27. Квадратичныя терціи и секунды лучей.

Е. С. Федорова.

(Доложено 15 сентября).

Терціи лучей, представляющія такъ называемыя нулевыя системы и вполнѣ и однозначно опредѣляемыя пятью произвольными лучами, обыкновенно называются линейными въ виду того, что въ каждой плоскости и изъ каждой точки пространства имѣется прима лучей, пересѣкающихся въ одной точкѣ и заключающаяся въ одной плоскости; такая прима лучей въ плоскости или исходящихъ изъ одного центра называется линейною.

Но для системы лучей, опредѣляемой, какъ параметромъ особымъ экстралучомъ (который мы, ради наглядности, будемъ представлять себѣ находящимся въ горизонтальной плоскости), такія примы уже не есть линейныя, такъ какъ послѣднія необходимо должны заключать въ себѣ этотъ экстралучъ. Поэтому и сами нулевыя системы не представляютъ въ этой системѣ линейныхъ терцій, а есть терціи квадратичныя. Это означаетъ, что всякая линейная прима вообще пересѣкаетъ эту терцію въ парѣ лучей, если сама терція не есть линейная, а линейная представлена спеціальною нулевою системою.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, мы сначала разсмотримъ, какая совокупность лучей такой терціи, не заключающей въ себѣ особаго экстралуча, пересѣкаетъ пару произвольно взятыхъ прямыхъ a и b.

Каждая точка одной изъ нихъ напр. a есть нулевая точка нѣкоторой плоскости и въ ней эта точка является центромъ примы лучей. Ясно, что изъ всѣхъ лучей этой примы, только одинъ лучъ одновременно пересѣкаетъ и прямую b, и именно въ той же точкѣ, въ которой ее пересѣкаетъ и нулевая плоскость взятой точки, а нулевыя плоскости всѣхъ точекъ этого луча проходятъ чрезъ него же, и слѣдовательно этотъ лучъ является единственнымъ, пересѣкающимъ во взятой точкѣ обѣ прямыя; конечно, онъ же будетъ единственнымъ и для его точки на второй прямой.

Отсюда заключаемъ, что изъ всей терціи пересѣкаютъ пару прямыхъ только одна прима, и притомъ по одному лучу чрезъ каждую соотвѣтственную пару точекъ. Каждымъ лучомъ устанавливается; слѣдовательно, соотвѣтствіе или гомологичность между точками этихъ прямыхъ для установленія этой гомологичности достаточно имѣть три луча, а ими опредѣляется прима производящихъ гиперболоида, пересѣкающихъ двѣ его направляющія.

Эта прима есть прима линейная только въ томъ случаѣ, если въ ея составъ входитъ особый экстралучъ, и тогда для установленія гомологичности точекъ на общихъ сѣкущихъ мы имѣемъ уже въ качествѣ постояннаго экстралучъ, и потому линейная прима вполнѣ опредѣляется еще двумя какими-нибудь лучами.

Въ линейной примѣ всѣ направляющія или сѣкущія должны пересѣкать и особый экстралучъ, который, слѣдовательно, также долженъ принадлежать къ составу лучей нулевой системы, если же его въ этомъ составѣ не имѣется, то не можетъ заключаться въ нулевой системѣ ни одной линейной примы.

Если въ такой системѣ лучей мы возьмемъ двѣ произвольныя сѣкущія, то хотя чрезъ нихъ и пройдетъ прима лучей нулевой системы, но она уже не будетъ линейною. Если же мы возьмемъ пару сѣкущихъ, опредѣляемую особымъ экстралучомъ (уже не составляющемъ лучъ системы) и двумя настоящими лучами системы, то мы этимъ хотя и установимъ гомологичность точекъ на обѣихъ сѣкущихъ, но эта гомологичность уже будетъ не та, которая устанавливается совокупностью лучей системы.

Но изъ элементовъ новой геометріи извѣстно, что если въ прямой мы совмѣстимъ двѣ гомологичныя примы точекъ съ двумя самогомологичными

точками, то это будутъ единственныя двойныя точки для обѣихъ примъ.

Этимъ предложенная теорема, а именно, что произвольная нулевая система, не представляющая линейной терціи лучей, любою линейною примою пересѣкается въ парѣ лучей, становится доказанною.

Вмѣстѣ съ тѣмъ отсюда слѣдуетъ, что всякая нулевая система, не представляющая линейной терціи лучей, есть квадратичная терція лучей.

Но, какъ объяснено въ статьѣ о квадратичныхъ примахъ лучей [1]), линейная терція лучей есть спеціальная нулевая система (безъ винтовой оси), а потому недостаточно того, чтобы въ составъ нулевой системы входилъ особый экстралучъ системы.

Но если въ составъ, хотя бы и не спеціальной нулевой системы, особый экстралучъ входитъ, то тогда каждая пара лучей, непересѣкающихъ этотъ лучъ вполнѣ и однозначно опредѣляетъ линейную приму лучей; вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣляется и прима пересѣкающихъ тотъ же лучъ направляющихъ гиперболоида.

Въ этомъ случаѣ полная терція лучей нулевой системы распадается на секунду линейныхъ примъ.

Если мы пересѣчемъ эту линейчатую квадратичную терцію линейною терціею лучей, въ которой представлена кварта линейныхъ примъ, то получимъ квадратичную секунду лучей, распадающуюся на приму линейныхъ примъ то есть линейчатую квадратичную секунду лучей, которой въ обыкновенномъ пространствѣ точекъ коррелятивна линейчатая коносекунда.

Итакъ, какъ квадратичныя терціи, такъ и квадратичныя секунды лучей раздѣляются на два разряда линейчатыхъ и нелинейчатыхъ или обыкновенныхъ. Это различіе обусловливается тѣмъ, входитъ ли въ составъ ихъ лучей особый экстралучъ или не входитъ. Квадратичныя секунды представляютъ пересѣченіе квадратичныхъ терцій съ линейною терціей, или иначе, пересѣченіе нулевыхъ системъ общаго характера со спеціальною. Отсюда видно, что въ составъ лучей квадратичныхъ секундъ входятъ лишь лучи спеціальной нулевой системы.

Линейныя примы лучей пересѣкаютъ вообще всякія квадратичныя терціи и секунды въ парѣ лучей, но въ линейчатыхъ онѣ еще и входятъ въ ихъ составъ.

Линейныя секунды лучей пересѣкаютъ тѣ и другія въ конопримахъ лучей; въ линейчатыхъ же терціяхъ и секундахъ эти конопримы могутъ распадаться на двѣ линейныя примы лучей. Изъ конопримъ пересѣченія могутъ быть представлены вообще непозиціонныя конопримы общаго характера, тетрапримы и трипримы и позиціонная сфероприма.

Коноприма лучей общаго характера есть спеціальная линейчатая поверхность IV порядка съ двумя прямыми двойныхъ точекъ и однимъ двойнымъ лучомъ, пересѣкающимъ эти обѣ прямыя. Совокупность изъ этихъ трехъ прямыхъ есть спеціальная гексаприма, и полная линейная секунда есть совокупность всѣхъ хордъ этой гексапримы, если обѣ прямыя двойныхъ точекъ пересѣкаютъ особый экстралучъ, который представляетъ изъ себя третью составную часть распавшейся гексапримы [2]).

Если же двойной лучъ не есть особый экстралучъ, то въ примѣ производящихъ гиперболоида, опредѣляемой двумя предъидущими какъ постоянными и еще какимъ-нибудь перемѣннымъ лучомъ этой квадратичной секунды, всѣ производящія есть лучи секунды и составляютъ линейную приму лучей.

Слѣдовательно, вся секунда лучей распадется на линейныя примы лучей, имѣющихъ общій двойной лучъ. Ясно, что такой квадратичной секундѣ лучей въ пространствѣ точекъ коррелятивенъ квадратичный конусъ.

Поэтому, спеціальную квадратичную секунду, представляющую совокупность хордъ гексапримы, распавшейся на двѣ общія сѣкущія и одинъ двойной лучъ, не представляющій особый экстралучъ мы можемъ назвать квадратичнымъ конусомъ лучей.

Если же въ такой квадратичной секундѣ, особый экстралучъ не входитъ въ составъ ея лучей, то въ ея составъ вовсе не входитъ и линейныхъ примъ лучей.

Если мы (напр. по пріему Шумахера) установимъ проективность между лучами линейной терціи какъ особой нулевой системой и точками пространства, то по девяти точкамъ мы можемъ воспроиз-

[1]) Эти Записки V, 203.

[2]) Эта секунда лучей, какъ извѣстно, можетъ быть воспроизведена двумя гомологичными секундами плоскостей съ центрами A и B, если прямая AB есть самогомологичный (двойной) лучъ секунды. Всякой плоскости примы, имѣющей этотъ лучъ своею осью, гомологична другая плоскость той же примы; получается инволюція плоскостей примы съ парою (вещественныхъ или мнимыхъ) двойныхъ плоскостей. Въ каждой изъ нихъ гомологичные лучи перспективны то есть пересѣкаются въ прямой, пересѣкающей двойной лучъ.

вести коносекунду точекъ, а слѣдовательно по девяти лучамъ линейной терціи можемъ воспроизвести коносекунду лучей.

Итакъ, для полнаго и однозначнаго опредѣленія коносекунды лучей должно быть ихъ дано девять, но съ условіемъ, чтобы они входили въ составъ линейной терціи. Вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣляются и три прямыя, представляющія выродившуюся гексаприму.

Въ самомъ дѣлѣ, каждые два пересѣкающіеся луча даютъ одну изъ точекъ гексапримы. Имѣя двѣ такихъ точки, мы находимъ одну изъ двухъ сѣкущихъ прямыхъ; другая опредѣляется какъ прямая пересѣченія плоскостей, въ которыхъ находятся пары лучей.

Если дано всего восемь лучей, то за девятый мы можемъ принять особый экстралучъ линейной терціи. Мы такимъ образомъ по этимъ даннымъ можемъ воспроизвести октосекунду лучей въ линейной терціи. Изъ этого воспроизведенія видно, что эта октосекунда есть линейчатая квадратичная секунда.