30. Къ вопросу о формѣ свободной струи при истеченіи совершенной жидкости изъ сосуда съ плоскими стѣнками.

С. Н. Петрова

(доложено 3 ноября).

Вопросъ о формѣ свободной струи при истеченіи совершенной жидкости изъ сосуда, когда движеніе происходитъ въ плоскости, былъ впервые рѣшенъ Гельмгольцемъ [1]) для случая истеченія жидкости черезъ каналъ, вдающійся въ этотъ сосудъ. Методъ Гельмгольца былъ обобщенъ затѣмъ Кирхгоффомъ, [2]) который далъ рѣшеніе нѣсколькихъ задачъ, относящихся къ плоскому движенію жидкости, и, между прочимъ, задачи объ истеченіи жидкости черезъ щель въ плоской стѣнкѣ. Обѣ эти задачи разсматриваетъ Ламбъ въ своемъ трактатѣ по гидродинамикѣ, [3]) причемъ онъ примѣняетъ для вывода уравненія свободной струи методъ конформныхъ преобразованій Шварца [4]) и Христоффеля.

Цѣлью моей настоящей замѣтки является примѣненіе этого же метода къ выводу уравненія свободной струи при истеченіи жидкости черезъ отверстіе въ сосудѣ съ плоскими стѣнками, причемъ стѣнки сходятся къ отверстію подъ угломъ 2α.

Обѣ упомянутыя выше задачи входятъ въ эту, очевидно, какъ частные случаи при $\alpha = \pi$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Когда эта замѣтка была уже написана, проф. Н. М. Крыловъ указалъ мнѣ, что эта же задача рѣшена въ работѣ Н. Е. Жуковскаго: „Видоизмѣненіе метода Кирхгоффа для опредѣленія движенія жидкости въ двухъ измѣреніяхъ при постоянной скорости, данной на неизвѣстной линіи тока“. Математическій сборникъ, т. XV.

[1]) Monatsberichte der Berl. Akad. April 1868.

[2]) Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik, 70, 1869.

[3]) Lamb. Treatise on the Mathematical Theory of the Motion of Fluids. Нѣмецкій переводъ: Lamb. Lehrbuch der Hydrodynamik, 1907. Стр. 110.

[4]) Schwarz: «Über einige Abbildungsaufgaben», Crelles Journal, 70.

Итакъ, мы разсматриваемъ движеніе въ плоскости т. е. при условіи, что u и v, проекціи скорости частицы жидкости на оси x и y, являются функціями только x и y, и что v, проекція скорости на ось z, равна 0.

Вводимъ функцію

$$\zeta = -\frac{dz}{dw}$$

гдѣ

$$z = x + iy$$

а

$$w = \varphi + i\psi$$

причемъ φ есть потенціалъ скорости, т. е.

$$\varphi = -\int udx + vdy$$

и ψ есть функція струи, т. е.

$$\psi = \int vdx - udy$$

$\varphi = \text{const}$ есть уравненіе линіи равнаго потенціала, и $\psi = \text{const}$ есть уравненіе струи.

Имѣемъ

$$\zeta = -\frac{dz}{dw} = \frac{1}{-\frac{d\varphi}{dx} - i\frac{d\psi}{dx}} = \frac{1}{u - iv} = \frac{u + iv}{u^2 + v^2} = \frac{1}{q} e^{\theta i},$$

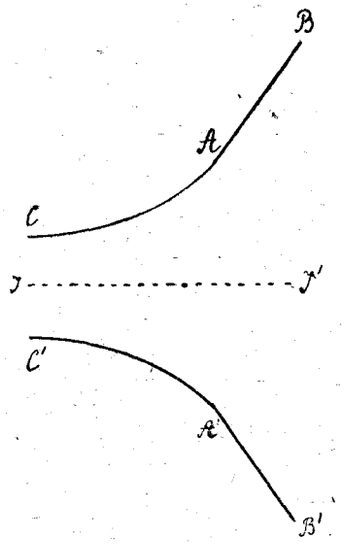
гдѣ q есть скорость частицы жидкости, а θ—уголъ, составляемый этою скоростью съ осью x.

Слѣдовательно

$$\log \zeta = \log \frac{1}{q} + i\theta.$$

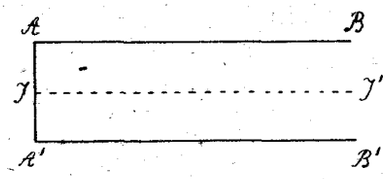
Теперь разсмотримъ струю, движущуюся вдоль стѣнки сосуда и, послѣ выхода изъ отверстія, представляющую свободную струю. На чертежѣ 1, пред-

ставляющемъ плоскость функціи $z = x + iy$ эти струи будутъ BAC и B′A′C′.



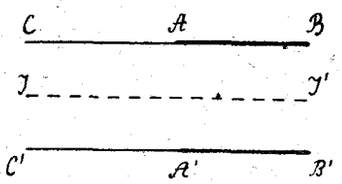
Черт. 1.

Разсмотримъ плоскость функціи $\log \zeta$. Для части BA первой струи имѣемъ $\Theta = \text{const}$, для части AC $q = \text{const}$, а слѣдовательно и $\log \frac{1}{q} = \text{const}$. То же самое будемъ имѣть и для второй свободной струи. Слѣдовательно, въ плоскости $\log \xi$ мы получимъ слѣдующую, представленную на черт. 2, фигуру для этихъ струй. Наконецъ, разсмотримъ плоскость функ-



Черт. 2.

ціи $w = \varphi + i\psi$. Въ этой плоскости мы получимъ для разсматриваемыхъ струй фигуру, изображенную



Черт. 3.

на чертежѣ 3-мъ, такъ какъ уравненіе струи есть $\psi = \text{const}$ и φ убываетъ по направленію отъ B къ C.

Задача сводится, слѣдовательно, къ тому, чтобы найти между $\log \zeta$ и w зависимость, которая преобразовывала бы прямолинейную фигуру первой плоскости въ прямолинейную фигуру второй. Эта задача рѣшается при помощи метода Шварца и Христоффеля слѣдующимъ образомъ. Если мы введемъ промежуточную перемѣнную t, то полагая

$$1)\quad \log \zeta = A \,.\, Ar \cos ht + B$$

и

$$2)\quad w = \text{Clog } t + D$$

получимъ два уравненія, изъ которыхъ первое преобразуетъ ось абсциссъ въ плоскости функціи t въ прямолинейную фигуру въ плоскости $\log \zeta$, данную на чертежѣ 2-мъ, а второе преобразуетъ ту же ось абсциссъ въ плоскости t въ прямолинейную фигуру въ плоскости w, данную на чертежѣ 3-мъ. Очевидно, исключивъ t изъ этихъ двухъ уравненій, мы находимъ зависимость между $\log \zeta$ и w, а, слѣдовательно, и между z и w. Поэтому намъ надо лишь опредѣлить коэффиціенты A, B, C и Д изъ условій задачи.

Примемъ, что циклическія функціи Arcosht и logt при $t = 1$ обращаются въ 0. Выберемъ единицы длины и времени такъ, чтобы скорость свободной струи q равнялась 1. Примемъ далѣе $\log \zeta$ равнымъ $(\pi - \alpha)\, i$ въ точкѣ A′ и $(\pi + \alpha)\, i$ въ точкѣ A, тогда получимъ (такъ какъ точка A соотвѣтствуетъ $t = -1$ и точка A′ — $t = 1$).

$$(\pi + \alpha)\, i = A\pi i + B$$
$$(\pi - \alpha)\, i = B$$

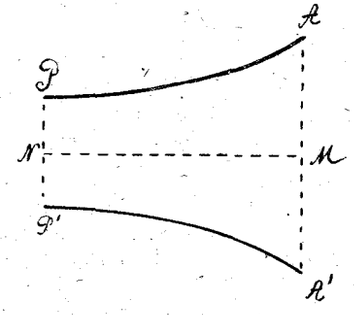
Откуда

$$A = \frac{2\alpha}{\pi}$$

Слѣдовательно, получаемъ:

$$3)\quad \log \zeta = \frac{2\alpha}{\pi} Ar \cdot \cos ht + (\pi - \alpha)\, i$$

Примемъ, что уравненіе линіи JJ′ въ плоскости w (черт. 3-ій) есть $\psi = 0$.



Черт. 4.

Пусть предѣльная ширина струи, т. е. ширина въ сѣченіи, гдѣ достигается наибольшее сжатіе,

равна $2b$. Такъ какъ $\psi = \int -udy + vdx$, то для струи AP (Черт. 4). имѣемъ:

$$\psi = \int_M^N -udy + vdx + \int_N^P -udy + vdx$$

слѣдовательно

$$\psi = \int_N^P qdy$$

и при $q = 1$ уравненіе струи AP будетъ

$$\psi = b$$

Такимъ же образомъ найдемъ, что уравненіе струи A′P′ будетъ

$$\psi = -b$$

Примемъ далѣе, что уравненіе линіи равнаго потенціала, проходящей черезъ точки A и A′, есть

$$\varphi = 0$$

Тогда для опредѣленія коэффиціентовъ C и D въ уравненіи 2) получимъ на основаніи условій, данныхъ для точекъ A и A′, слѣдующія уравненія:

$$ib = i\pi C + D$$
$$-ib = D$$

Откуда

$$C = \frac{2b}{\pi}$$

И такъ, мы имѣемъ

$$4)\quad w = \frac{2b}{\pi}\log\ t - ib$$

Разсмотримъ теперь свободную струю A′J. Для нея t измѣняется отъ 1 до 0. На основаніи уравненія 3) имѣемъ:

$$\log\frac{1}{q} + i\theta = \frac{2\alpha}{\pi}\mathrm{A}r\ \cos\ ht + (\pi - \alpha)\ i$$

или

$$\log\frac{1}{q} + i\theta = \frac{2\alpha}{\pi}\log\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right) + (\pi - \alpha)\ i$$

Такъ какъ q мы приняли равнымъ 1, то окончательно получимъ

$$i\theta = \frac{2\alpha}{\pi}\log\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right) + \left(\pi - \alpha\right)\ i$$

Такъ какъ t измѣняется здѣсь отъ 1 до 0, то можемъ положить $t = \cos\beta$, тогда будемъ имѣть

$$i\theta = \frac{2\alpha}{\pi}\beta i + \left(\pi - \alpha\right)\ i$$

Отсюда

$$\beta = \frac{\pi(\theta - \pi + \alpha)}{2\alpha}$$

и

$$t = \cos\frac{\pi}{2\alpha}\left(\theta - \pi + \alpha\right)$$

Изъ уравненія 4) получаемъ

$$\varphi = \frac{2b}{\pi}\log\ \cos\frac{\pi}{2\alpha}\left(\theta + \alpha - \pi\right)$$

Но вдоль струи A′J имѣемъ:

$$\frac{d\varphi}{ds} = -q = -1$$

Поэтому можно положить

$$\varphi = -s$$

Слѣдовательно, мы получаемъ

$$5)\quad s = \frac{2b}{\pi}\log\ \sec\frac{\pi}{2\alpha}\left(\theta + \alpha - \pi\right)$$

Отсюда

$$ds = \frac{b}{\alpha}\,tg\frac{\pi}{2\alpha}\left(\theta + \alpha - \pi\right)d\theta$$

Слѣдовательно

$$dx = \frac{b}{\alpha}\,tg\frac{\pi}{2\alpha}\left(\theta + \alpha - \pi\right)\cos\ \theta\ d\theta$$

$$d_y = \frac{b}{\alpha}\,tg\frac{\pi}{2\alpha}\left(\theta + \alpha - \pi\right)\sin\ \theta\ d\theta$$

и

$$\mathrm{A}\begin{cases} x = \dfrac{b}{\alpha}\displaystyle\int_{\pi-\alpha}^{\theta} tg\frac{\pi}{2\alpha}\left(\theta + \alpha - \pi\right)\cos\theta\, d\theta \\ y = \dfrac{b}{\alpha}\displaystyle\int_{\pi-\alpha}^{\theta} tg\frac{\pi}{2\alpha}\left(\theta + \alpha - \pi\right)\sin\theta\, d\theta \end{cases}$$

И такъ мы получили систему уравненій свободной струи.

Примѣнимъ это общее рѣшеніе къ отдѣльнымъ частнымъ случаямъ.

1. Жидкость вытекаетъ черезъ вдающійся внутрь сосуда каналъ—случай, разсмотрѣнный Гельмгольцемъ. Въ системѣ уравненій A надо положить

$$\alpha = \pi$$

Мы получимъ

$$x = \frac{b}{\pi}\int_0^{\theta} tg\frac{\theta}{2}\cos\theta\, d\theta$$

$$y = \frac{b}{\pi}\int_0^{\theta} tg\frac{\theta}{2}\sin\theta\, d\theta.$$

Слѣдовательно

$$x = \frac{2b}{\pi}\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\log\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$y = \frac{b}{\pi}\left(\theta - \sin\theta\right).$$

Предѣльное значеніе y равно b. Отсюда находимъ, что коэффиціентъ сжатія струи равенъ $\frac{1}{2}$.

2. Жидкость вытекаетъ черезъ отверстіе въ тонкой стѣнкѣ — случай, разсмотрѣнный Кирхгоффомъ Мы должны въ формулахъ A положить

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда получимъ:

$$x = \frac{2b}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} tg\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\cos\theta\, d\theta.$$

$$y = \frac{2b}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} tg\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\cos\theta\, d\theta$$

Слѣдовательно:

$$x = \frac{2b}{\pi}\left(\cos\theta + \log\cot\frac{\theta}{2}\right)$$

$$y = \frac{4b}{\pi}\sin^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Предѣльное значеніе y равно $\frac{2b}{\pi}$. Отсюда коэффиціентъ сжатія равенъ $\frac{\pi}{\pi+2} = 0{,}611$.

Коэффиціентъ сжатія струи легко можетъ быть опредѣленъ при помощи опыта, что даетъ возможность провѣрить, насколько результаты этой теоріи согласуются съ дѣйствительностью. Въ виду интереса, представляемаго этимъ обстоятельствомъ, разсмотримъ еще два частныхъ случая.

3. Стѣнки BA и B′A′ (см. черт. 1) составляютъ уголъ въ 90°. Слѣдовательно $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Формулы A даютъ

$$x = \frac{4b}{\pi}\int_{3/4\pi}^{\theta} tg\,2\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right)\cos\theta\, d\theta.$$

$$y = \frac{4b}{\pi}\int_{3/4\pi}^{\theta} tg\,2\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right)\sin\theta\, d\theta.$$

Проинтегрировавъ, получимъ:

$$x = \frac{2b}{\pi}\left[2\left(\cos\theta \quad \cos\frac{3}{4}\pi\right) + \log\frac{tg\frac{\theta}{2}}{tg\frac{3\pi}{8}}\right]$$

$$y = \frac{2b}{\pi}\left[2\left(\sin\frac{3}{4} - \sin\theta\right) + \log\frac{tg\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{tg\frac{5}{8}\pi}\right].$$

Предѣльное значеніе y $(\theta = \pi)$ будетъ

$$\frac{1{,}0657}{\pi}\,b$$

Откуда коэффиціентъ сжатія равенъ

$$\frac{1}{1 + \frac{1{,}0657}{\pi}} = 0{,}747.$$

4. Стѣнки сосуда сходятся у отверстія подъ угломъ въ 270°. Слѣдовательно, $\alpha = \frac{3}{4}\pi$.

Формулы A даютъ

$$x = \frac{4b}{3\pi}\int_{\pi/4}^{\theta} tg\,\frac{2}{3}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\cos\theta\, d\theta$$

$$y = \frac{4b}{3\pi}\int_{\pi/4}^{\theta} tg\,\frac{2}{3}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\sin\theta\, d\theta$$

Положимъ

$$\frac{1}{3}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \beta$$

Тогда получимъ

$$x = \frac{4b}{\pi}\int_{0}^{\beta} tg\,2\beta\cos\left(3\beta + \frac{\pi}{4}\right)d\beta$$

$$y = \frac{4b}{\pi}\int_{0}^{\beta} tg\,2\beta\sin\left(3\beta + \frac{\pi}{4}\right)d\beta.$$

Проинтегрировавъ, найдемъ:

$$x = \frac{4b}{\pi\sqrt{2}}\left[-\frac{4}{3}\left(\cos^3\beta + \sin^3\beta\right) + \cos\beta + \sin\beta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{tg\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\beta}{2}\right)}{tg\frac{\pi}{8}} + \frac{1}{3}\right].$$

$$y = \frac{4b}{\pi\sqrt{2}}\left[\frac{4}{3}\left(\sin^3\beta - \cos^3\beta\right) - \sin\beta + \cos\beta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{tg\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{8}\right)}{tg\frac{\pi}{8}} + \frac{1}{3}\right].$$

Предѣльное значеніе y при $\Theta = \pi$, слѣдовательно при $\beta = \frac{\pi}{4}$ будетъ $0{,}8611b$, откуда коэффиціентъ сжатія равенъ 0,537.

Разсмотримъ еще радіусъ кривизны свободной струи. Изъ уравненія 5) находимъ

$$R = \frac{ds}{d\Theta} = \frac{b}{\alpha} tg \frac{\pi}{2\alpha} (\Theta + \alpha - \pi).$$

Такъ какъ уголъ Θ въ точкѣ выхода струи изъ отверстія равенъ $\pi - \alpha$, то въ этой точкѣ при всякомъ α, не равномъ 0, имѣемъ

$$R = 0$$

т. е. кривизна струи въ этой точкѣ безконечно велика. При возрастаніи Θ радіусъ кривизны R возрастаетъ и при $\Theta = \pi$ становится безконечно большимъ.