Х. Д. Н. Артемьевъ. Соотношенія между символами граней и реберъ въ кристаллахъ гипогексагональнаго типа.

Какъ извѣстно изъ элементарнаго курса кристаллографіи [1]), для опредѣленія символа $[r_0\ r_1\ r_2\ r_3]$ оси пояса гексагонально-изотропнаго комплекса по символамъ двухъ не параллельныхъ между собой граней $(p_0\ p_1\ p_2\ p_3)$ и $(q_0\ q_1\ q_2\ q_3)$ принадлежащихъ этому поясу, можно воспользоваться слѣдующимъ пріемомъ. Принимая во вниманіе только три первые индекса символовъ граней, находимъ: $\begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{vmatrix} = [s_0\ s_1\ s_2]$. Числа s_0, s_1 и s_2 представляютъ собою *субъиндексы* символа $[r_0\ r_1\ r_2\ r_3]$, причемъ связь индексовъ r_0, r_1, r_2 съ s_0, s_1 и s_2 устанавливается уравненіями:

$$r_0 : r_1 : r_2 = 2s_0 : (2s_1 + s_2) : (s_1 + 2s_2) \quad \ldots \quad 1)$$
$$s_0 : s_1 : s_2 = 3r_0 : (4r_1 - 2r_2) : (-2r_1 + 4r_2) \quad \ldots \quad 2)$$

Опредѣляя по уравненію 2) r_0, r_1 и r_2, мы легко можемъ найти r_3 зная, что $r_3 = r_2 - r_1$ . . 3).

Нахожденіе индексовъ символа ребра по субъиндексамъ, и обратно, на основаніи рѣшенія уравненій 1) и 2) совершенно аналогично рѣшенію вопросовъ при помощи подобныхъ же уравненій въ случаѣ перемѣны координатъ. Благодаря полной аналогіи такихъ уравненій мы можемъ представить связь, существующую между индексами и субъиндексами въ видѣ детерминантовъ: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ — для преобразованія субъиндексовъ въ индексы и $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \bar{2} \\ 0 & \bar{2} & 4 \end{vmatrix}$ — для опредѣленія субъиндек-

[1]) Е. С. Федоровъ. — Курсъ кристаллографіи. Спб. 1901 г. стр. 252.

совъ по индексамъ. Принимая во вниманіе 1-й, 3-й и 4-й индексы символовъ граней, мы получаемъ совершенно аналогичныя 1) и 2) уравненія:

$$r_0 : r_2 : r_3 = 2s_0' : (2s_2' + s_3') : (s_2' + 2s_3') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$
$$s_0' : s_2' : s_3' = 3r_0 : (4r_2 - 2r_3) : (4r_3 - 2r_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5).$$

Уравненію 4) соотвѣтствуетъ детерминантъ: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, а уравненію 5) — детерминантъ: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \bar{2} \\ 0 & \bar{2} & 4 \end{vmatrix}$.

Если мы составимъ подобныя уравненія по первому, второму и четвертому индексамъ символовъ взятыхъ граней, т. е. по $\begin{vmatrix} p_0, & p_1, & p_3 \\ q_0, & q_1, & q_3 \end{vmatrix} = [s_0'' \; s_1'' \; s_3'']$, то получимъ два слѣдующихъ выраженія:

$$r_0 : r_1 : r_3 = 2s_0'' : (2s_1'' - s_3'') : (2s_3'' - s_1'') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6)$$
$$s_0'' : s_1'' : s_3'' = 3r_0 : (4r_1 + 2r_3) : (2r_1 + 4r_3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

Уравненію 6) соотвѣтствуетъ детерминантъ преобразованія: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \bar{1} \\ 0 & \bar{1} & 2 \end{vmatrix}$, а уравненію 7) — детерминантъ: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

При болѣе внимательномъ разсмотрѣніи уравненій 2), 5) и 7) не трудно убѣдиться, что эти уравненія составляются въ предположеніи существованія только 3-хъ векторовъ [2]), причемъ четвертый векторъ принимается равнымъ нулю. Вслѣдствіе этого, мы тѣ же уравненія можемъ представить въ видѣ:

$$2') \; s_0 : s_1 : s_2 : O = 3r_0 : (4r_1 - 2r_2) : (-2r_1 + 4r_2) : \quad O \quad \ldots\ldots\ldots \; 2')$$
$$5') \; s_0' : O : s_2' : s_3' = 3r_0 : \quad O \quad : (4r_2 - 2r_3) : (-2r_2 + 4r_3). \quad \ldots\ldots\ldots \; 5')$$
$$7') \; s_0'' : s_1'' : O : s_3'' = 3r_0 : (4r_1 + 2r_3) : \quad O \quad : (2r_1 + 4r_3). \quad \ldots\ldots\ldots \; 7')$$

Складывая почленно эти уравненія, получаемъ:

$$(s_0 + s_0' + s_0'') : (s_1 + s_1'') : (s_2 + s_2') : (s_3' + s_3'') = \frac{9}{2} r_0 : (4r_1 - r_2 + r_3) : (4r_2 - r_1 - r_3) : (4r_3 - r_2 + r_1).$$

Принимая во вниманіе уравненіе 3) и произведя соотвѣтственныя подстановки и сокращенія, получаемъ:

$$(s_0 + s_0' + s_0'') : (s_1 + s_1'') : (s_2 + s_2') : (s_3' + s_3'') = \tfrac{3}{2} r_0 : r_1 : r_2 : r_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

Вставляя въ уравненіе 8) вмѣсто величинъ s ихъ выраженія посредствомъ индексовъ $(p_0, p_1\, p_2\, p_3)$ и $(q_0\, q_1\, q_2\, q_3)$, получаемъ: $\left\{\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ q_1 & q_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix}\right\} : \left\{\begin{vmatrix} p_2 & p_0 \\ q_2 & q_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_3 & p_0 \\ q_3 & q_0 \end{vmatrix}\right\} : \left\{\begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_3 & p_0 \\ q_3 & q_0 \end{vmatrix}\right\} : \left\{\begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ q_0 & q_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{vmatrix}\right\} = \frac{3}{2} r_0 : r_1 : r_2 : r_3$, или въ окончательномъ видѣ: $\begin{vmatrix} 1 & \bar{1} & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} \bar{1} & 1 & 0 \\ p_2 & p_3 & p_0 \\ q_2 & q_3 & q_0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ p_3 & p_0 & p_1 \\ q_3 & q_0 & q_1 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 0 & 1 & \bar{1} \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} (r_0 : r_1 : r_2 : r_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9)$.

Такимъ образомъ, лѣвая часть уравненія 9) представляетъ собою отношеніе миноровъ детерминанта: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \bar{1} & 1 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}$, разложеннаго по первой строкѣ.

Уравненіе 9) даетъ общую связь между символами двухъ не параллельныхъ между собой граней и символомъ ребра ихъ пересѣченія для всѣхъ вообще гексагоналоидныхъ кристалловъ, такъ какъ всѣ вышеприведенныя соотношенія сохранятъ свое значеніе и послѣ гомогенныхъ деформацій, которымъ мы должны подвергнуть гексагонально-изотропный комплексъ для вывода изъ него комплексовъ другихъ сингоній. Замѣняя въ уравненіи 9) символы граней символами реберъ, а символы реберъ символами граней, мы можемъ по тому же уравненію опредѣлить символъ грани пересѣченія двухъ поясовъ, если извѣстны символы ихъ осей.

---

[2]) Ср. Е. С. Федоровъ.—Построеніе реберъ по символамъ въ кристаллахъ гипогексагональнаго типа. Зап. Горн. Инст. Т. IV, стр. 321.

Изъ уравненій 3) и 9) мы можемъ составить слѣдующія выраженія:

$$\begin{vmatrix}2&0&0\\p_0&p_1&p_2\\q_0&q_1&q_2\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}0&2&1\\p_0&p_1&p_2\\q_0&q_1&q_2\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}0&1&2\\p_0&p_1&p_2\\q_0&q_1&q_2\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}0&\bar{1}&1\\p_0&p_1&p_2\\q_0&q_1&q_2\end{vmatrix} = r_0 : r_1 : r_2 : r_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 10)$$

$$\begin{vmatrix}2&0&0\\p_0&p_2&p_3\\q_0&q_2&q_3\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}0&1&\bar{1}\\p_0&p_2&p_3\\q_0&q_2&q_3\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}0&2&1\\p_0&p_2&p_3\\q_0&q_2&q_3\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}0&1&2\\p_0&p_2&p_3\\q_0&q_2&q_3\end{vmatrix} = r_0 : r_1 : r_2 : r_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 11)$$

$$\begin{vmatrix}2&0&0\\p_0&p_1&p_3\\q_0&q_1&q_3\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}0&2&\bar{1}\\p_0&p_1&p_3\\q_0&q_1&q_3\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}0&1&1\\p_0&p_1&p_3\\q_0&q_1&q_3\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}0&\bar{1}&2\\p_0&p_1&p_3\\q_0&q_1&q_3\end{vmatrix} = r_0 : r_1 : r_2 : r_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 12)$$

Изъ уравненій 10), 11) и 12) само собой вытекаетъ доказательство правильности высказаннаго выше утвержденія о полной аналогіи уравненій 1), 2), 4)—7). съ уравненіями, служащими для выраженія связи между индексами символовъ въ случаѣ перемѣны координатъ.

Привожу здѣсь одинъ примѣръ вычисленій по даннымъ выше уравненіямъ 9) и 10):

Опредѣлить ось пояса граней $(110\bar{1})$ и $(10\bar{1}\bar{1})$.

По уравненію 9) имѣемъ:

$$\begin{vmatrix}1&\bar{1}&1\\1&0&\bar{1}\\0&\bar{1}&\bar{1}\end{vmatrix} : -\begin{vmatrix}\bar{1}&1&0\\0&\bar{1}&1\\\bar{1}&\bar{1}&1\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}1&0&1\\\bar{1}&1&1\\\bar{1}&1&0\end{vmatrix} : -\begin{vmatrix}0&1&\bar{1}\\1&1&0\\1&0&\bar{1}\end{vmatrix} = \frac{3}{2} r_0 : r_1 : r_2 : r_3 = \bar{3} : 1 : \bar{1} : \bar{2},$$ откуда $r_0 : r_1 : r_2 : r_3 = \bar{2} : 1 : \bar{1} : \bar{2}.$

По уравненію 10) имѣемъ:

$$\begin{vmatrix}2&0&0\\1&1&0\\1&0&\bar{1}\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}0&2&1\\1&1&0\\1&0&\bar{1}\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}0&1&2\\1&1&0\\1&0&\bar{1}\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}0&\bar{1}&1\\1&1&0\\1&0&\bar{1}\end{vmatrix} = r_0 : r_1 : r_2 : r_3 = \bar{2} : 1 : \bar{1} : \bar{2}.$$

Сравнивая полученный символъ оси пояса съ символомъ грани, перпендикулярной къ этой оси въ гексагонально-изотропномъ комплексѣ, видимъ, что такая грань дѣйствительно имѣетъ символъ $(\bar{2}1\bar{1}\bar{2})$.

10 декабря 1914 года.