33. О минимальной задачѣ въ теоріи дифференціальныхъ уравненій колебаній упругаго неоднороднаго стержня.

Н. М. Крылова.

(Доложено 9-го Сентября 1915)

Вопросъ о существованіи т. н. „фундаментальныхъ функцій“ для дифференціальныхъ уравненій высшихъ порядковъ былъ предметомъ изслѣдованія цѣлаго ряда работъ [1]), но безъ сомнѣнія возможна и дальнѣйшая его обработка въ смыслѣ примѣненія различныхъ методовъ къ его рѣшенію.

Настоящая статья представляетъ попытку обобщенія метода американскаго геометра Max Mason'a *), изложеннаго имъ для дифф. уравненія 2-го порядка, на случай дифференціальныхъ уравненій 4-го порядка, къ котор. приводится, какъ извѣстно, вопросъ о колебаніяхъ упругаго неоднороднаго стержня.

Предполагая для простоты **) дальнѣйшихъ выкладокъ сопротивленіе изгибу стержня постояннымъ, а самый стержень защемленнымъ на обоихъ концахъ ***), займемся такимъ образомъ вопросомъ о существованіи фундаментальныхъ функцій, т. е. рѣшеній, не тождественно равныхъ нулю, дифференц. уравненія 4-го порядка:

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \lambda\varphi(x)y = 0,$$

при слѣдующихъ условіяхъ:

$$y(a) = 0;\ y'(a) = 0;\ y(b) = 0;\ y'(b) = 0$$

на концахъ интервала a и b, иными словами, на концахъ стержня.

Подобныя рѣшенія могутъ, какъ извѣстно, существовать только при нѣкоторыхъ опредѣленныхъ значеніяхъ параметра λ, т. н. „особенныхъ“ значеніяхъ (valeurs singulières), являющихся корнями нѣкотораго трансцендентнаго уравненія $\Delta(\lambda) = 0$; извѣстно также, что эти „особенныя“ рѣшенія будутъ ортогональны при функціи $\varphi(x)$, т. е.

$$(2)\quad \int_a^b \varphi(x)\ y_m(x)\ y_n(x)dx = 0,$$

если $m \neq n$ и кромѣ того, будучи опредѣлены съ точностью до постояннаго множителя, могутъ быть также нормированы, т. е.

$$(3)\quad \int_a^b \varphi(x)\ y_m^2\ dx = 1;$$

послѣднее ясно изъ того, что умножая

$$\frac{d^4y_n}{dx^4} - \lambda_n\varphi(x)y_n = 0$$

на y_n, интегрируя по частямъ и принимая во вниманіе граничныя условія, легко получимъ:

$$\lambda_n \int_a^b \varphi(x)y_n^2 dx = \int_a^b y_n \frac{d^4y_n}{dx^4}\,dx = \int_a^b \left[\frac{d^2y_n}{dx^2}\right]^2 > 0,$$

что при $\lambda_n > 0$, дастъ намъ (3).

Такъ какъ ниже приводимое доказательство существованія n-ой фундаментальной функціи $y_n(x)$, зная $y_1(x), \ldots y_{n-1}(x)$, совершенно тождественно съ доказательствомъ существованія $y_1(x)$, то желая разомъ доказать существованіе безчисленнаго множества фундаментальныхъ функцій, приступимъ къ соотвѣтствующей минимальной задачѣ такимъ образомъ:

---

[1]) См. работы Стеклова, Dini, Davidouglou, Tamarkine, Birkhoff, Picone, Miller, Westffall, а также и автора настоящей статьи.

*) См. Jransaction of the Amerikan Math. Society (1906—1910).

**) можно было-бы не дѣлать этого упрощающаго выкладки предположенія.

***) возможно разсмотрѣніе и другихъ граничныхъ условій, что могло-бы составить тему для особой статьи.

Пусть λ_n будетъ нижнимъ предѣломъ значеній интеграла

$$(4)\quad I = \int_a^b \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]^2 dx,$$

для функцій $y(x)$, обладающихъ 4 первыми производными и удовлетворяющихъ слѣдующимъ условіямъ

$$(5)\quad \begin{cases} 5\alpha) \quad y(a)=0;\ y(b)=0;\ y'(a)=0;\ y'(b)=0. \\ 5\beta) \quad \int_a^b \varphi(x)\ y(x)^2\ dx = 1. \\ 5\gamma) \int_a^b \varphi(x) y(x)\ y_i(x)\ dx = 1, \text{при } i=1,2,3\ .\ n-1. \end{cases}$$

Подъ знакомъ интеграла (4) имѣется положительная величина, потому нижній предѣлъ для значеній I безусловно существуетъ, но послѣ извѣстной критики Weierstrass'a доказательства Riemann'a, относящагося къ установленію т. н. „принципа Dirichlet", нельзя разумѣется à priori утверждать существованіе такой функціи, которая, удовлетворяя всѣмъ условіямъ (5), дастъ интегралу I значеніе λ_n.

Въ дальнѣйшемъ однако будетъ показано, что для $\lambda = \lambda_n$ будетъ существовать рѣшеніе исходнаго дифф. уравненія, удовлетворяющее заданнымъ граничнымъ условіямъ и независимое отъ извѣстныхъ рѣшеній y_i $(i = 1, 2\ \ldots\ n-1)$, т. е., другими словами, будетъ доказано, что нижній предѣлъ значеній I будетъ „особеннымъ" значеніемъ параметра, т. е. корнемъ уравненія $\Delta(\lambda) = 0$, причемъ окажется, что эта новая нормальная функція дастъ интегралу I именно значеніе λ_n, т. е. представитъ собою рѣшеніе поставленной минимальной задачи.

Приступая къ доказательству. обозначимъ черезъ

$$(6)\quad v_1(x),\ v_2(x),\ v_3(x)\ \ldots\ v_i(x)\ \ldots$$

безконечный рядъ функцій, удовлетворяющихъ условіямъ (5), обладающихъ производными четвертаго порядка и образующими т. наз. „минимизирующую" послѣдовательность для выше поставленной минимальной задачѣ, т. е. другими словами, $v_i(x)$ будутъ тѣми функціями, для которыхъ:

$$(6_1)\quad \lim_{i=\infty} \int_a^b \left[\frac{d^2v_i(x)}{dx^2}\right]^2 dx = \lambda_n.$$

Въ дальнѣйшемъ намъ понадобится такая формула:

$$(7)\quad \lim_{i=\infty} \int_a^b f_i v_i dx = 0,$$

гдѣ

$$(7_1)\quad f_i = v_i^{(IV)}(x) - \lambda_n \varphi(x)\ v_i(x);$$

умножая (7_1) на $v_i(x)$, интегрируемъ въ правой части по частямъ; тогда, принимая во вниманіе граничныя условія для $v_i(x)$, а равно и нормированность этихъ функцій при $\varphi(x)$, получимъ:

$$\int_a^b f_i(x)\ v_i(x)\ dx = \int_a^b \left[\frac{d^2v_i}{dx^2}\right]^2 dx - \lambda_n,$$

что, въ силу соотношенія (6_1), даетъ намъ искомую формулу (7).

Замѣтивъ это, предположимъ, что λ_n не будетъ особенной величиной, отличной отъ $\lambda_1, \lambda_2\ \ldots\ \lambda_{n-1}$, тогда очевидно одно изъ двухъ, либо λ_n совсѣмъ не будетъ особенной величиной, либо она совпадаетъ съ одной изъ извѣстныхъ величинъ $\lambda_1, \lambda_2\ \ldots\ \lambda_{n-1}$, въ первомъ случаѣ, при всякомъ f существуетъ очевидно рѣшеніе, удовлетворяющее граничнымъ условіямъ, уравненія:

$$(8)\quad \frac{d^{IV}y}{dx^4} - \lambda_n \varphi(x)\ y(x) = f(x);$$

во второмъ-же случаѣ, какъ легко убѣдиться, подобное рѣшеніе существуетъ только въ томъ случаѣ, если

$$(8_1)\quad \int_a^b f(x)\ y_k(x)\ dx = 0,$$

гдѣ k означаетъ индексъ той „особенной" величины, съ которой совпадаетъ λ_n; соотношеніе (8_1) легко получается изъ элементарныхъ соображеній, изыскивая условіе, при которомъ интегралъ уравненія (8), образованный методомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, удовлетворяетъ граничнымъ условіямъ фундаментальныхъ функцій, и одинъ изъ интеграловъ однороднаго уравненія, взятый для его образованія, удовлетворяетъ граничнымъ условіямъ;—но его легко также понять изъ связи уравненія (8) съ общимъ методомъ Schwarz-Poincaré-Stekloff'a; въ самомъ дѣлѣ, $\int_a^b f(x)\ y_k(x)\ dx$ будетъ вычетомъ интеграла ур. (8), т. е, коефиціентомъ при $\frac{1}{\lambda - \lambda_k}$, а потому онъ долженъ равняться нулю.

Обратимъ теперь вниманіе на то, что въ силу условій (5γ), соотношенія:

$$\int_a^b \varphi(x)\ y_i(x)\ v_h(x)\ dx = 0\ \ (i = 1, 2\ \ldots\ n-1)$$

имѣютъ мѣсто для всѣхъ значеній индекса h; это обстоятельство въ связи съ только что усмотрѣн-

нымъ соотношеніемъ (8_1), позволяетъ утверждать существованіе интеграла, удовлетворяющаго условіямъ (5α), уравненія:

$$(9)\qquad \frac{d^{(IV)}u_h}{dx^4} - \lambda_n\ \varphi(x)\ u_h = \varphi(x)\ v_h,$$

для всѣхъ значеній индекса h; эти-то рѣшенія, комбинированныя съ минимизирующими функціями v_h, и позволятъ доказать нелѣпость сдѣланнаго предположенія о томъ, что λ_n не есть особенная величина, отличная отъ $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}$.

Прежде всего замѣтимъ, что интегралы уравненія (9) удовлетворяютъ соотношеніямъ (5γ): въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненій (9) и

$$\frac{d^{(IV)}y_i}{dx^4} - \lambda_i\ \varphi(x)\ y_i = 0,$$

получимъ, умножая ихъ соотвѣтственно на y_i и u_h, принимая во вниманіе граничныя условія (5α) и вычитая почленно:

$$(\lambda_n - \lambda_i)\int_a^b \varphi(x)\ y_i(x)\ u_h(x)\ dx = \int_a^b \left[\frac{d^{(IV)}u_h(x)}{dx^4}\cdot y_i(x) - \frac{d^{(IV)}y_i(x)}{dx^4}\cdot u_h(x)\right] dx = 0;$$

такимъ образомъ, при $\lambda_n \neq \lambda_i$, имѣемъ

$$(10)\qquad \int_a^b \varphi(x)\ y_i(x)\ u_h(x)\ dx = 0,$$

что и т. д.; при $\lambda_n = \lambda_i$, вспомнимъ, что интегралы уравненія (9) будутъ очевидно $V_h + Ch\,y_i$, гдѣ V_h частное рѣшеніе уравненія (9) удовлетворяющее условіямъ (5α), и произвольными постоянными C_h распоряжаемся такъ, чтобы о п я т ь было удовлетворено условіе (10).

Замѣтивъ это, разсмотримъ теперь функцію $z_h = v_h + du_h$, (гдѣ $d = \text{const.}$), которая, удовлетворяя въ силу доказаннаго условіямъ (5α), (5γ), является очевидно интеграломъ такого уравненія:

$$(11)\qquad \frac{d^{IV}z_h}{dx^4} - \lambda_n\ \varphi(x)\ z_h(x) = f_h + d\varphi(x)v_h.$$

Умножая (11) на $v_h + du_h$, интегрируемъ отъ a до b, что даетъ намъ такое соотношеніе:

$$(12)\int_a^b \left[\frac{d^2z_h}{dx^2}\right]^2 - \lambda_n\int_a^b \varphi(x)\ z_h^2(x)\,dx = \int_a^b f_h\ v_h\,dx + d\int_a^b \left[f_h\ u_h + \varphi(x)\ v_h^2\right] dx + d^2\int_a^b \varphi(x)\ u_h\ v_h\ dx;$$

изъ уравненій, которымъ удовлетворяютъ u_h и v_h, получаемъ:

$$\int_a^b \left[f_h\ u_h - \varphi(x)\ v_h^2\right] dx = \int_a^b \left[\frac{d^{(IV)}u_h}{dx^4}\cdot v_h - \frac{d^{IV}v_h}{dx^4}\cdot u_h\right] dx = 0.$$

а потому

$$\int_a^b f_h\ u_h\ dx = \int_a^b \varphi(x)\ v_h^2 dx,$$

и слѣдовательно коэфиціентъ при d въ уравненіи (12) равенъ двумъ, т. к. v_h удовлетворяютъ условію (5β). Остается теперь показать, что коэфиціентъ при d^2 въ формулѣ (12) является ограниченнымъ при всѣхъ значеніяхъ индекса h, но это очевидно, ибо v_h полученъ методомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, а потому будетъ ограничено, если ограничено v_h, но

$$v_h = \int_a^x\int_a^x v_x''(x)\ dx^2 \leq (b-a)\int_a^b |v_h''(x)|\ dx \leq (b-a)^{3/2}\sqrt{\int_a^b v_h''^2\,dx} \leq (b-a)^{3/2}\sqrt{I(v_h)};$$

итакъ

$$\int_a^b \varphi(x)\ u_h\ v_h\ dx < K.$$

Обращаясь теперь снова къ формулѣ (12), получаемъ:

$$(13)\quad I(z_h) - \lambda_n\int_a^b \varphi(x)\ z_h^2\ dx \leq \int_a^b f_h v_h + 2d + d^2B;$$

выбирая теперь h такъ, чтобы

$$\left|\int_a^b f_h\ v_h\ dx\right| < 2d + d^2B,$$

что можно сдѣлать въ силу ранѣе доказаннаго, изъ (13) получимъ:

$$I(z_h) < \lambda_n\int_a^b \varphi(x)\ z_h^2\,dx.$$

Полагая

$$\int_a^b \varphi(x)\ z_h^2 dx = n^2,$$

убѣждаемся замѣной перемѣнныхъ $z = \frac{z_h}{n}$, что для z имѣетъ мѣсто соотношеніе:

$$I(z) < \lambda_n.$$

Такимъ образомъ, исходя изъ предположенія о томъ, что λ_n не есть особенная величина, отличная

отъ $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}$, мы пришли къ абсурдному положенію о возможности построить такую функцію z, которая, удовлетворяя всѣмъ условіямъ (5), дѣлаетъ I меньше λ_n, что невозможно по самому опредѣленію данному для λ_n.

Докажемъ теперь, что соотвѣтствующая λ_n фундаментальная функція, т. е. рѣшеніе уравненія

$$(14) \qquad y_n^{(\mathrm{IV})} - \lambda_n \varphi(x)\, y_n(x) = 0$$

и будетъ рѣшеніемъ поставленной минимальной задачи.

Для этого замѣтимъ, что y_n, какъ рѣшеніе ур. (14), удовлетворяетъ условіямъ (5α); кромѣ того ранѣе было уже замѣчено, что, умноженіемъ на надлежащую постоянную, всегда возможно удовлетворить соотношенію:

$$\int_a^b \varphi(x)\, y_n^2 dx = 1;$$

условіе (5γ) повѣряется легко, взявъ уравненія:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i^{(\mathrm{IV})}}{dx^4} - \lambda_i \varphi(x)\, y_i(x) = 0, \\ \dfrac{dy_n^{(\mathrm{IV})}}{dx^4} - \lambda_n \varphi(x)\, y_n(x) = 0, \end{cases}$$

умножая ихъ соотвѣтственно на y_n и y_i, интегрируя по частямъ и вычитая.

Наконецъ, умножая уравненіе (14) на $y_n(x)$, проинтегрируемъ отъ a до b;—получимъ

$$\lambda_n = \int_a^b \frac{dy_n^{(\mathrm{IV})}}{dx^4}\, y_n dx = \int_a^b \left[\frac{d^2 y_n}{dx^2}\right]^2 dx,$$

т. е. фундаментальная функція, удовлетворяя всѣмъ условіямъ (5), обращаетъ въ минимумъ интегралъ I, представляя рѣшеніе поставленной минимальной проблемы.

Все вышеизложенное позволяетъ утверждать справедливость такой теоремы: существуетъ безконечный рядъ возрастающихъ „особенныхъ“ положительныхъ *) величинъ λ_n, а также имъ соотвѣтствующихъ рѣшеній (фундаментальныхъ функцій) y_n дифференц. уравненія

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \lambda\, \varphi(x)\, y = 0,$$

удовлетворяющихъ граничнымъ условіямъ:

$$(\alpha) \qquad y(a) = 0;\ y'(a) = 0;\ y(b) = 0;\ y'(b) = 0.$$

Функція y_n удовлетворяетъ условіямъ:

$$(\beta) \int_a^b \varphi(x)\, y^2(x)\, dx = \pm 1, \int_a^b \varphi(x)\, y_i(x)\, y(x)\, dx = 0,$$

[гдѣ $i = \pm 1, \pm 2 \ldots \pm(n-1)$] *)

и среди всѣхъ функцій, для которыхъ имѣютъ мѣсто условія (α), (β), будетъ той, которая придаетъ интегралу

$$\mathrm{I} = \int_a^b \left[\frac{d^2 y}{dx^2}\right]^2$$

его наименьшее значеніе; величина этого минимума и будетъ $\pm\lambda_n$.

Таково обобщеніе метода Mason'a на случай дифф. уравненій 4-го порядка, встрѣчаемыхъ при изученіи вопроса о колебаніяхъ упругихъ стержней; совершенно ясно, что методъ этотъ непосредственно обобщается на случай дифф. уравненій высшихъ порядковъ; но такое обобщеніе представило бы мало интереса уже по одному отсутствію для дифф. уравненій (выше четвертаго порядка) соотвѣтствующей физической интерпретаціи.

Интересъ представляетъ наоборотъ обобщеніе метода Mason'a, изложеннаго имъ въ примѣненіи къ простѣйшимъ типамъ дифф. уравненій, на случай дифф. урав. болѣе общихъ типовъ, — наприм. тѣхъ, которые составили предметъ изслѣдованій проф. Стеклова и Richardson'a; этимъ мы намѣрены заняться въ слѣдующей статьѣ.

Въ заключеніе скажемъ нѣсколько словъ, съ точки зрѣнія метода Mason'a, относительно разложенія т. н. произвольныхъ функцій въ ряды, расположенные по фундаментальнымъ функціямъ задачи колебанія упругаго неоднороднаго стержня; вопросъ этотъ былъ трактованъ въ работахъ Dawidoglou, Myller'a, Тамаркина и автора настоящей статьи, безъ примѣненія т. н. ассимптотическихъ

*) Въ томъ случаѣ, когда $\varphi(x)$ мѣняетъ знакъ въ интервалѣ (a, b), такимъ же анализомъ удостовѣримся въ существованіи безконечнаго числа отрицательныхъ «особенныхъ» значеній параметра λ_{-n}; надлежитъ только при доказательствѣ условіе $\int_a^b \varphi(x)\, y(x)^2\, dx = 1$ замѣнить другимъ: $\int_a^b \varphi(x)\, y^2 dx = -1$.

*) знакъ — относится къ тому случаю, когда $\varphi(x)$ мѣняетъ знакъ въ интервалѣ (a,b).

выраженій, причемъ тождественный [1]) результатъ **) можетъ быть, какъ увидимъ это далѣе, полученъ также примѣненіемъ метода Mason'a. Оригинальность метода заключается собственно въ особомъ доказательствѣ того положенія, что абсолютно и равномѣрно сходящійся рядъ, типа Fourier, расположенный по фундаментальнымъ функціямъ дѣйствительно представляетъ функцію, данную для разложенія, и лишь для цѣльности изложенія напомнимъ теорему *): ряд ъ типа Fourier, расположенный по фундаментальнымъ функціямъ задачи колебанія закрѣпленнаго неоднороднаго стержня, сходится абсолютно и равномѣрно для всякой функціи, обладающей 2-мя первыми производными и удовлетворяющей граничнымъ условіямъ (α). Остается слѣдовательно показать, на основаніи минимальныхъ свойствъ фундаментальныхъ функцій, что рядъ

$$(14)\qquad \Sigma\, a_i\, y_i,\ \text{гдѣ}\ a_i = \int_a^b f(x)\ \varphi(x)\ y_i(x)\ dx,$$

дѣйствительно представляетъ функцію, данную для разложенія.

Для этого замѣчая, что рядъ (14) сходится равномѣрно, составимъ разность

$$(15)\qquad f(x) - \Sigma\, a_i\ y_i(x) = p(x),$$

представляющую собой очевидно непрерывную функцію; умножая уравненіе (15) на $\varphi\ (x)\ y_i\ (x)$, интегрируемъ въ предѣлахъ отъ a до b (на что имѣемъ право); это приведетъ къ соотношенію

$$(16)\qquad \int_a^b \varphi(x)\, p(x)\, y_i(x)\ dx = 0\ \text{(при всякомъ } i),$$

которое послужитъ къ доказательству равенства $p\ (x) = 0$, т. е. къ доказательству того, что рядъ (14) дѣйствительно представляетъ $f\ (x)$.

[1]) Въ работахъ Dawidouglou (Annales de l'École Normale) и Myller'a на произвольную функцію накладывались болѣе ограничительныя условія, а именно существованіе 4-хъ первыхъ производныхъ.

**) Надлежитъ однако замѣтить, что примѣненіе ассимптотическихъ выраженій позволило Birkhoff'y и Тамаркину въ дальнѣйшихъ работахъ найти болѣе общія условія разложенія, аналогичныя таковымъ-же для случая разложенія въ тригонометр. ряды.

*) Tamarkine: Application de la méthode des fonctions fondamentales..." 1910. Извѣстія Харьк. Мат. Общества.

Kryloff. Sur le problème des vibrations transversales des verges l'élastiques. 1909. Rendiconti della Accademia dei Lincei. Roma.

Kryloff. Sur les développements en série des fonctions..." 1910. Кіевскія Университ. Извѣстія.

Для этого покажемъ прежде всего, слѣдуя методу Mason'a, что предположеніе $p\ (x) \not\equiv 0$ позволяетъ утверждать существованіе такой функціи $y\ (x)$, обладающей непрерывными производными, для которой удовлетворены всѣ условія:

$$(17\alpha)\qquad y(a),\ y'(a) = 0;\ y'(a) = 0;\ y'(b) = 0;$$

$$(17b)\qquad \int_a^b \varphi(x)\ y_i(x)\ y(x)\ dx = 0\ \ (i = 1,2\ .\ .\ .\ n);$$

$$(17c)\qquad \int_a^b \varphi(x)\ y^2(x)\ dx = 1.$$

Размотримъ для этого функцію $u\ (x)$ удовлетворяющую уравненію

$$\frac{d^4u}{dx^4} = \varphi(x)\ p(x),$$

условіямъ: $u\ (a) = 0;\ u'\ (a) = 0;\ u\ (b) = 0;\ u'\ (b) = 0$ и обладающую очевидно 4-мя первыми производными.

Имѣя также

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \lambda_i\ \varphi(x)\ y_i,$$

обычной комбинаціей, получимъ въ силу (16):

$$\int_a^b \left[\frac{d^4y}{dx^4}\ y_i - \frac{d^4u}{dx^4}\ u\right] dx = -\lambda_i \int_a^b p(x)\, y_i(x)\, u(x)\, dx = 0.$$

т. е. функція $u\ (x)$ удовлетворяетъ условію 17b) и умножая ее на соотвѣтствующій постоянный множитель, приведемъ къ исполненію также и условіе 17c), если только не имѣетъ мѣсто

$$(18)\qquad \int_a^b \varphi(x)\ u^2(x)\ dx = 0;$$

предполагая же выполненными (18), разсмотримъ интегралъ уравненія:

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \varphi(x)\ u(x)$$

при тѣхъ-же граничныхъ условіяхъ; тѣмъ-же разсужденіемъ убѣдимся, что интегралъ этотъ удовлетворяетъ условіямъ 17b) и 17c), если только не имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$\int_a^b \varphi(x)\ v^2(x)\ dx = 0;$$

предполагая-же его выполненнымъ, разсмотримъ разность

$$w = u - v,$$

которая очевидно удовлетворяетъ условіямъ 17*b*), граничнымъ условіямъ 17*a*), но для которой

$$\int_a^b \varphi(x)\ w^2(x)\ dx = -2\int_a^b \varphi(x)\ u(x)\ v(x)\ dx =$$

$$= -2\int_a^b v(x)\ \frac{d^4v}{dx^4}\ dx = -2\int_a^b \left[\frac{d^2v}{dx^2}\right]^2 dx \neq 0;$$

слѣдовательно надлежащимъ умноженіемъ на постоянную можетъ быть для w выполнено и условіе 17*c*), чѣмъ доказано существованіе искомой функціи y, которая удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ (17).

Замѣчая же теперь, что т. к. $lim\ \lambda_n = \infty$, убѣждаемся въ томъ, что при достаточно большомъ n, интегралъ

$$n=\infty$$

$$\int_a^b \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]^2 dx \tag{19}$$

будетъ меньше λ_n.

Итакъ функція $y(x)$, удовлетворяя всѣмъ условіямъ той минимальной задачи, рѣшеніемъ которой является λ_n, дѣлаетъ интегралъ (19) меньше λ_n, что невозможно по самому опредѣленію λ_n; слѣдовательно $p(x) = 0$, а потому и

$$f(x) = \Sigma\ a_i y_i(x),$$

что и тр. док.

Колгановка
1915 г.
6—8 Августа.