну двойную точку на лучѣ съ обѣими двойными точками на другомъ лучѣ. Двѣ такія секунды имѣютъ общими всѣ лучи на четырехъ граняхъ сфеноида съ центрами въ его вершинахъ—двухъ парахъ двойныхъ точекъ.

Изложеннымъ опредѣляются существенныя свойства гиперболической осевой коллинеаціи.

Въ частности, экстраплоскости принадлежитъ тотъ единственный экстралучъ, который соединяетъ обѣ экстраточки осей. Если проведемъ лучъ, пересѣкающій на кратчайшемъ разстояніи обѣ оси и перпендикулярный къ обѣимъ, его экстраточкѣ гомологична средняя точка или центръ отрѣзка между осями, и эта точка является истиннымъ центромъ (симметріи) всей секунды лучей, въ которомъ пересѣкаются три взаимноперпендикулярныя двойныя оси симметріи секунды лучей. Плоскость, проходящая чрезъ этотъ центръ и экстралучъ секунды, и есть плоскость, гомологичная экстра плоскости и называется срединною или центральною плоскостью осевой коллинеаціи. Такъ какъ каждой точкѣ центральной плоскости гомологична экстраточка, то въ секундѣ лучей представлены всѣ направленія, но вовсе нѣтъ параллельныхъ лучей.

Если одна изъ осей коллинеаціи есть экстрапрямая и мы придадимъ ей горизонтальное положеніе, а за другую ось примемъ какую-нибудь вертикальную прямую, то получаемъ спеціальную коллинеацію, для которой эта вторая ось есть двойная ось симметріи, чѣмъ вполнѣ опредѣляется гомологичность точекъ, прямыхъ и плоскостей пространства, а всѣ самогомологичныя прямыя, то есть лучи секунды, есть перпендикуляры къ двойной оси симметріи то есть представляютъ полную совокупность горизонтальныхъ прямыхъ, пересѣкающихъ двойную ось симметріи коллинеаціи. По отношенію же къ полной совокупности лучей она же есть уже ось вращенія.

Перейдемъ къ эллиптической осевой коллинеаціи, и снова начнемъ со случая, когда даны три луча съ инволюціей на одномъ изъ нихъ.

Конечно, и въ этомъ случаѣ, мы легко опредѣлимъ инволюціи на двухъ остальныхъ, проектируя изъ паръ точекъ инволюціи плоскостями, проходящими чрезъ одинъ изъ остальныхъ лучей, пары точекъ на другомъ. Разъ инволюціи опредѣлены на всѣхъ трехъ лучахъ, по каждой точкѣ, а слѣдовательно и прямой, и плоскости можно найти гомологичныя имъ точку, прямую или плоскость.

Проще всего эта операція для плоскостей; данная плоскость пересѣкаетъ три луча въ опредѣленныхъ точкахъ; гомологичная плоскость пройдетъ чрезъ сопряженныя точки на тѣхъ же лучахъ, но если плоскость проходитъ чрезъ одинъ изъ лучей, то получается инволюція плоскостей, опредѣленная инволюціею на любомъ другомъ лучѣ. Двѣ сопряженныя плоскости этой инволюціи и есть плоскости гомологичныя. Но такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ вещественныхъ двойныхъ плоскостей инволюціи не имѣется, то въ каждой таковой вообще имѣется пара мнимыхъ двойныхъ плоскостей инволюціи, то есть такихъ сопряженныхъ, которыя взаимно-перпендикулярны; если бы мы нашли лучъ, въ которомъ пересѣкаются двѣ пары сопряженныхъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей, то и всѣ сопряженныя пары плоскостей оказались бы взаимноперпендикулярными, лучъ сталъ бы осью изотропной инволюціи плоскостей. Такую ось мы назвали бы фокальною, какъ это принято въ теоріи коносекундъ.

Мы, по только-что изложенному, легко найдемъ плоскость, гомологичную экстраплоскости, то есть срединную или центральную плоскость, которая необходимо проходитъ чрезъ центры инволюціи на всѣхъ лучахъ; мы представимъ себѣ ее горизонтальною. Экстрапрямая этой плоскости есть единственный экстралучъ. На немъ, какъ и на всякомъ другомъ лучѣ, мы по основнымъ даннымъ легко найдемъ инволюцію. Эта инволюція изъ любой точки пространства проектируется тождественною инволюціей лучей, а изъ фокальной оси она же проекти-

руется изотропною инволюціею плоскостей. Отсюда видимъ, что мы найдемъ направленіе фокальной оси, если найдемъ такую прямую, проходящую чрезъ центръ одной изъ только-что упомянутыхъ инволюцій лучей, изъ которой плоскости, проектирующія сопряженные лучи, образовали бы взаимно-перпендикулярныя пары инволюціи плоскостей.

Но этого мы достигнемъ, если, принявъ двѣ пары сопряженныхъ лучей за оси двухъ линейныхъ и проективныхъ примъ плоскостей, причемъ проективность обусловимъ взаимною перпендикулярностью. Тогда получимъ два концетрическіе (ортогональные) конуса, проходящіе чрезъ сопряженныя пары лучей, и каждая производящая такого конуса есть прямая пересѣченія двухъ взаимноперпендикулярныхъ плоскостей, проходящихъ чрезъ пару лучей. Эти два конуса пересѣкаются въ двухъ производящихъ, и именно онѣ обѣ и составляютъ рѣшеніе поставленной задачи то есть изъ нихъ сопряженныя пары лучей проектируются взаимноперпендикулярными плоскостями. По условію построенія обѣ одинаково наклонены къ центральной плоскости, а слѣдовательно и къ вертикали.

Такія двѣ прямыя опредѣляютъ въ экстраплоскости нѣкоторыя двѣ экстраточки, а этимъ экстраточкамъ въ центральной плоскости гомологичны двѣ опредѣленныя точки, и чрезъ нихъ именно проходятъ фокальныя оси; прямой, проходящей чрезъ эту пару точекъ, гомологична экстрапрямая, проходящая чрезъ экстраточки фокальныхъ осей. Чрезъ всѣ точки этой экстрапрямой проходятъ лучи параллельныя одной и той же (вертикальной) плоскости, опредѣляемой двумя фокальными осями, такъ какъ обѣ оси входятъ въ составъ этихъ лучей, а полная ихъ совокупность образуетъ приму производящихъ гиперболическаго параболоида, въ которомъ прямая, соединяющая основанія фокальныхъ линій, есть одна изъ направляющихъ. Слѣдовательно, каждой (вертикальной) плоскости, перпендикулярной къ основной прямой, гомологична опредѣленная плоскость, проходящая чрезъ эту прямую, и двѣ такія проективныя линейныя примы плоскостей и образуютъ именно производящія параболоида.

Какъ двумя вещественными осями коллинеаціи вполнѣ опредѣляется гиперболическая секунда лучей, такъ двумя фокальными осями вполнѣ опредѣляется эллиптическая секунда лучей.

Въ самомъ дѣлѣ, представимъ себѣ обѣ данныя оси въ положеніи, при которомъ основная линія (кратчайшаго разстоянія между ними) горизонтальна, а обѣ оси одинаково наклонны къ горизонтальнымъ плоскостямъ; тогда изотропная инволюція плоскостей, проходящихъ чрезъ каждую изъ нихъ, опредѣляетъ инволюціи точекъ нетолько на каждой другой изъ нихъ, но и на горизонтальномъ экстралучѣ, а этимъ коллинеація опредѣлена вполнѣ и однозначно.

Центръ основной линіи есть одновременно и центръ (симметріи) всей секунды лучей; чрезъ него проходятъ, также какъ и въ случаѣ гиперболической коллинеаціи, три двойныя оси симметріи, изъ коихъ одна есть сама основная линія, а другая есть линія вертикальная, представляющая лучъ секунды, такъ какъ этому центру гомологична экстраточка на вертикали. Третьей двойной оси симметріи гомологична экстрапрямая въ вертикальной плоскости, проходящей чрезъ основную линію, и слѣдовательно нетолько чрезъ точки основной линіи, но и чрезъ точки третьей оси симметріи проходятъ перпендикулярные къ ней производящіе лучи гиперболическаго параболоида. Если изъ любой точки мы проведемъ три плоскости, перпендикулярныя къ осямъ симметріи, то двумъ изъ нихъ гомологичны плоскости, проходящія чрезъ соотвѣтственныя оси, а горизонтальной гомологична горизонтальная же плоскость, чѣмъ соотвѣтственная, гомологичная данной, точка, а равно и проходящій чрезъ нея лучъ вполнѣ и опредѣлится.

Найдемъ экстраточку, гомологичную каждой данной точкѣ центральной плоскости.

Гомологичность точекъ на плоскостяхъ опредѣляется гомологичностью четырехъ точекъ и еще лучше двухъ точекъ и одною инволюціей на прямой.

Поэтому, если мы примемъ для установленія гомологичности основанія фокальныхъ осей и инволюцію на экстралучѣ пересѣченія обѣихъ плоскостей, то опредѣлимъ точку A_e, гомологичную точкѣ A_c, слѣдующимъ образомъ: проводимъ изъ основаній фокальныхъ осей F_1 и F_2 двѣ прямыя чрезъ A_c и находимъ на нихъ экстраточки E_1 и E_2; соединяя прямыми экстраточки F_1^e съ E'_1 и F_2^e съ E'_2, гдѣ E'_1 и E'_2 соотвѣтственно сопряжены E_1 и E_2, въ пересѣченіи получаемъ искомую экстраточку A_e.

И наоборотъ, если дана экстраточка A_e и мы чрезъ нея проведемъ экстрапрямыя $F_1^e E'_1$ и $F_2^e E'_2$, то точка пересѣченія прямыхъ F_1E_1 съ F_2E_2 и есть точка A_c, въ центральной плоскости, гомологичная точкѣ A_e.

Если дана произвольная точка A, то, проектируя ее вертикально, получимъ на центральной плоскости точку A_c, гомологичную экстраточку послѣдней A_e, и тогда проведенной вертикали гомологична центральная прямая (діаметръ), проходящая чрезъ A_c; на послѣдней должна находиться точка A', гомологичная точкѣ A. Эта искомая точка опредѣлится пере-

сѣченіемъ съ горизонтальною плоскостью, гомологичною горизонтальной плоскости, проходящей чрезъ A.

Мы видѣли, что секунда лучей обладаетъ симметріей, а именно тремя взаимноперпендикулярными двойными осями, пересѣкающимися въ центрѣ симметріи (такъ называемый ромбосфеноэдрическій видъ симметріи). Но не только полная совокупность лучей, но и та прима ихъ, которая опредѣляется двумя фокальными осями и вертикальнымъ лучемъ, и составитъ приму производящихъ гиперболическаго параболоида, также обладаетъ тѣми же осями симметріи, потому что элементарныя вращенія около этихъ осей приводятъ совокупность изъ трехъ лучей къ совмѣщенію съ самою собою, а если совокупность опредѣляющихъ элементовъ обладаетъ элементами симметріи, то ими же обладаетъ и полная совокупность элементовъ то есть совокупность производящихъ параболоида.

Между тѣмъ параболоиды общаго характера такими элементами симметріи не обладаютъ; такая совокупность двойныхъ осей симметріи имѣется только въ спеціальныхъ, а именно ортогональныхъ гиперболическихъ параболоидахъ, которые характеризуются тѣмъ, что въ сѣченіяхъ, перпендикулярныхъ къ главной оси, гиперболы сѣченія ортогональны (равносторонни), а въ экстраплоскости поверхность пересѣкается въ двухъ перпендикулярныхъ прямыхъ.

Какъ поверхность, такой параболоидъ обладаетъ еще и двумя взаимноперпендикулярными плоскостями симметріи, проходящими чрезъ главную ось и дѣлящими пополамъ углы между ассимптотами гиперболъ. Но эти плоскости отражаютъ производящія въ направляющія; если же мы отбросимъ послѣднія, то останутся только оси симметріи, изъ коихъ только одна (перпендикулярная къ главной) есть одновременно и производящая то есть въ данномъ случаѣ лучъ системы.

Плоскости симметріи, перпендикулярно пересѣкающіяся въ главной оси (двойной оси симметріи) присутствуютъ во всѣхъ параболоидахъ.

Теперь обратимся къ нашему параболоиду.

Его лучи то есть производящія мы можемъ воспроизвести двумя проективными примами плоскостей: ось одной изъ нихъ есть основная линія, а ось другой экстрапрямая, ей гомологичная (и перпендикулярная); въ числѣ лучей въ экстраплоскости имѣемъ лучъ горизонтальный, который, съ перпендикулярною экстрапрямою пересѣкается въ экстраточкѣ, соотвѣтствующей главной оси параболоида и представляющей горизонтальную двойную ось симметріи.

Чтобы получить приму направляющихъ параболоида, мы за оси двухъ проективныхъ примъ плоскостей можемъ принять экстралучъ и вертикальную двойную ось симметріи. Этого мы можемъ достичь присоединеніемъ плоскостей симметріи, пересѣкающихся въ главной оси параболоида непремѣнно подъ углами 45° къ центральной плоскости, такъ какъ уголъ между плоскостями симметріи долженъ быть прямой и какъ это видно, наконецъ по заданному построенію. Отсюда видимъ, между прочимъ, что если всѣ производящія параболоида параллельны вертикальной плоскости, проходящей чрезъ главную ось, то всѣ его направляющія параллельны горизонтальной (то есть центральной) плоскости.

Въ частности, всѣ эти направляющія получимъ, пересѣкая обѣ фокальныя оси горизонтальными плоскостями; опредѣляемыя горизонтальныя прямыя будутъ пересѣкать и вертикальный лучъ и притомъ перпендикулярно.

Если возьмемъ лучъ a, не входящій въ составъ лучей разсмотрѣннаго параболоида, то вращеніемъ около вертикальнаго луча, какъ около двойной оси симметріи, получимъ другой лучъ a', и если также и эти два луча мы будемъ послѣдовательно пересѣкать горизонтальными плоскостями, то полученныя горизонтальныя прямыя пересѣкаютъ также и вертикальный лучъ, какъ двойную ось симметріи, а потому совокупность этихъ лучей также очертитъ ортогональный гиперболическій параболоидъ, не имѣющій съ предыдущимъ ни одной общей точки; производящія же этого параболоида образуютъ приму лучей, входящую въ составъ секунды. Слѣдовательно, полная секунда лучей разлагается на приму ортогональныхъ гиперболическихъ параболоидовъ, и чрезъ каждую точку пространства проходитъ только одинъ параболоидъ этой примы, а на его поверхности только одинъ лучъ секунды. Общими у всѣхъ являются только лучъ вертикальный (представляющій общую двойную ось симметріи всѣхъ параболоидовъ) и горизонтальный экстралучъ.

Главная ось параболоидовъ при этомъ перемѣщается по послѣднему лучу.

Такъ какъ любая направляющая произвольную плоскость пересѣкаетъ въ точкахъ ея единственнаго луча, то и всѣ вообще направляющія могутъ имѣть своими экстраточками только точки на горизонтальномъ экстралучѣ, а слѣдовательно всѣ вообще направляющія горизонтальны, а полная ихъ совокупность есть терція.

Но, взявъ любую горизонтальную прямую, какъ направляющую, мы изъ каждой ея точки получимъ единственный лучъ чрезъ нея, а въ совокупности нѣкоторый гиперболическій параболоидъ (такъ какъ

въ составъ линейчатой поверхности войдетъ и горизонтальный экстралучъ), то отсюда видимъ, что вообще изъ лучей данной секунды можно составить секунду параболоидовъ, и только что разсмотрѣнная прима ортогональныхъ параболоидовъ есть лишь прима спеціальная.

Докажемъ, что въ составъ каждой примы параболоидовъ непремѣнно входитъ одинъ, и только одинъ ортогональный, или же всѣ параболоиды примы ортогональны.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ всякая такая прима необходимо заключаетъ въ себѣ полную совокупность лучей, то въ составѣ примы долженъ находиться и параболоидъ, содержащій вертикальный лучъ, представляющій двойную ось симметріи. Если a есть одинъ изъ лучей параболоида, то, пересѣкши его горизонтальною прямою въ точкѣ A, проходящею чрезъ вертикальный лучъ, мы найдемъ, что чрезъ точку на прямой, равноотстоящую отъ луча съ точкою A, долженъ проходить лучъ, который выводится изъ a элементарнымъ вращеніемъ около луча, какъ около оси симметріи, а слѣдовательно такой параболоидъ есть ортогональный. Но если-бы въ примѣ оказались два параболоида съ общимъ вертикальнымъ лучомъ, то мы получили бы уже выведенную нами приму ортогональныхъ параболоидовъ.

Изъ изложеннаго сама собою вытекла особая геометрическая система, представленная секундою гиперболическихъ параболоидовъ съ горизонтальными направляющими. Экстраэлементами этой системы являются ортогональные параболоиды, въ совокупности образующіе линейную экстраприму, одинъ элементъ которой входитъ въ составъ каждой линейной примы вообще.

Полная совокупность лучей этой секунды образуетъ секунду лучей эллиптической коллинеаціи.

Эти гиперболическіе параболоиды сами по себѣ, какъ мы знаемъ, представляютъ линейныя примы лучей системы съ постояннымъ параметромъ въ видѣ горизонтальнаго экстралуча. Три луча этой секунды въ качествѣ сферопримы системы вполнѣ и однозначно опредѣляютъ нѣкоторый гиперболоидъ.

Конечно, мы можемъ раздѣлить полную секунду нетолько на линейныя примы, сферопримы, но и на разныя другія совокупности. Для насъ особенно интересно задаться вопросомъ о совокупностяхъ лучей, равно наклоненнымъ къ вертикальному лучу (а слѣдовательно и центральной плоскости).

Но вѣдь таковыми являются совокупности, пересѣкающія экстраплоскость въ концентрическихъ кругахъ, и центромъ этихъ круговъ служитъ экстраточка вертикальнаго луча; а такъ какъ экстраплоскости гомологична центральная плоскость, и притомъ экстраточкамъ послѣдней гомологичны тоже экстраточки, то системы точекъ на этихъ плоскостяхъ связаны не только коллинеарностью, но и ближайшимъ сродствомъ (кристаллографическою проективностью [1]); въ частности, прима концентрическихъ круговъ преобразуется въ приму концентрическихъ эллипсовъ [2]).

Мы разсмотрѣли случай, когда эллиптическая коллинеація опредѣляется тремя лучами, на одномъ изъ которыхъ дана эллиптическая инволюція.

Задача опредѣленія таковой четырьмя произвольными (непересѣкающимися) лучами сводится къ предъидущей, если принять во вниманіе слѣдующее. Если изъ четырехъ данныхъ лучей 1, 2, 3, 4 на 1 возьмемъ произвольную точку и изъ нея проведемъ двѣ плоскости чрезъ лучи 2 и 3, то на лучѣ 4 получимъ въ пересѣченіи пару сопряженныхъ точекъ инволюціи. Получивъ другую пару, мы сейчасъ увидимъ, будетъ ли инволюція на лучѣ 4 гиперболическая или эллиптическая. Въ первомъ случаѣ получается гиперболическая, во второмъ эллиптическая коллинеація.

Наконецъ, если даны два луча съ нанесенными на нихъ эллиптическими инволюціями съ парами мнимыхъ двойныхъ точекъ A съ A′ и B съ B′, то прежде всего мы на нихъ опредѣляемъ центры инволюціи, и прямая, проходящая чрезъ эти центры, принадлежитъ центральной плоскости коллинеаціи. Той же плоскости должны быть параллельны; или прямыя AB и A′B′ или прямыя AB′ и A′B. Эти единственныя два возможныя допущенія приводятъ по этимъ даннымъ къ двумъ рѣшеніямъ, аналогично тому, что мы имѣемъ и для гиперболической коллинеаціи. Въ обоихъ случаяхъ мы получаемъ опредѣленную центральную плоскость и опредѣленный единственный экстралучъ секунды; такимъ образомъ получаемъ и три луча съ инволюціями на нихъ.

Спеціально мы можемъ опредѣлить коллинеацію двумя осями безъ всякихъ инволюцій. Если оси, точки коихъ есть вещественныя двойныя точки всѣхъ инволюцій, мы назовемъ вещественными, а оси изотропныхъ (съ перпендикулярными мнимыми парами) инволюцій назовемъ мнимыми, то полу-

[1]) Напомню, что кристаллографическою проективною отмѣчаются лишь общія случаи средства (Affinität) и исключаются спеціальныя.

[2]) Конечно, это одинаково имѣетъ мѣсто и для гиперболической коллинеаціи.

чимъ, что всякая осевая коллинеація можетъ быть опредѣлена парою осей, вещественною или мнимою.

Двѣ вещественныя оси могутъ пересѣкаться (и тогда секунда лучей становится полною секундою прямыхъ на плоскости), но не могутъ сливаться. Двѣ мнимыя оси не могутъ пересѣкаться, но могутъ сливаться, и тогда двойная мнимая ось опредѣляетъ секунду лучей, распадающуюся на приму совокупностей производящихъ конаксіальныхъ однополыхъ гиперболоидовъ вращенія.