Краткія сообщенія.

VIII. Е. С. Федоровъ. Важная формула Миллера.

Ю. В. Вульфъ любезно обратилъ мое вниманіе на весьма маленькій, но образцовый учебникъ Миллера A Tract on crystallography, вышедшій въ Кембриджѣ въ 1863 году. Это книжечка всего въ 86 страницъ, но тутъ нетолько перечислены и изображены главнѣйшія формы кристаллографіи, но, что для нея особенно характерно, приведены и выведены главнѣйшія формулы для вычисленій, и притомъ по той оригинальной для автора системѣ, въ которой преобладаютъ двойныя (ангармоническія) отношенія. Формулы Миллера впервые ввели въ практику вычислительной кристаллографіи начала новой геометріи, хотя еще ихъ выводъ цѣликомъ основывается на формулахъ плоской и сферической тригонометріи.

Впослѣдствіи, особенно при посредствѣ Geometrische Kristallographie Либиша, эта система получила дальнѣйшее развитіе, вылившись окончательно въ формулы сферической тетрагонометріи.

Прежде всего на русскомъ языкѣ значительная часть уже раньше и вновь выведенныхъ формулъ появилась въ моихъ этюдахъ по аналитической кристаллографіи (особенно во второмъ этюдѣ).

Но, просматривая формулы, выведенныя въ упомянутомъ маленькомъ учебникѣ, я нашелъ одну, которая можетъ служить существеннымъ дополненіемъ къ формуламъ сферической тетрагонометріи и во всякомъ случаѣ заслуживаетъ быть сохраненною отъ забвенія [1]).

Эта формула выведена на стр. 5 этой книжки. Привожу ея выводъ, какъ онъ сдѣланъ самимъ авторомъ, лишь съ обозначеніями тѣми буквами, значеніе которыхъ пояснено на діаграммѣ № 2 на стр. 381 статьи «Основныя формулы сферической тетрагонометріи» [2]).

Итакъ, пусть въ исходномъ поясѣ даны полюсы a и b исходныхъ и еще полюсъ x какой-нибудь грани, а также полюсъ c нѣкоторой произвольной грани, не находящейся въ томъ же поясѣ. Изъ трехугольника axc выводимъ

$$\cos(ac) = \cos(ax)\cos(cx) + \sin(ax)\sin(cx)\cos(axc)$$
$$\cos(bc) = \cos(bx)\cos(cx) + \sin(bx)\sin(cx)\cos(bxc).$$

Умножая первую строчку на $\sin(bx)$, а вторую на $\sin(ax)$ и замѣчая, что $\cos(axc) + \cos(bxc) = 0$, а также что $\cos(ax)\sin(bx) + \cos(bx)\sin(ax) = \sin(ab)$, находимъ

$$\cos(ac)\sin(bx) + \cos(bc)\sin(ax) = \cos(cx)\sin(ab) \quad \text{A)}$$

Эта формула весьма напоминаетъ формулу 8) сферической тетрагонометріи, то есть

$$\operatorname{cotg} B \sin(ax) - \operatorname{cotg} A \sin(bx) = \operatorname{cotg} X \sin(ab)$$

и служитъ важнымъ дополненіемъ къ выведенному циклу формулъ.

Замѣчу, что при иномъ условіи отсчета угловъ A, B и X, а именно, всегда считая эти углы въ одномъ направленіи отъ исходнаго пояса, мы придадимъ этой формулѣ видъ

$$\operatorname{cotg} A.\ \sin(bx) + \operatorname{cotg} B.\ \sin(ax) = \operatorname{cotg} X \sin(ab)$$

и тогда сходство обѣихъ формулъ выражается еще рѣзче.

Мы еще усилимъ выраженіе сходства этихъ формулъ, если примемъ во вниманіе отношенія

$$\sin A : \sin X = \sin(cx) : \sin(ac) \text{ и}$$
$$\sin B : \sin X = \sin(cx) : \sin(bc)$$

и произведемъ по нимъ преобразованіе, приводящее къ виду

$$\frac{\cos A}{\sin X.\ \sin(cx)}\sin(ac)\sin(bx) + \frac{\cos B}{\sin X\ \sin(cx)}\sin(bc)\sin(ax) = \operatorname{cotg} X \sin(ab),$$

то есть

$$\cos A.\ \sin(ac)\sin(bx) + \cos B \sin(bc)\sin(ax) = \cos X \sin(cx)\sin(ab).$$

Сопоставимъ ее съ формулою A) Миллера

$$\cos(ac)\sin(bx) + \cos(bc)\sin(ax) = \cos(cx)\sin(ab)$$

и замѣтимъ, что если изъ c опустимъ сферическій перпендикуляръ на сферическую прямую (ab) и означимъ одно изъ основаній этого перпендикуляра буквою p, то получимъ

$$\operatorname{tang}(ac)\cos A = \operatorname{tang}(ap);\ \operatorname{tang}(bc)\cos B = \operatorname{tang}(bp)$$
$$\text{и } \operatorname{tang}(cx)\cos X = \operatorname{tang}(px),$$

а потому формулѣ можно еще придать видъ

$$\operatorname{tang}(ap)\cos(ac)\sin(bx) + \operatorname{tang}(bp)\cos(bc)\sin(ax) = \operatorname{tang}(px)\cos(cx)\sin(ab).$$

Обозначивъ, ради краткости, три члена формулы Миллера соотвѣтственно чрезъ a, b, c, а три тангенса въ послѣдней формулѣ соотвѣтственно чрезъ t_1, t_2, t_3, получаемъ

$$a + b = c \text{ (формула Миллера)}$$
$$t_1 . a + t_2 . b = t_3\ c \text{ (формула 8 въ новомъ видѣ).}$$

Изъ нихъ выводимъ $t_1 . a + t_2 . b = t_3\ (a + b)$

или $a\ (t_1 - t_3) = -b\ (t_2 - t_3)$, то есть $\frac{a}{b} = \frac{t_3 - t_2}{t_1 - t_3}$

или $$\frac{\cos(ac).\sin(bx)}{\cos(bc).\sin(ax)} = \frac{\operatorname{tang}(px) - \operatorname{tang}(bp)}{\operatorname{tang}(ap) - \operatorname{tang}(px)} \quad \ldots \text{B)}$$

8 октября 1914 г.

---

[1]) Позволю замѣтить, что разыскиваніемъ этой книжки въ главнѣйшихъ библіотекахъ Петрограда удалось открыть только одинъ экземпляръ, да и то пожертвованный авторомъ соотвѣтствующему учрежденію, что видно изъ личной надписи автора на книжкѣ; но и этотъ единственный въ Петроградѣ экземпляръ оказался неразрѣзаннымъ.

[2]) Эти Записки, томъ V, 373.